

†



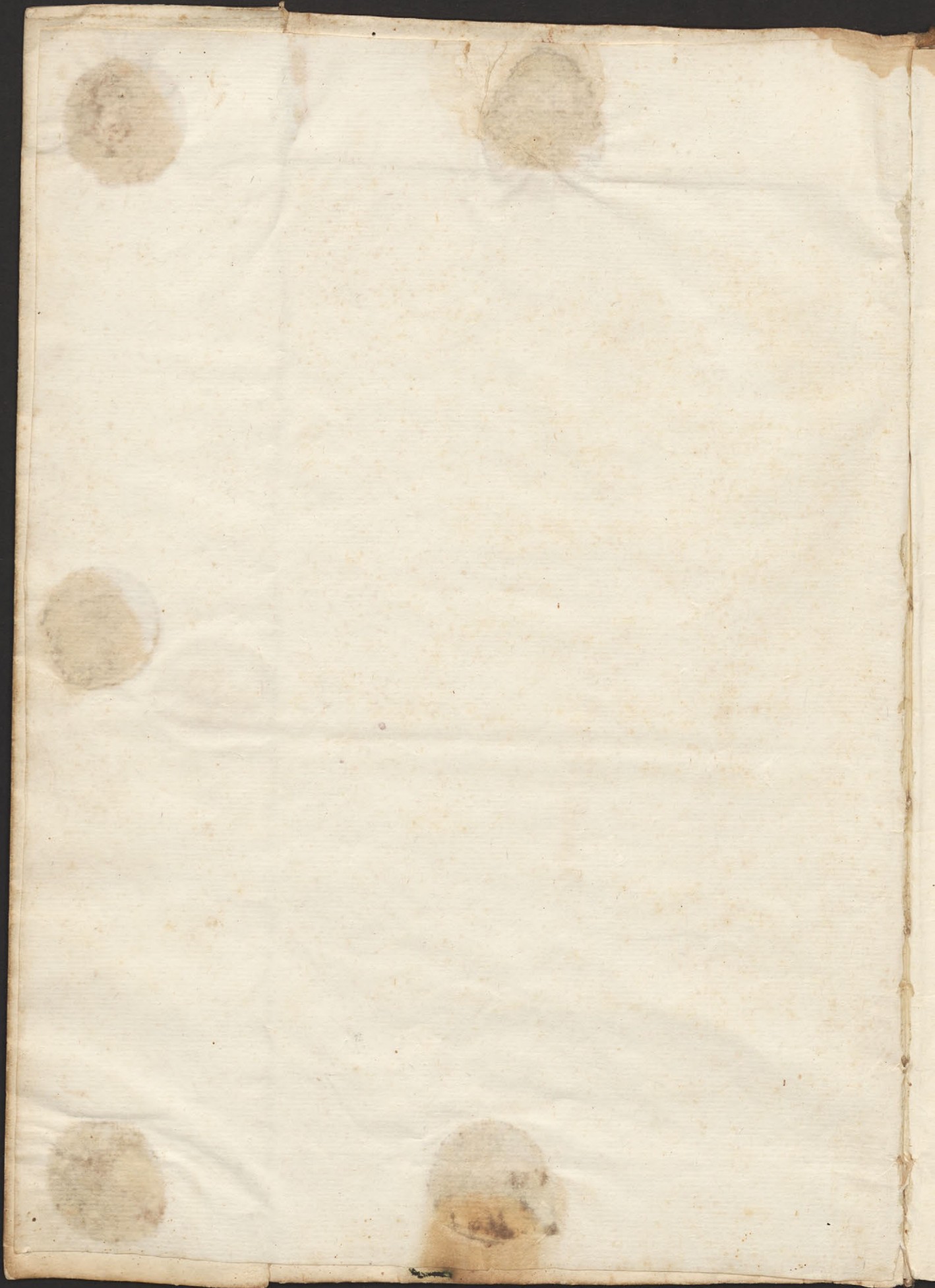
G. Tartini

Quadratura del Cerchio

Manosc. inedito



Arch. Tartiniiano
Arm. A. Sez. 2. ms. W3



1
i fratelli Vata già Simione
nel 1881

donavano questo con altri

M. di Tartini

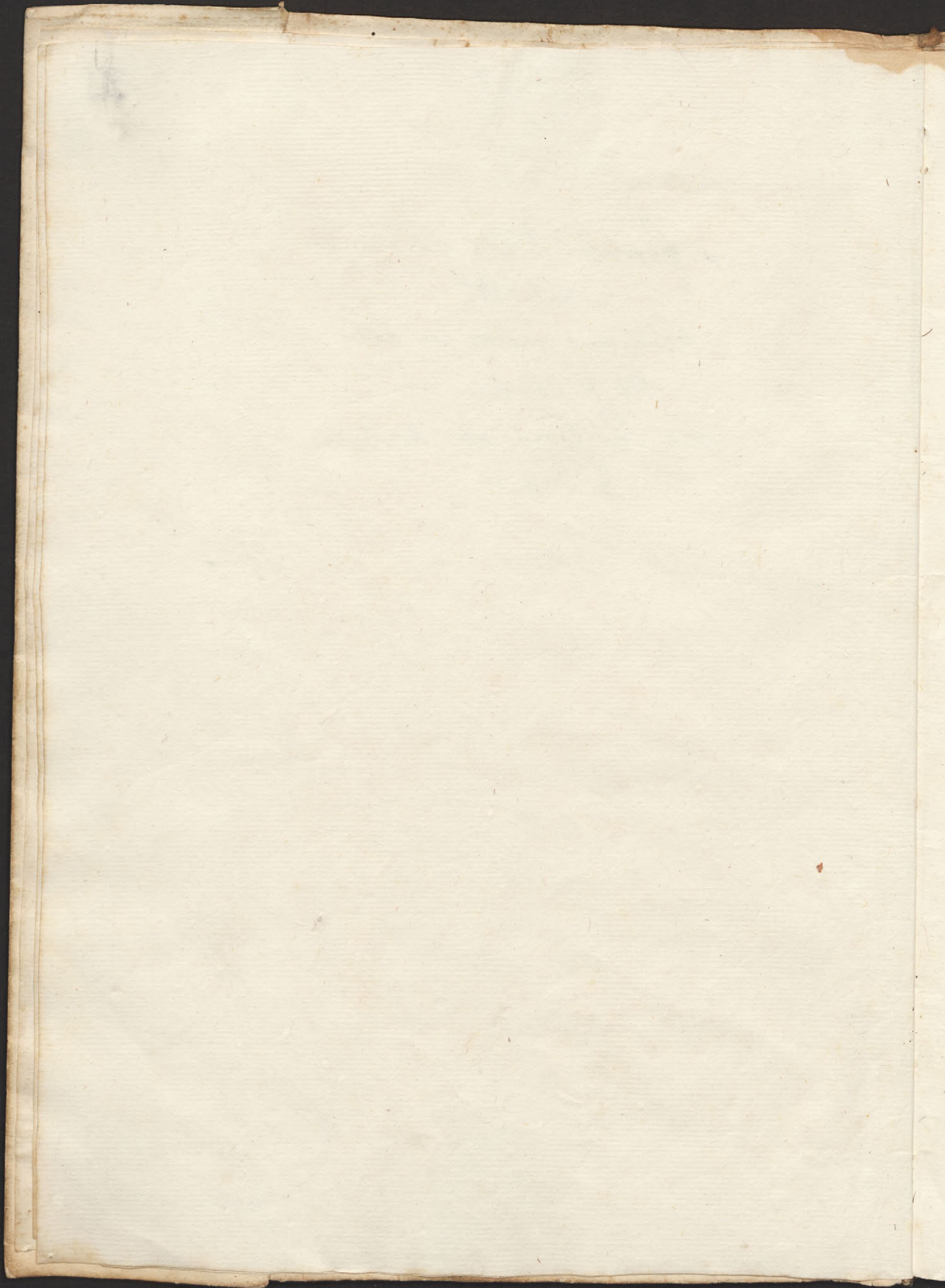
sub condizione all' Archivio

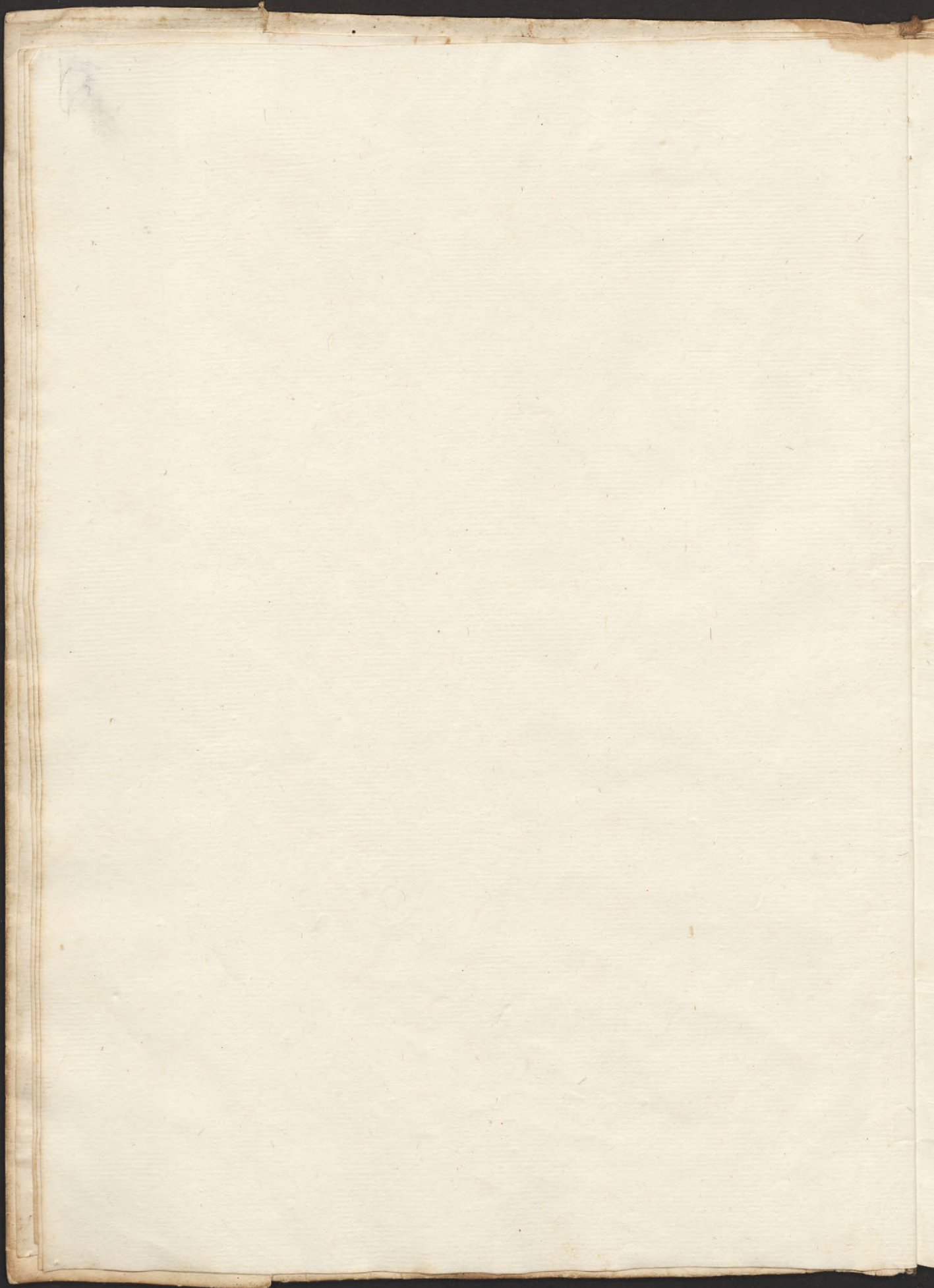
di Pirano



I further state for reasons
 and 1891
 because of the
 the 2
 the contents of the
 2

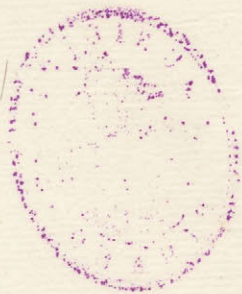






4







[Faint, illegible handwritten text, likely bleed-through from the reverse side of the page.]



Si è scoperto un fenomeno armonico, per il cui mezzo si pretende ottenere la quadratura del
Circolo: non già nel modo comune; ma in modo particolare, che significa molto più: dedotto
dalla scienza fisico-armonica, di cui presentem^{te} non si ha cognizione.
Il fenomeno è questo: da esposto suonatore di violino siano suonate equitemporaneamente: con arida
forte e sostenuta due corde tra loro accorde, in qualsivoglia intervallo; rationale, o irrationale;
semplice, o composto: eccettuandosi volam^{te} tra tutti gli intervalli possibili la ragione dupla, che
praticam^{te} si chiama ottava, e presentandosi le due corde acute del violino, acciò si rilevi meglio
il fenomeno. Si sentiranno chiamati: tre suoni: due forti, procedenti dalle due corde suonate;
il terzo piano, procedente dall'urto, che fanno tra loro le due corpi di aria mariti dalle vibrazioni
delle due corde suonate. Che questo terzo suono proceda da tal ragione, è ora si fa^{te} evidente.
Perchè a due suonatori dandosi un violino per ciascheduno, sopra di cui non vi sia che una sola
corda, posti tra loro in distanza di due braccia incirca, e suonando ciascuno nello stesso tempo
la sua corda, l'uditore, che sta in mezzo de due suonatori, sente molto più, e molto meglio
questo terzo suono di quello lo senta stando vicino a medesimi. Se poi li due suonatori si
vanno allontanando da tal distanza, a uguaglianza della maggior lontananza si va perdendo
questo terzo suono: vengo evident^{te} dell'accennata ragione. Lo stesso fenomeno si rileva nelle
due corde acute del Violoncello, e della Viola contralto: avvertendosi che non si escludono le corde
gravi de nominati strumenti, perchè non segue lo stesso effetto; ma perchè nelle corde acute
essendo maggiore l'urto de due corpi di aria, il terzo suono è molto più sensibile nelle corde
acute, che nelle gravi: prova ancor questa dell'accennata ragione.
Questo terzo suono, la di cui intonazione è distinguibile da qualunque Musico, è della seguente
 natura. (figura I) Se l'intervallo suonato è in ragione dupla, o sia praticam^{te} ottava, non si
ha terzo suono di sorta alcuna. Se l'intervallo suonato è sesquialtero, o sia praticam^{te} quinta,
si ha il terzo suono A univono al termine grave della sesquialtera; e però si dura qualche
 fatica a distinguerlo. Se l'intervallo è sesquiterzo, o sia di quarta, si ha il terzo suono B
sesquialtero al termine grave della sesquiterza. Se l'intervallo è sesquiquarto, o sia di
terza maggiore, si ha il terzo suono C duplo al termine grave della sesquiquarta. Se l'
intervallo è sesquiquinto, o sia di terza minore, si ha il terzo suono D duplo sesquiquarto
al termine grave della sesquiquinta etc.; e ciò nell'intervalli semplici rationali. Se sono
 composti, dato l'intervallo super 2 part: 3, o sia di sesta maggiore, si ha il terzo suono G
 sesquialtero al termine grave della sesta maggiore. Dato l'intervallo super 3 part: 5, o sia
 di sesta minore, si ha il terzo suono H duplo sesquiquarto al termine grave della sesta
 minore. Si omettono presentem^{te} l'intervalli irrationali; si perchè non sono troppo lunga
 spiegazione; si perchè non sono necessari a quanto qui si propone di dimostrare.
 Nella esposizione presente occorre una difficoltà pratica; ed è che il suonatore incontra la perfetta
 intonazione de suddetti intervalli; così che li due suoni della sesquialtera siano identici.
 uniti alli due suoni detti dalla corda di un monocordo divisa per la forma, o sia ragione 3, 2;

si due suoni della resquenza identici: unisoni alli due suoni detti dalla stessa corda divisa per
 la forma, o sia ragione 4, 3, e così degli altri. Ma questa difficoltà si converte in prova fisica,
 dimostrativa della verità del fenomeno. Perché quando appunto si tenta risultare il tale assegnato
 terzo suono dal tale assegnato intervallo, allora sarà segno fisico dimostrativo, che il suonatore ha
 incontrato in punto matematico la infonazione de due termini formanti l'assegnato intervallo;
 e sarà segno fisico dimostrativo del contrario, quando non risulti il tale terzo suono perfetto;
 accordato nell'assegnata ragione col termine grave del suonato intervallo. Anzi per acquistare una
 perfetta infonazione degli accordi a doppia corda sopra li strumenti di arco, la regola infallibile
 è il risultato di questo tale terzo suono relativo agli accordi: si faccia ad arbitrio comune qualunque
 esperienza; si novata il fenomeno sempre più vero, perché sempre più confermato dalla medesima.
 Cò stabilito, risulta per conseguenza la scoperta della radice fisica armonica. Perché di sopra li
 soprassegnati intervalli in serie armonica (figura II) si trova, che AB dupla non ha terzo
 suono. BC resquialtera ha terzo suono G. La resquiquarta CD ha terzo suono lo stesso G.
 La resquiquinta DE lo stesso G. La resquiquinta EF lo stesso G. Ma divisa la corda di un
 monocordo per la serie armonica in $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, l'intervallo BC è eguale all'intervallo
 formato da $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$; l'intervallo CD eguale all'intervallo $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$; l'intervallo DE eguale all'intervallo
 $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; l'intervallo EF eguale all'intervallo $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$; e il terzo suono G è eguale ad $\frac{1}{2}$. Dunque
 si trova in natura un fenomeno fisico armonico di quantità esprimibile per la serie armonica,
 in cui $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ ha per radice $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ ha per radice $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ha per radice $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ ha per radice $\frac{1}{2}$.
 Si più continuando la serie armonica in infinito per $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ etc.; e riportando la quantità al
 suono, si trova, che l'intervallo resquidesso ha per terzo suono lo stesso G; il resquidesso lo
 stesso G; il resquidesso lo stesso G etc. etc.; e in conseguenza $\frac{1}{7}, \frac{1}{8}$ ha per radice $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{8}, \frac{1}{9}$
 ha per radice $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{9}, \frac{1}{10}$ ha per radice $\frac{1}{2}$ etc. etc. Questo è un fenomeno di quantità, che dalla scienza convergenti: note
 vententi sopra il quanto non sarà mai spiegato: non essendovi calido, ne regola nota, in di cui
 forza possa dimostrarsi: dedotti a costante in infinito da qualunque intervallo della
 serie armonica infinita.

Perché poi dalla ragione dupla non si abbia terzo suono, quando si ha infallibilmente da qualunque
 altro intervallo, la ragione si è, che la dupla essendo principio primo, e radice universale in
 genere di qualunque progressione, e sistema di quantità; e principio primo, e radice potenziale
 in specie del sistema fisico armonico, non ha, ne deve avere, terzo suono; altrimenti non
 sarebbe principio, e radice. Che la ragione dupla sia tale, si dimostra.

È noto per Algebra, che data la unità con un termine indefinito, acciò gli sia assegnato un
 mezzo, non può dimostrarsi: assegnarsi altro mezzo, se non l'armonico; e questo risulta
 in ragione dupla alla data unità, perché non può esser, che 2. Dunque la ragione dupla
 procede dalla quantità finita, e dalla indefinita; dunque principio primo, e radice universale
 in genere di qualunque progressione, e sistema di quantità, perché nel termine indefinito è
 sopra, e fuori della quantità concreta. Ma il termine 2 debito dalla unità, e dal termine

7

indefinito è detto, come mezzo armonico; dunque per tal mezzo resta dimostrarsi: indicare la
 dupla di progressione armonica: essendo assioma della scienza delle proporzioni, che li estremi
 siano della natura del mezzo. Vede dunque la dupla è principio primo universale in genere
 di qualunque sistema di quantità progressiva, e che come detto, è formata dal mezzo armonico,
 è indicata di progressione armonica; non essendo, ne potendo esser in progressione attuale
 armonica, perchè è in due termini, quali non formano progressione, sarà principio primo, e
 radice potenziale in specie della progressione armonica, e in conseguenza del sistema
 fisico armonico, che è la stessa progressione armonica ridotta al fisico per il suono. Che è quanto
 si vuole. Ma come in questa dimostrazione si racchiude tutto il fondamento del presente sistema, è
 necessario spiegarla fino alla sua intima intelligenza. Dalla data unità col termine indefinito
 deducendosi il termine 2, il progresso dimostrativo de' due termini concreti è da 1 a 2,
 perchè 1 è il dato, 2 è il dedotto. Dunque la ragione risultata è subduple, quale se si vuole
 considerare come separata, e indipendente dal termine indefinito, è capace della progressione
 aritm.: 1, 2, 3, prendendo la data unità per differenza; ed è capace (se si vuole) della progressione
 geom.: 1, 2, 4, prendendo il dedotto 2 per differenza. In tal concetto è principio universale
 delle due progressioni, che è quanto si è sopra dimostrato. Ma non potendosi non considerare il
 termine indefinito, perchè la data posizione è la unità col termine indefinito, e in forza di
 tal posizione deducendosi dimostrativamente il termine 2, come mezzo armonico, sono di necessaria
 conseguenza tra loro inseparabili li tre termini, cioè la data unità, il dato termine indefinito,
 e il dedotto mezzo armonico 2. In questa posizione de' suddetti tre termini tra loro inseparabili
 tre cose sono dimostrativamente vere. La prima, che non vi è, ne vi può esser progresso dal
 secondo al terzo termine, cioè dal dedotto mezzo armonico 2 al dato termine indefinito, perchè
 non vi è, ne vi può esser progressione dalla quantità finita all'infinita; e però in tal
 rispetto la ragione subduple rimane senza progressione. La seconda, che il termine 2
 essendo dedotto come mezzo armonico, la data unità diventa estremo armonico, perchè il mezzo
 determina li estremi alla propria natura. In conseguenza 1, 2, subduple si converte
 in $1, \frac{1}{2}$ dupla; perchè non essendo assegnabile il terzo termine indefinito per principio armonico
 di quantità concreta, resta principio armonico di quantità concreta il dedotto mezzo 2. Dunque
 il mezzo convertendosi nel principio, che è un estremo, la data unità, che era principio, e però
 estremo, si convertirà nel mezzo. Dunque 1, 2, subduple si sarà convertita in $1, \frac{1}{2}$ dupla.
 In tal rispetto la ragione dupla è principio primo e radice potenziale in specie della progressione
 armonica. Perchè da una parte avendo in se la natura armonica dedotta da un termine,
 che è fuori e sopra la quantità concreta, com'è il termine indefinito; e dall'altra essendo in due
 termini e però non determinando quella progressione, di cui ha in se la potenza, resta
 principio primo e radice potenziale in specie di quella progressione, di cui porta in se la
 natura; che è quanto si è sopra dimostrato. La terza, che data la subduple 1, 2,
 convertita nella dupla $1, \frac{1}{2}$; data nella dupla la natura armonica, e in conseguenza

la potenza del progresso arm.^o; queste potenze di progresso s'ani determinate alla progressione
attuale da $\frac{1}{2}$: non dandosi progressione attuale se non in tre termini, ne potendosi formar progressione
armonica doppo il termine $\frac{1}{2}$, se non per il termine $\frac{1}{3}$. E così comunem.^{te} nota, ne ha bisogno di
esser dimostrata. Ma nel fenomeno del terzo suono si vuol dire molto di più. La dupla $1, \frac{1}{2}$, ridotta
fisicam.^{te} al suono, non ha terzo suono, ne lo può avere. La sesquialtera $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, ha per terzo
suono $\frac{1}{2}$, unisono, e però eguale ad $\frac{1}{2}$ primo termine della sesquialtera $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$: secondo termine
della dupla $1, \frac{1}{2}$. Dunque la ragione sesquialtera è la ragione dimostrativam.^{te} e fisicam.^{te}
determinante il sistema armonico. Io è dimostrativam.^{te}, perchè il terzo termine $\frac{1}{2}$ dimostra-
tivam.^{te} necessario per determinar la progressione doppo $1, \frac{1}{2}$, costituisce con $\frac{1}{2}$ la ragione
sesquialtera; dunque etc.: Io è fisicam.^{te}, perchè la vera ragione sesquialtera ha per
terzo suono $\frac{1}{2}$, come eguale ad $\frac{1}{2}$; e vuol dire come $1 a 1$. Dunque la ragione sesquialtera
ha in se stessa il principio primo della radice armonica nel terzo suono $\frac{1}{2}$. Ma è la prima
di tutte le ragioni a dare il terzo suono; e questo terzo suono è radice fisica del sistema
armonico; ed è come $1 a 1$ al primo termine della sesquialtera, che però lo ha in se stessa;
dunque la sesquialtera è la ragione fisicam.^{te} determinante il sistema armonico.
Si sapeva dunque per scienza dimostrativa, che il terzo termine determina in genere qualunque
progressione; e in conseguenza $\frac{1}{3}$ in specie determina la dupla $1, \frac{1}{2}$, a progressione armonica.
Ma non si sapeva, che vi fosse un fenomeno, il quale dimostrasse fisicam.^{te} questa verità in
specie nel sistema fisico armonico; ch'è quel molto di più, che si voleva dire.
Da quanto finora si è esposto, e dimostrato, ne viene, che nel sistema fisico arm.^o è inseparabile
la dupla dalla sesquialtera, perchè la dupla è potenza armonica, la sesquialtera è atto
armonico; e de questi termini nel secolo presente offendono, se ben dedotti dalla dimostrazione, si dirà
la dupla radice, la sesquialtera determinazione del sistema fisico arm.^o. Ma in qualunque modo
si voglia esprimere, è certo, che il termine $\frac{1}{2}$ è comune alla dupla, e alla sesquialtera. Coniunto
alla unità primo termine della dupla, non ha terzo suono; congiunto ad $\frac{1}{3}$, ch'è il secondo termine
della sesquialtera, ha terzo suono $\frac{1}{2}$. Dunque il terzo suono è in potenza nella dupla, e in
atto nella sesquialtera, perchè (come suono) è lo stesso di $\frac{1}{2}$ della dupla, e di $\frac{1}{2}$ della
sesquialtera. Essendo poi comune $\frac{1}{2}$ alla dupla, e alla sesquialtera; ne avendo in se non dalla
sesquialtera il terzo suono, come $\frac{1}{2}$, restano in questo sistema fra loro inseparabili la dupla, e la
sesquialtera, perchè congiunte fra loro dal termine comune $\frac{1}{2}$ e come medesimam.^{te} e come terzo suono.
E poi si vuole considerare il solo terzo suono $\frac{1}{2}$, come termine fisico contenent.^{te} risultante dalle
ragioni formanti la serie armonica, si dirà (come si è detto sopra) che $\frac{1}{2}$ terzo suono è radice fisica
armonica, e si dirà bene. Basta, che si intenda radice fisica, come termine, nello stesso
senso, in cui deve intendersi la dupla radice potenziale, e la sesquialtera determinazione
attuale, come ragioni. Perchè essendo fisicam.^{te} inseparabile il risultato del terzo suono $\frac{1}{2}$ dalla
ragione sesquialtera, e la unità del medesimo dal secondo termine della dupla, bisogna
necessariam.^{te} intendere nello stesso concetto, e nello stesso senso il termine, e le ragioni.

due Corollari risultano da questo terzo suono. Il primo dimostrativo della vera ragione delle consonanze, e dissonanze musicali finora ignota. Vant' sistema consonante quello, che avrà una sola radice (pratticam^{te} Basso) in un solo terzo suono risultante da qualunque combinatione de' termini, o siano note musicali componenti il sistema. Vant' sistema dissonante quello, che avrà diverse radici in diversi terzi suoni risultanti dalla combinatione de' termini componenti il sistema. Insomma la unità della radice, è la ragione delle consonanze; la molteplicità delle radici è la ragione delle dissonanze. E' cosa maravigliosa, ch'essendosi osservati li tre suoni, che si sentono in una sola corda di metallo resa sopra il monocordo, cioè $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, non si abbia debito, che la unità in se stessa è di natura armonica, quando $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ è progressione armonica. Egualmente è maraviglioso, che sapendosi comunem^{te} l'effetto risultante da molte canne d'Organo rette da un solo pedale, e dispartite ne loro suoni in progressione armonica, quali tendendo li suoni tra loro diverso formano nel tutto un solo suono, non si abbia debito, che la progressione armonica riduce il diverso all'uno, e allo stesso. Troppo vi farebbe da aggiungere e per la Tromba marina, e per le Trombe da fiato, e per li corni da caccia, e per le vibrationi, e stralazioni equitemporanee delle corde, e de' pendoli, dove la natura diuina: si spiega per la unità del sistema armonico. Ma basti quanto si è detto, giacchè qui si vuol d'ingegno il fenomeno a tutt'altro, che alla musica pratica; e però si omette la spiegazione ulteriore dell'assegnata ragione delle consonanze, e dissonanze, e la soluzione delle difficoltà, che nascono in riguardo al sistema aritm^{te} consonante.

Il secondo Corollario è fitticam^{te} pratico (figura III). Se un suonatore eseguirà con perfetta intonazione l'esempio musicale assegnato, non vi sarà bisogno di Basso, perchè il terzo suono risultante sarà il vero Basso armonico. Si avverta solam^{te}, che nel sesto intervallo sopra segnato si è posto b molle alla nota d la sovrè, non perchè sia b molle, ma per segno di dover intendersi alquanto il dito dalla intonazione perfetta di d la sovrè; cotichè il ridotto intervallo sia di desquiescenza, e non di sesquialtra. Però s'indica a parte nella stessa figura la d lui intonazione, et è il mezzo armonico della sesquialtra A B. Da questo esempio pratico si deduce ad evidenza la verità del fenomeno del terzo suono, e la d lui significazione, e natura.

Esposito, spiegato, e dimostrato fitticam^{te} il terzo suono, rimane a considerare qualche proprietà forse non osservata a distanza delle due figure, quadrato, e Circolo, sopra le quali cade precisam^{te} la nuova proposizione, e l'antica difficoltà. Si porranno queste due figure a confronto, perchè fra loro inseparabili nell'assunto presente.

Proposizione prima. Figura IV.

Per comparare fra loro le due figure, quadrato circoscritto, circolo inscritto, la porzione di prima semplicità è la regione dupla radicale in BC, AC. Perchè BC equalm^{te} è lato del quadrato ABCD, e semidiametro, o sia apertura di compasso del Circolo AEC. Così AC equalm^{te} è diagonale del quadrato, e corda dell'arco del quadrante. Indi le tangenti comuni in ABC triangolo comune. Quando dunque si vogliano comparare fra loro le due figure nella stessa categoria, è dimostrativam^{te} necessario desumer la categoria dalle due linee comuni BC, AC; dunque dalla regione dupla radicale. Indi per corollario si ha la progressione de' fini in BO, TN, VI;

e de' fini protratti in BO, TM, VH, perchè hanno principio comune in BO; e così la progressione delle corde in AO, AN, AI; e delle ipotenuse in AO, AM, AH, perchè hanno principio comune in AO.

Proposizione Seconda. Figura V

Dato nel Circolo per il diametro rationale: diviso qualunque fino (geom. rispetto al diametro diviso) sia protratto al lato del quadrato circoscritto. dico, che il quadrato del tutto dal fino sarà medio armonico, il quadrato del tutto dal fino protratto sarà medio aritmetico della ragione astratta, in cui concretamente si è diviso il diametro. Sia AB 10, di cui AC 3, CB 7. Sarà diviso il diametro AB nella ragione concreta 3, 7. Il quadrato di AC sarà 9, di CB 49, del fino CD 21, del fino protratto GE (metà del diametro) 25. Ma data in astratto la proporzione geom. discreta della ragione 3, 7, li quattro termini sono 15, 21, 25, 35, de quali 21 è mezzo armonico, 25 mezzo aritmetico della suddetta ragione; e sono eguali a due quadrati, 21 del fino, 25 del fino protratto. Dunque etc.

Sia lo stesso AB 14, di cui AF 5, FB 9. Il quadrato di AF sarà 25, di BF 81, di FG fino 45, di FH fino protratto 49. Ma data la proporzione geom. discreta di 5, 9, li quattro termini sono 35, 45, 49, 63, de quali 45 è mezzo armonico, 49 mezzo aritmetico della suddetta ragione; e sono eguali a due quadrati, 45 del fino, 49 del fino protratto. Dunque etc.

Proposizione Terza. Figura VI

Dato qualunque Corda nel Circolo condotta per divisione rationale del diametro dal suo fino, e dal punto comune A; data qualunque ipotenusa condotta dallo stesso fino protratto al lato del quadrato circoscritto, e dallo stesso punto Comune A, il quadrato della corda sarà mezzo armonico, il quadrato della ipotenusa sarà mezzo contrarmonico della ragione maggiore immediata aritmetica di quella ragione, in cui si è diviso il diametro, intesa astratta. Come sopra. Sia il diametro AB 14, di cui AH 5, HB 9. Sarà 25 il quadrato di AH, 81 di HB; e in conseguenza 45 di HC fino. Sommati li due quadrati 25, 81, sarà 70 il quadrato della Corda AG, ipotenusa del triangolo rettangolo AHG. Il quadrato di HE fino protratto, e però eguale alla metà del diametro, sarà 49, quale sommato col quadrato di AH 25, lato comune del triangolo AHG e del triangolo AHE, sarà 74 il quadrato della ipotenusa AE. Dunque in numeri primi il quadrato di AG 35, di AE 37. Ma data la proporzione geom. discreta di 5, 7, ragione maggiore immediata aritmetica della ragione 5, 9, in cui si è diviso il diametro, li cinque termini sono 30, 35, 36, 37, 42, de quali 35 è mezzo armonico, 37 mezzo contrarmonico, eguali alli due quadrati di AG 35, di AE 37. Dunque etc.

Nello stesso diametro AB 14 sia AI 3, IB 11; sarà 9 il quadrato di AI, 121 il quadrato di BI; e in conseguenza 33 di DI fino. Sommati li due quadrati 9, 121, sarà 130 il quadrato della corda AD ipotenusa del triangolo rettangolo AID. Il quadrato di FI fino protratto, metà del diametro, sarà 49, quale sommato col quadrato di AI 9, lato comune de due triangoli, sarà 58 il quadrato della ipotenusa AF. Dunque in numeri primi il quadrato di AD 29, di AF 29. Ma data la proporzione geom. discreta di 3, 7, ragione maggiore immediata aritmetica della ragione 3, 11, in cui si è diviso il diametro, li cinque termini sono 15, 21, 25, 29, 35, de quali 21 è mezzo armonico, 29 mezzo contrarmonico, eguali a due quadrati di AD 21, di AF 29. Dunque etc.

riducendo il finore dimostrato a sistema progressivo, si trova, che diviso armoniam^{te}: il diametro AM
 in $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc., li quadrati de' seni, e delle corde del Circolo sono tutti mezzi armonici delle rispettive
 ragioni: li quadrati de' seni protatti sono tutti mezzi aritmetici; e delle ipotenuse de' triangoli
 dedotti dal seno protatto sono tutti mezzi controarmonici delle stesse rispettive ragioni.
 Le due progressioni, che si rilevano, sono, la moltiplice di prima semplicità, $1, 2, 1, 3, 1, 4$ etc.:
 di questa progressione sono mezzi li due quadrati rispettivi de' seni del Circolo, e de' seni protatti.
 Perché diviso il diametro AM nella ragione $1, 2$, in $A\frac{1}{2}, M\frac{1}{2}$, si trova il quadrato del seno $C\frac{1}{2}$
 Come 8, del seno protatto $\frac{1}{2}C$ Come 9. Ma 8 mezzo armonico, 9 mezzo aritmetico della dupla
 geom^{ica} discreta 6, 8, 9, 12. dunque etc.: diviso il diametro AM nella ragione $1, 3$, in $A\frac{1}{3}, M\frac{1}{3}$,
 si trova il quadrato del seno $D\frac{1}{3}$ Come 3, del seno protatto $\frac{1}{3}C$ Come 4. Ma 3 mezzo armonico,
 4 mezzo aritm^{ico}: della tripla geom^{ica} discreta 2, 3, 4, 6; dunque etc.; e così per progressione infinita.
 La seconda progressione, che si rileva, è di semplicità minore, perché comincia da $2, 3; 2, 4;$
 $2, 5; 2, 6$ etc.: di questa progressione sono mezzi li due quadrati rispettivi delle corde del Circolo,
 e delle ipotenuse de' triangoli dedotti dal seno protatto. Perché diviso il diametro AM nella ragione
 $1, 2$, Come Sopra, si trova il quadrato della corda AG Come 12, della ipotenusa AC Come 13.
 Ma 12 è mezzo armonico, 13 mezzo controarm^{ico}: della ragione maggiore diminuita aritmetica $2, 3$
 della dupla $2, 4$, (perché $2, 3, 4$) ridotta a proporzione geom^{ica} discreta in 20, 24, 25, 26, 30,
 di cui 24 mezzo armonico, 26 mezzo controarm^{ico}: in numeri primi 12, 13, e però eguali; dunque etc.:
 diviso il diametro AM nella ragione $1, 3$, Come Sopra, si trova il quadrato della corda AD Come 8,
 della ipotenusa AD Come 10. Ma 8 mezzo armonico, 10 mezzo controarm^{ico}: della ragione maggiore
 diminuita aritm^{ica} $1, 2$, della tripla $1, 3$ (perché $1, 2, 3$) ridotta a proporzione geom^{ica} discreta
 in 6, 8, 9, 10, 12, di cui 8 mezzo armonico, 10 mezzo controarm^{ico}: e però eguali; dunque etc.:
 e così per progressione infinita.
 Dunque comparate fra loro le due figure, quadrato circoscritto, Circolo inscritto in quel rispetto, in cui
 convergono fra loro per posizione di prima semplicità, si trova il quadrato secondo le due progressioni
 variant^{es}: aritmetico, e controarmonico; il Circolo costantem^{te}: armonico. E ciò non già in forza
 del diametro AM come armoniam^{te}: diviso, ma in forza delle proposizioni seconda, e terza
 nelle quali la divisione del diametro è arbitraria, e indipendente da progressione. Anzi il
 diametro AM, come armoniam^{te}: diviso, è conseguenza, e corollario delle due proposizioni suddette.
 Perché trattandosi nelle medesime il Circolo inscritto costantem^{te}: armonico a confronto del quadrato
 circoscritto, ne viene per corollario, che il diametro deva esser diviso per la progressione
 armonica, ch'è la natura, e proprietà del Circolo scoperta e dimostrata. Il corollario è
 chiar^{mo}: che si osserva, che li quadrati in sen^o di AM diametro, e delle corde AB, AC, AD etc.:
 formano la progressione armonica $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ etc.: Ma eccettuati li due quadrati di AM,
 e di AB (ragion dupla dimostrata principio universale, e però comune alle due figure),
 li quadrati di AG, AD etc. si sono dimostrati mezzi armonici della progressione $2, 3; 2, 4$, etc.;
 e in conseguenza sono prima mezzi armonici di quella stessa progressione armonica. Dunque
 la progressione armonica è corollario, e conseguenza de' mezzi suddetti rispettivi alla due
 figure fra loro comparate.

Ma in ragaglio alle due dedotte progressioni si oppone, che la deduzione delle medesime è bensì in categoria di ragioni, ma non in categoria di quantità rispetto alle date divisioni del diametro. Perché per esempio nella proporzione seconda si è diviso il diametro AB in 10, di cui AC 3, GB 7. Indi si è dedotto il seno GD; poi si è comparato il quadrato del seno C. Dal quadrato del seno protetto GE, nelli due termini 21, 25, de quali si è trovato 21 mezzo armonico, 25 mezzo aritmetico della ragione 15, 35, eguale alla ragione 3, 7, in cui si è diviso il diametro AB. Tutto vero nella ragione, nulla di vero nella quantità. Perché il diametro AB è 10 Sommo di 3, 7. Ma la somma di 15, 35, è 50, dunque è vera la ragione assegnata, non è vera la quantità assegnata. Dunque parallelismo così nella seconda, come nelle seguenti proposizioni, nelle quali la quantità data nella divisione del diametro è diversa dalla quantità dimostrata nelle ragioni. La opposizione sarebbe vera, se la proposizione seconda non dicesse, che li due quadrati dedotti dal seno, e dal seno protetto avranno medietà armonica il primo, aritmetica il secondo della ragione astratta, in cui concretar si è diviso il diametro. Si è dunque inteso di proporre la ragione eguale, e non la quantità. Ma perché li termini adoprati di ragione astratta, e di ragione concreta, e il non nominarli la quantità in categoria comune, può diffidare la intelligenza delle proposizioni, e dimostrazioni assegnate, si vogliono la suddetta opposizione in due modi; cioè nel modo della scienza delle proporzioni, e si intenderà cosa qui si vuol dire per ragione astratta, e concreta; e nel modo appresso a poco comune (ma che insegnerà molto di più), e si vedrà qual è la comune categoria di quantità.

Proposizione Quinta

Figura VIII

Per ridurre a comune categoria di quantità le parti del diametro, e li seni dedotti, sia 120 il diametro AM, diviso per la serie armonica in $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$.

Sani $A \frac{1}{2}$ 60	Vara $\frac{1}{2}$ M 60	Vara il quadrato di $B \frac{1}{2}$ 3600
$A \frac{1}{3}$ 40	$\frac{1}{3}$ M 80	del seno $G \frac{1}{3}$ 3200
$A \frac{1}{4}$ 30	$\frac{1}{4}$ M 90	del seno $D \frac{1}{4}$ 2700
$A \frac{1}{5}$ 24	$\frac{1}{5}$ M 96	del seno $E \frac{1}{5}$ 2304
$A \frac{1}{6}$ 20	$\frac{1}{6}$ M 100	del seno $F \frac{1}{6}$ 2000

Dunque la progressione de quadrati de seni nella stessa categoria di quantità è in numeri primi 900, 800, 675, 576, 500. Le ragioni formate da questa progressione sono

$\frac{900}{800}$ come 9 a 8
 $\frac{800}{675}$ come 32 a 27
 $\frac{675}{576}$ come 75 a 64
 $\frac{576}{500}$ come 144 a 125

Queste appaiono fuori di categoria, e di serie, ma non lo sono. E si vuole, ne loro principj, si trova, che

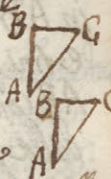
di 1 per 3, 3	di 3 per 3, 9	di Radice 2, 4	di 2 per 4, 8	— 9, 8, Come 900, 800.
di 2 per 4, 8	di 4 per 8, 32	di Rg 3, 9	di 3 per 9, 27	— 32, 27, Come 800, 675.
di 3 per 5, 25	di 5 per 15, 75	di Rg 4, 16	di 4 per 16, 64	— 75, 64, Come 675, 576.
di 4 per 6, 24	di 6 per 24, 144	di Rg 5, 25	di 5 per 25, 125	— 144, 125, Come 576, 500.

dunque la serie delle forme delle suddette ragioni è 1, 2, 3. 2, 3, 4. 3, 4, 5. 4, 5, 6. Perchè dalli estremi
 1, 3. 2, 4. 3, 5. 4, 6. si sono detti li termini 9, 32, 75, 144; e da cuchi de' mezzi 2, 3, 4, 5,
 li termini 8, 27, 64, 125. dunque la quantità, ch'è in categoria, si riduce nelle ragioni; e le ragioni
 nella serie delle forme astratte dalla quantità, d'era in categoria. Ciò sia per dimostrare in
 genere, che la categoria della quantità dipende dalle ragioni, e le ragioni dalla categoria delle
 forme: ragioni anch'esse, ma a priori, e astratte. In conseguenza nulla importando la categoria
 di quantità, tutto importando la categoria delle forme; e le due dette progressioni essendo in tal
 categoria, cade la opposizione della diversità della quantità, e restano le assegnate dimostrazioni in
 tutta la loro forza, ch'è quanto si è voluto dimostrare nel modo della scienza delle proporzioni.

Ma per sciogliere la suddetta opposizione nel secondo modo, in cui si potrà convenire d'intelligenza comune,
 si osservi, che la progressione moltiplice 1 a 1, 1 a 2, 1 a 3 etc. debba da fini, e da fini provati
 (proposizione quarta, figura VII) ha il suo principio ne due semidiametri $B\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}C$, quali convergono
 tra loro nella formatione del semiquadrato, o sia triangolo rettangolo $A\frac{1}{2}B$ (riportando $\frac{1}{2}C$ in $A\frac{1}{2}$ eguali)
 per la ipotenusa AB , equalm^{te} diagonale del quadrato $AEB\frac{1}{2}$, e corda dell'arco ADB ; et equalm^{te}
 radice di $\frac{1}{2}$ nella serie radicale armonica di AM , AB , AC , AD etc. ricordandosi sempre, che in $\frac{1}{2}$ sta
 fisso, e costante il terzo suono nella serie armonica.

Sia dunque (figura VIII) il diametro AM 120. e a raguallo di categoria di quantità assegnati li
 quadrati de' fini, e de' fini provati, si assegnino le ragioni, di cui si sono dimostrati mezzi. Sarà tutta
 la serie

estremi		Sini	Sino provato	estremi	ragioni
2400	$C\frac{1}{2}$	3200 ^{mezzi}	3600 $\frac{1}{2}B$	4800	Come 1 a 2
1800	$D\frac{1}{4}$	2700	3600	5400	Come 1 a 3
1440	$E\frac{1}{5}$	2304	3600	5760	Come 1 a 4
1200	$F\frac{1}{6}$	2000	3600	6000	Come 1 a 5

Si estremi 2400, 4800; 1800, 5400 etc. (quali s'intendono tutti quadrati) convergono equalm^{te} nella
 somma 7200. Ma il quadrato del diametro AM 120 è 14400, del semidiametro $A\frac{1}{2}B$ è 3600,
 e 7200 è medio prop^{te} tra 3600, 14400. dunque la radice del quadrato 7200 è AB media
 prop^{te} tra AM , $A\frac{1}{2}$. dunque li mezzi dimostrati convergono in categoria di quantità rispetto alle
 ragioni, di cui sono mezzi, nella diagonale AB , il di cui quadrato è 7200. dunque formata una
 serie di triangoli, li di cui lati contengano la ragione degli estremi della serie sopra esposta, la
 loro ipotenusa sarà costante: la diagonale AB come ipotenusa comune. Perchè
 nel primo triangolo sia BC radice di 2400, AB radice di 4800, sarà la ipotenusa AC rad. di 7200.
 nel secondo triangolo sia BC 1800, AB 5400, sarà la ipotenusa AC 7200, etc. in infinitum. 
 dunque il principio a priori di questa serie è la progressione armonica, e le differenze
 armoniche sommate nel modo seguente. data in numero la progressione armonica fino alla
 duppla, sarà 60 30 20 15 12 10.

L'armonia le differenze 30 10 5 3 2.
 Essendo la duppla 60, 30, come principio potenziale del sistema, da cui non si ha terzo
 suono, sarà principio attuale, e determinazione fisica del sistema nel terzo suono il termine 20

l'equilitero a 30, come già si è dimostrato. Ma nelle differenze, quali nel sistema fisico arm.
 sono li minimi componenti fisici (verità, che si rileverà a suo tempo dimostrando: Esprimam.
 nel sistema intero, e che presentem: non derogar a quanto si è dimostrato, o si dimostrerà, il
 supposto) il principio concreto è il primo termine 30, quale sommato al secondo termine 10,
 sarà 40, a cui sommato il terzo termine 5, sarà 45, a cui sommato il quarto termine 3, sarà 48,
 a cui sommato il quinto termine 2, sarà 50; e però la serie delle differenze sommate, sarà
 40, 45, 48, 50. Dunque la serie delle ragioni armoniche 20, 15, 12, 10 alla serie
 delle differenze sommate 40, 45, 48, 50, sarà come la moltiplice, 1 a 2, 1 a 3, 1 a 4, 1 a 5.
 Perché

serie delle ragioni	serie delle differenze sommate
20	40 come 1 a 2
15	45 come 1 a 3
12	48 come 1 a 4
10	50 come 1 a 5

Dunque a ragaglio formati li stessi triangoli, in cui siano lati le radici della ragione 20, 40,
 sarà ipotenusa Re. 60; lati Re. 15, Re. 45, ipotenusa Re. 60; lati Re. 12, Re. 48, ipotenusa
 Re. 60; lati Re. 10, Re. 50, ipotenusa Re. 60. Dunque Re. 60 ipotenusa comune della
 infinita serie delle ragioni, e differenze armoniche sommate.

Dunque a ragaglio componendo la prima serie con la seconda per moltiplicazione del termine 60
 (duplicando la prima, e la seconda) si avrà in prodotto la serie delle ragioni sopra
 demonstrate, estremi de. fini, e fini provati, come mezzi rispettivi armonici, e aritmetici.

Perché	40 per 60 — 2400	80 per 60 — 4800
	30 per 60 — 1800	90 per 60 — 5400
	24 per 60 — 1440	96 per 60 — 5760
	20 per 60 — 1200	100 per 60 — 6000

e 40, 30, 24, 20, come 20, 15, 12, 10. egualm: 80, 90, 96, 100, come 40, 45, 48, 50.

Dunque essendo identica la serie delle ragioni 2400, 4800; 1800, 5400 etc. alla serie dedotta
 dalla progressione armonica, e dalle differenze arm. sommate 20, 40; 15, 45 etc.; e in
 conseguenza identiche le due ipotenuse rispettive Re. 2400, Re. 60, resta dimostrato
 in AB la linea, sopra cui è fondata la progressione moltiplice formata da mezzi (fini,
 e fini provati) e dagli estremi nella stessa categoria di quantità. E di più resta dimostrato
 AB come ipotenusa comune de' triangoli composti ne loro lati dalla serie armonica, e
 dalla serie delle differenze armoniche sommate. Per altro è chiaro, che così doveva
 risultare. Perché comparando le due figure, Quadrato, e Circolo in rispetto alle due
 unità $B\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}B$, come principj della progressione moltiplice, quali convergono tra loro
 nella ipotenusa AB del triangolo rettangolo $A\frac{1}{2}B$, di necessaria conseguenza nella linea
 AB doveva trovarsi la comune categoria di quantità delle ragioni formanti gli estremi
 della stessa progressione moltiplice.

Dunque, (per Corollario) dato qualsivoglia arco nel Cerchio, e dato a riguardo il suo perpendicolo, la ragione
 includente li due mezzj formati dalli quadrati de due seni di Novana Costante in infinito nella linea AB.
 Ma così dati due seni ad arbitrio nel sistema armonico, si Novana rapporto $\frac{1}{2}$ costante in
 infinito; e di $\frac{1}{2}$ è radice la linea AB, equalm^{te} dupla radicale col diametro AM (e però
 principio universale in qualunque rispetto, arit.^o, geom.^o, aritm.^o); equalm^{te} prima corda dell'arco
 ADCB, e però in rispetto sesquialtero radicale alla corda AC (e la ragione sesquialtera
 principio fisico del rapporto, e ragione determinante il sistema armonico), e principio primo
 della progressione di minor semplicità, dedotta (proposizione quarta, figura VII) da mezzj
 armonici delle ragioni 12, 3; 24, 1; 25 etc., quali mezzj si convertono identicam^{te} nella progressione
 radicale armonica (figura VIII) AB, AC, AD, AE etc. Dunque si è Novana la ragione dimostrativa
 della ragione, per cui il rapporto radicale fisico del sistema armonico sta costante in infinito
 in $\frac{1}{2}$; ch'è quel molto di più, che viene insegnato dalla soluzione della opposizione, come si è
 sopra accennato.

Proseguendo la soluzione rispetto alla progressione seconda (proposizione quinta, figura VIII) dedotta
 dalle corde AB, AC, AD etc.; e dalle ipotenuse Ab, Ac, Ad etc. si ridotta la progressione a comune
 categoria di quantità. Dato il diametro AM 120, come sopra, sarà tutta la serie de quadrati

estremi	Corde	mezzj	Ipotenuse	estremi
	AB 7200		AB 7200	
4000	AC 4800		Ac 5200	6000 come 12 a 3
2700	AD 3600		Ad 4500	5400 come 12 a 4
2016	AE 2880		Ae 4176	5040 come 12 a 5
1600	AF 2400		Af 4000	4800 come 12 a 6

Gli estremi 4000, 6000; 2700, 5400, etc. non convergono nella somma; ne possono convenire, perchè
 il calcolo è rispetto Contrarmonico: essendoti dimostrato che le ipotenuse Ab, Ac etc. mezzj aritmo armonici
 delle rispettive ragioni. Perchè poi il calcolo contrarmonico, che corrisponde alla quantità negativa
 dell'Algebra, non possa convenire nelle somme, si pigliava a suo tempo nella scienza indiana
 (e si spiegava fisicam^{te}); giacchè nulla ci importa al presente bisogno. Ma intanto siano le
 somme degli estremi

4000	2700	2016	1600
6000	5400	5040	4800
10000	8100	7056	6400

La indicazione dimostrativa del principio di questa progressione formata dalle somme de quadrati
 è AB, Ab, li di cui quadrati formano la somma $\frac{7200^2}{14400}$. Perchè la somma risultata 10000,
 8100, 7056, 6400, hanno tutte radice quadrata, cioè 100 di 10000; 90 di 8100; 84 di 7056;
 80 di 6400. Ma equalm^{te} la somma 14400 ha radice quadrata, et è 120; dunque la indicazione
 dimostrativa del principio di questa progressione è in AB, Ab, come quadrati. Ma il diametro
 AM è 120. Dunque il principio radicale di questa progressione è nel diametro AM; e la
 serie radicale sarà 120, 100, 90, 84, 80. Dunque dal diametro AM sottratta la ragione
 sesquiquinta, ch'è tra 120, 100, la linea de minima 100, sarà la ipotenusa del triangolo

Continente, ne fur due lati le radici della ragione 4000, 6000. dal diametro AM, sottratta la ragione
 Sesquiterza, di e' tra 120, 90, la linea, che rimarrà 90, sarà la ipotenusa del triangolo continente
 ne fur due lati le radici della ragione 2700, 5400. dal diametro AM, sottratta la ragione super
 3 part: 7, di e' tra 120, 84, la linea, che rimarrà 84, sarà la ipotenusa del triangolo continente
 ne fur due lati le radici della ragione 2016, 5040. dal diametro AM, sottratta la ragione
 Sesquialtera, di e' tra 120, 80, la linea, che rimarrà 80, sarà la ipotenusa del triangolo continente
 ne fur due lati le radici della ragione 1600, 4800. dunque nel diametro AM diminuito per
 la serie suddetta resta dimostrata la linea, sopra cui è fondata la seconda progressione
 debita da merzi armonici, e controarmonici nella stessa categoria di quantità; di e' quanto
 si doveva dimostrare nel modo comune ad intelligenza comune per scioglier la opposizione.
 Ma non basta. si vuole, e si deve sapere, da qual principio derivi la progressione delle
 radici 120, 100, 90, 84, 80. Il principio da cui procede questa serie, è la ragione dupla, come
 principio universale. La dimostrazione è patente nelli stessi termini, perché nota la dupla
 geom: discreta, in cui siano assegnati tutti li merzi, sarà formata identica: la serie radicale
 suddetta. La dupla geom: discreta, è 6, 8, 9, 10, 12; ridotti li termini, sarà 12, 10, 9, 8, 6.
 ommesso l'estremo 6, e a tutti li altri termini aggiunto il zero, saranno 120, 100, 90, 80. dunque
 eguali al primo, secondo, terzo, e quinto termine della serie suddetta. Rimane il quarto termine
 della serie, 84. Ma nella dupla geom: discreta essendosi trovato il mezzo contrarim: 100 eguale
 al secondo termine della serie; il mezzo aritm: 90 eguale al terzo termine della serie; il mezzo
 armonico 80 eguale al quinto termine della serie; e nella dupla geom: discreta non essendo
 assegnato il mezzo geometrico, quale dimostravim: cade tra il mezzo aritmico, e il mezzo armonico,
 che vuol dire nel sito identico, dove nella serie si trova il termine 84, quando la dimostrazione
 sia vera, dovrà trovarsi 84 qual mezzo geometrico della dupla 120, 60. Ma si conviene esser
 inespugnabile con numeri razionali la media prop: tra 120, 60; in numeri primi 2, 1; perché è
 lo stesso, che la diagonale, e il lato del quadrato. Ma vi è una scienza, che supplisce dimostravim:
 con numeri razionali alla espressione della quantità irrazionale, e supplisce nel modo seguente:
 data la subdupla 1, 2, e divisa aritmetica: in 2, 3, 4, il divisore 3 formerà due regioni
 con li estremi: subesquialte tra 2, 3: subesquiterza 3, 4. Sommati li termini formanti le suddette
 regioni, dico, che li termini risultati dalle due somme, saranno radici geom: incomplete della
 subdupla, indicanti dimostravim: le radici geom: complete, e suppletenti alle medesime.
 Perché di 2, 3, somma 5; di 3, 4, somma 7. Ma 5 per 5 = 25; 7 per 7 = 49; dunque o' eccedere
 25, o' mancare 49, e in conseguenza o' 5 sarà radice crescente, o' 7 radice mancante della
 ragion dupla. Ma data questa prima posizione imperfetta, e incompleta delle radici 5, 7,
 il loro progresso per somma, e per moltiplica verso il complemento, e perfezione di quantità è
 infinito. Dunque la prima posizione benchè imperfetta, e incompleta, è di vere radici
 che il loro progresso sia tale, si dimostra. Alle radici 5, 7, si aggiunga il terzo termine
 10, cosicché 7 indichi la media prop: della ragion dupla 5, 10. Si sommino tra loro
 5, 7, sarà 12 la somma: 7, 10, sarà 17 la somma; e alli due termini risultati 12, 17,

12

Si aggiunga il terzo termine 24. Moltiplicato in se stesso 17 indicante la media prop^{ta} eccedeva
 li estremi 12, 24, moltiplicati tra loro della ragione 288, 288; come 7 moltiplicato in se stesso
 mancava dalli estremi 5, 10, moltiplicati tra loro della ragione 49, 50. Ma 17 si sarà
 approssimato al vero tanto di più, quanto è minor ragione 288, 289, della ragione 49, 50.
 Si sommino nello stesso modo li tre termini 12, 17, 24; saranno le due somme 29, 41, a cui
 si aggiunga il terzo termine 58. Moltiplicato in se stesso 41, come medio prop^{ta}, mancava dalli
 estremi 29, 58, moltiplicati tra loro della ragione 1681, 1682: molto minore della ragione
 288, 289, e però molto più prossima al vero. Sommati nello stesso modo 29, 41, 58, di cui
 le somme saranno 70, 99, e aggiunto il terzo termine 140, moltiplicato 99 in se stesso eccedeva
 li estremi 70, 140, moltiplicati tra loro della ragione 9801, 9800, molto minore della ragione
 1681, 1682, e però molto più prossima al vero. e così per progressione infinita di somme.
 Adattato questo modo di calcolo ad una data linea retta AB, rispetto alle prime radici 5, 7,
 la di cui somma è 12, si supponi la linea AB divisa in dodici parti eguali. Rispetto alle
 seconde radici 12, 17, la di cui somma è 29, si supponi AB divisa in parti 29. Rispetto alle
 terze radici 29, 41, la di cui somma è 70, si supponi AB divisa in parti 70. Rispetto alle
 quarte 70, 99, la di cui somma è 169, si supponi AB divisa in parti 169; e così in infinito.
 2^o stesso, e più spediente: per moltiplicare. Dati li tre termini 5, 7, 10, si moltiplichino $\begin{array}{r} 5 \\ 7 \\ 10 \end{array}$

data la medietà aritm^{ica} tra 49, 50, sarà 99. Duplicati li estremi 35, 70, $\begin{array}{r} 35 \\ 70 \\ 140 \end{array}$
 in 70, 140, sarà 99 qual medio prop^{ta}, perchè 90 per 90, 9801: 70 per 120, 9800: eccesso della
 unità nella radice 99. Ma essendo racchiuso 99 dalli due termini 98, 100, quali moltiplicati tra loro
 producono completam^{te}: 9800, e 98, 100, essendo la ragione formata da mezzo 49, 50 (duplicati in
 98, 100), quali formano il centro della prop^{ta} geom^{ica} discreta 35, 49, 50, 70, e però 99
 indicazione dimostrativa della suddetta ragione 49, 50, di cui è mezzo inseparabile.
 Dunque 99 è per se mezzo geom^{ico} incompleto di quantità, completo di ragione, perchè è
 inseparabile dalla indicazione della ragione, che forma il centro completo della prop^{ta} geom^{ica}
 discreta.

Qualm^{te} dati li tre termini 70, 99, 140, si moltiplichino $\begin{array}{r} 70 \\ 99 \\ 140 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 6930, 9800, 9801, 13860. \end{array}$

data la medietà aritm^{ica} tra 9800, 9801, sarà 19601. Duplicati li estremi 6930, 13860, in
 13860, 27720, sarà 19601 qual media prop^{ta}ionale. Perchè 19601 per 19601, 384199201;
 13860 per 27720, 384199200, vi sarà l'eccesso della unità nel prodotto della radice 19601.
 Ma questa è racchiusa dalli due termini 19600, 19602, quali moltiplicati tra loro producono
 completam^{te}: 384199200; e la ragione formata dalli due termini 19600, 19602, è la ragione
 9800, 9801, centro della prop^{ta} geom^{ica} discreta 6930, 9800, 9801, 13860. Dunque la
 radice 19601 (o sia mezzo) è completa di ragione, debbono incompleta di quantità etc.
 Dunque li dati tre termini sono vere radici per l'effetto, e vere radici per la ragione, perchè
 sono debite della somma de tre termini 2, 3, 4, formanti le due ragioni 2, 3; 3, 4, componenti

la dupla. A maggior ragione la proposizione, e la dimostrazione è vera universale; data qualunque
ragione semplice della serie aritmetica. Indi ne viene, che nell'Arithmetica antica (di cui nulla
si può di sà presentemente) li numeri impari si chiamavano numeri maschi, perchè radici, e però
produttori. Data la serie aritmetica 1, 2, 3, 4, etc.; e sommati per serie li termini di due in due
 $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$ etc.; le somme non solam^{te} saranno tutte numeri impari, il che è chiaro, e noto;
ma di più saranno tutte radici rispettive delle ragioni sommate: 3, 5, della tripla 1, 3;
5, 7, della dupla 2, 4; 7, 9, della super 2 part: 3, 3, 5; e così in infinito. E quando dal
prodotto di queste radici si sottragga la unità, como tutte radici complete; perchè di 3 per 3, 9
di 5 per 5, 25. sottratta a due prodotti la unità, resta 8, 24. Ma 8 a 24, come 1 a 3; dunque;
e così in infinito. Ciò dimostrando in forza di tal scienza (per se vastissima), perchè così
richiede il presente bisogno, dico, che il termine 84 è radice dupla in risguardo a 120,
primo termine della serie radicale. Perchè 120, 84, in numeri primi, come 10, 7. Ma 10, 7,
demonstrano radici duple; dunque etc. dunque 84 qual mezzo geom^o tra 90, 80. dunque
la serie radicale 120, 100, 90, 84, 80, è composta d'un estremo, e da quattro mezzi della
dupla: non più, non meno, perchè quattro sono li mezzi semplici possibili, controarmonico,
aritmetico, geometrico, armonico; e però 120 estremo duplo, 100 mezzo controarmonico, 90 mezzo
aritmetico, 84 mezzo geometrico, 80 mezzo armonico. (si avverta, che ad arte la esposizione
di queste due progressioni non si è posta in numeri primi, perchè si vedano compatire in
risultato le stesse cifre della dupla geom^o: discreta 12, 10, 9, 8, a cui sia aggiunto il zero, e
tra 90, 80 sia supposto 84). Ma se la serie dimostrata non è che la dupla con tutti li suoi
mezzi possibili, resta dunque dimostrato, che il principio, da cui procede la dubbia serie, è
la ragione dupla, come principio universale.

Si oppone, che il termine 84 è chiamato impropriam^{te} geometrico, perchè contro la intelligenza comune,
e contro la verità stessa: intendendosi mezzo geom^o: quello, che moltiplicato in se stesso, produce
completam^{te} quanto li estremi moltiplicati tra loro. Verissimo. Ma si lascia ad arbitrio de' sign^{ificanti}
Matematici il nome, che si deve dare al termine 84 dopo aver considerato, che di comune intelli-
genza non si possono non esser possibili, che non quattro mezzi semplici di una data ragione, e sona
li sopra nominati: che nella dimostrazione assegnata si trovano dimostrativam^{te}: veni quattro
termini, l'estremo duplo, il mezzo controarm^o: il mezzo aritm^o: il mezzo arm^o: e però non vi
manca, che non il mezzo geom^o: per compire il numero de' quattro mezzi possibili. che questo
mezzo già determinato in 84 nella serie delle radici, in forza di un'altra scienza, e con la
prova di una progressione infinita è indicato dimostrativam^{te}: di natura geometrica.

Considerato tutto ciò, vedranno, ch'è forza chiamarlo mezzo geom^o: incompleto di quantità, completo
di ragione. Incompleto di quantità, perchè manca, o eccede sempre nella moltiplica di se stesso;
Completo di ragione, perchè è inseparabile dalla ragione, che forma il centro geom^o: della
proporzione discreta, di cui è mezzo. Essendo la ragione formante il centro geometricam^{te} completo,
e questo mezzo inseparabile da questa ragione, perchè sempre da questa racchiuso, sarà
completo di ragione. Vedranno anzi di più, che la dimostrazione fondata sopra li quattro mezzi,
tra quali deve trovarsi 84 come mezzo geom^o: dimostra per avvalorio la verità di quella scienza,

da cui 84 vien dimostrato qual mezzo geometrico. Si rifletta bene, e si vedrà, ch'è così.

Un important^{no}: Corollario si deduce dalla data dimostrazione del principio, da cui deriva la serie radicale 120, 100, 90, 84, 80, radici di 14400, 10000, 8100, 7056, 6400. Che il sistema fisico armonico ha la sua estensione integrale, o sia compimento di periodo nella Sestupla in cui fu punto fermo. Il Corollario è chiaro, osservando, che la progressione de' mezzi detti (figura VIII) arriva fino alla Sestupla, e non più. Cioè il diametro AM si è diviso da $\frac{1}{2}$ sino a $\frac{1}{8}$ per dedurre li mezzi suddetti. Ma tutta questa progressione non solam^{te} si risolve nella dupla, ch'è il suo principio in genere; ma di più si risolve ne' mezzi stessi della dupla, quali altro non sono, che li suoi centri semplici rispettivi; e nel termine 80, ch'è l'armonico, sono consumati tutti li mezzi possibili della dupla. Dunque corrispondendo $\frac{1}{8}$ del diametro alla radice 80 in vaguaglio a mezzi detti, nella Sestupla il sistema fisico arm^o ha la sua integrale estensione, o sia compimento di periodo, e punto fermo.

Lo stesso si deduce (figura IX) inscrivendo il quadrato ABCD dentro il Circolo. La progressione Sestupla $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$ resta dentro il quadrato inscritto. Ma il quadrato inscritto è in ragione di dupla col circonscritto. Dunque la Sestupla progressione è intrinsecam^{te} contenuta nella ragione di dupla. E di più, per esempio $\frac{1}{3}$, sarà fuori della ragione, perché fuori del quadrato inscritto. Questo è un meccanismo più che una dimostrazione. Ma nel sistema intero si vedrà quanto significati, e fin dove arrivare.

Lo stesso fisicam^{te} si deduce, riflettendo sopra una corda di metallo tesa sul Monocordo, o su l'Orghello, che ha in se stessa tre suoni, come 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. Questi tre suoni dimostrano fisicam^{te} la Sestupla progressione. Perché $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, essendo divisoni armoniche, $\frac{1}{3}$ della ragione di dupla $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$ della ragione sesquialtera $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, suppongono la Sestupla progressione. E vero che dimostrano la indivisibilità della prima ragione della progressione armonica, ch'è la dupla $1, \frac{1}{2}$. Ma questa appunto è la forza della fisica dimostrazione; Perché è degno dimostrativo che non possono esser interi li due termini $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, de non come divisoni arm^o di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e di $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$; adinti la progressione sarebbe $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}$. Ma questo è assurdo; dunque, etc. Nella Musica pratica questa proposizione è fuori di disputa: essendo tutti concordi, che nella Sestupla si converga il sistema fisico arm^o del genere ~~consonante~~ ^{consonante}: genere primo, e principale; ma questa proposizione non è stata mai dimostrata. Io è presentem^{te} per il Corollario sopra dedotto; ma vi si attenda distintam^{te}; e de ne abbia memoria, come di cosa in questo Trattato important^{issima}. E intanto questo è quel molto di più che viene insegnato dalla soluzione della prima opposizione. Si è dunque finora dimostrato, che comparate tra loro le due figure, quadrato circonscritto, Circolo inscritto, il quadrato di Nova Concord le due progressioni rispettive: Armonico, e Contrarmonico; il Circolo Costantem^{te} armonico. E nella spiegazione del terzo suono si è dimostrata la ragione di dupla principio l'universale in genere di qualunque sistema progressivo di quantità; principio, e radice potenziale in specie del sistema fisico armonico; e la ragione Sesquialtera determinativa fisica del sistema armonico nel terzo suono $\frac{1}{2}$. Ma nel presente sistema essendo inseparabile la scienza dalla esperienza, si vuol provare fisicam^{te} il Circolo di natura intrinseca armonico.

sia un Cilindro sonoro, e sarà per esempio un timpano, un tamburo. Supponi le due pelli del
 medesimo tra loro unisone, nella percussione si sentiranno due suoni; uno naturale, quello su-
 mmento, e sia *Coltaut*; un altro per consenso, et è *l'advent grave*, che forma col suono na-
 turale la ragione *sesquialtera*. Si separi dal Cilindro, o sia timpano, la ~~superiore~~ pelle o superiore,
 o inferiore, alla quale si lasci il piccolo cerchio, a cui è raccomandata. Nella percussione
 di questa si sentiranno egualm^{te} due suoni; uno sarà lo stesso *Coltaut*, ch'è il suono naturale;
 Ma l'altro, ch'è il suono di consenso, non sarà più *l'advent grave*: sarà bensì *l'advent acuto*
 con cui il suono naturale forma la ragione *sesquialtera*. Questa esperienza deve esser deli-
 gentem^{te} istituita. Se due pelli del Cilindro siano unisone, eguali, e lascie più, che si può,
 acciò il suono sia più pronto all'effetto. Il discernimento de due suoni sia esperto per distinguere e
 giudicarli. Per altro l'effetto è noto nel Cilindro, o sia timpano: non era noto nella ~~superiore~~ pelle
 separata dal Cilindro. In questa esperienza vi è una significazione di peso infinito. Perché
~~la pelle separata~~ ^{essendo per se un cerchio in piano, et avendo intrinseca ne due suoni la ragione sesquialtera}
 determinata, fisica del sistema armonico, ~~la pelle superiore~~ ^{il cerchio in conseguenza} è di natura
 intrinseca armonica. Il Cilindro all'incontro (per se un quadrato, o un rettangolo delto dal
 triangolo equilatero, che si divide in se stesso) avendo intrinseca ne due suoni la ragione *sesqui-*
terza, quale determina la dupla, a sistema aritmetico, sarà di natura intrinseca aritmetica.
 Che il quadrato sia per se aritmetico, lo dimostra la infinita serie delle proporzioni geom^{te} discrete,
 nelle quali la medietà aritm^{te} infinde delle rispettive ragioni sono tutti numeri quadrati. Or quia
 il suo centro intrinseco è *sesquialtera*, perché contenendo il quadrato in se stesso la ragione dupla
 tra il lato, e la diagonale, la divisione aritm^{te} della dupla è la ragione *sesquialtera*.
 Che il triangolo equilatero inscritto nel Circolo abbia intrinseca in se stesso la ragione *sesquialtera*,
 è comunem^{te} noto. La sua perpendicolare è al diametro, come 3 a 4: in conseguenza il
 suo lato al diametro come R_2 a R_4 . Sono due mille anni incirca, da che Archimede
 nelle sue figure, e figure di prima semplicità ha dimostrato, che fatta centro la Sfera del
 Cilindro, e cono circoscritti, la loro quantità è in progressione *sesquialtera* continua, 4, 6, 9.
 Fatto centro il cono del Cilindro, e sfera circoscritti, la loro quantità è in progressione *sesqui-*
terza continua, 9, 12, 16. Il centro rispettivo determina il progresso; se la sfera, a
 progressione *sesquialtera*, e la sfera è per se Circolo; se il cono, a progressione *sesquialtera*,
 e il cono è per se triangolo equilatero. Ecco dunque come ne suoni naturali il genere
 fisico risponde al genere dimostrativo; e come ne l'unioni di consenso, de quali si ha niuna
 o ben poca idea, si scopre e rilevi il centro (cioè il mezzo rispettivo) della ragione determi-
 nante la figura fisico sonoro.

Propositione Vesta. Figura X.

Ma perché di altra precisa idea dimostrativa del centro *sesquialtera* del quadrato, a cui fatto
 Cilindro fisico: corrisponde in *sesquialtera* il suono di consenso, sia il quadrato ABCD.
 Fatto centro D, sia per Circolo condotto G in B; fatto centro G, sia condotto D in A. dal punto
 E della intersecazione sia condotta la perpendicolare in F. dico, che EF sarà in radice

l'esquiverza al lato del quadrato. È troppo nota, e comune la demonstratione, e però si ommette. Ma
il punto principale della demonstratione si è il riflettere, che questa operatione è fatta recta
dentro la linea: non adoprandosi nella constructione, se non lo stesso lato GD nello stesso moto,
concetto, e predizione di figura, con cui si è instruita la comparisone tra quadrato, e Circolo,
(propos: prima, figura IV), e da cui (propos: quarta, figura VII) si è dedotta la progressione
multiplice di prima simplicità tra quadrato, e Circolo in $1a1, 1a2, 1a3$ &c. È chiaro, che il
principio di questa progressione $1a1$ è l'identico di figura, e di concetto alla constructione
fatta, perché è nella stessa linea GD eguale in qualunque senso alla linea $B\frac{1}{2}$ della
figura VII; Et è chiaro, che la deductione del centro radicale sesquiterzo nasce dal ragguaglio
di $1a1$ dentro lo stesso quadrante AED della figura X, e ADB della figura VII: dunque
si conclude, che della ragion dupla, in cui convergono le due figure, quadrato, e Circolo, e formano
il principio della progressione multiplice $1a1$, il centro è radicale sesquiterzo; e però prior di
natura del centro armonico radicale sesquialtero. Nulla importa, che questo centro sia espresso
nelle figure VII, VIII, perché ivi non bisogna. Ma infinitam: importa, che si sappia esser
intrinseco, e inseparabile dal quadrato nello stesso modo, e concetto, con cui nel quadrato fatto cilindro
è inseparabile il suono sesquiterzo di consenso dal suono naturale.
Adi ne viene, per corollario quanto si è già accennato, cioè che il quadrato sia prior di natura del Circolo,
come la linea retta è prior di natura della linea circolare. Ma questo lo dimostra l'apertura
di Compasso nella formatione del Circolo, e la impossibilità di formarlo senza linea retta.
Lo dimostra fidam: la natura in fenomeni infiniti; e si è dimostrato implicam: nella già
accennata deductione di un mezzo dalla data unità al termine infinito. Perché essendo 1
il termine dato, 2 il dedotto, e però il progresso essendo di $1a2$, la ragione è subdupla;
dunque principio di progresso aritmetico; dunque del quadrato. Ma il progresso di $1a\frac{1}{2}$ è
posteriore, perché 2 si cambia nella unità, 1 in $\frac{1}{2}$. Et è del Circolo dimostrato armonico,
come $1, \frac{1}{2}$ è principio di progresso armonico. dunque prior di natura il quadrato del Circolo.
La cosa è evidente nella formatione del Circolo. Non si formerà mai Circolo per apertura di
Compasso (che è il raggio) se non duplicando l'apertura del Compasso nel diametro; e in conse-
guenza formando la ragion dupla tra il raggio, e il diametro. Fatto poi unità il diametro
(omma di due raggi) questa unità è il principio della serie armonica; ma prima di esser
tale, è stato 1 nell'apertura di Compasso, 2 nel diametro, e così l'apertura di Compasso
è il dato 1 , il diametro è il dedotto 2 . dunque prima subdupla, che dupla. Ma subdupla
principio aritm:; dupla principio arm:; e il quadrato è aritmetico, il Circolo armonico. dunque
Qui si rifletta attentam: che mai il Circolo fosse quel termine infinito, che si propone con la
data unità, perché gli sia assegnato un mezzo. Non essendo assegnabile altro mezzo, se non
l'armonico; dimostrato il Circolo di natura intrinseca armonico; osservata la data unità
al termine dedotto 2 cambiati necessariam: 2 in $1, 1$ in $\frac{1}{2}$ per la formatione della
serie armonica, esser identicam: lo stesso, che nella formatione del Circolo la data aper-
tura di Compasso come 1 , al diametro dedotto come 2 , cambiati necessariam: il diametro 2

nella unità, il semidiametro 1 (apertura di compasso) in $\frac{1}{2}$ per la formatione della serie aritm.^{ca}; osservato tutto ciò, si deduca la conseguenza. La scienza presente ha la sua formula parti-
colare per dedurre questo dal mezzo della data unità col termine indefinito; e da tal formula
si ha indicatione dimostrativa, che così sia. Ma deducendosi lo stesso mezzo con la formula
Algebraica, di cui l'Autore nulla va, però vincede il giudizio della conseguenza a Professori di
Algebra, quali per altro in questo giudizio avranno debito di congiungere alla forza dimostrativa
(quale, e quanta sarà) la forza dell'assoma Metafisico, che l'effetto è della natura delle azioni
come nella scienza dimostrativa il prodotto è della natura della radice; Molto più nel caso
presente, in cui quanto si dimostra, tanto si prova fisicam^{te} vero con la esperienza alla mano.

Rispetto dunque quanto si è premesso di dimostrativo, e di fisico rispetto al terzo piano, e alle due
figure Quadrato, e Circolo, si pretende dimostrativam^{te} e fisicam^{te} assegnabile non volam^{te} la
ragione completa, in cui deve trovarsi l'apertura di compasso alla semicirconferenza, o sia
il Circolo al quadrato; ma di più la ragione, per cui così dev'essere.

Primieram^{te} si ha debito di dimostrare in forza del presente sistema ~~la ragione incompleta del semidiametro alla semicirconferenza~~
~~la ragione incompleta del semidiametro alla semicirconferenza~~ la ragione incompleta del semidiametro alla semicirconferenza.
E si dice ragione incompleta nello stesso senso, in cui si è detto, e dimostrato 17 (medietà aritm.^{ca}
tra 16, 18) medio proporzionale incompleto di quantità, completo di ragione, della dupla geom.^{ca} discreta
6, 8, 9, 12.

Principj costitutivi, e inseparabili del sistema sono dupla, e sesquialtera (demonstrato); dunque
triplo in somma, perchè sommate le due ragioni, dupla, e sesquialtera, formano la ragione tripla.
Tre specie di tripla vi sono, e nulla più; aritm.^{ca} 1, 2, 3; armonica 6, 3, 2; geom.^{ca} discreta 2, 3, 4, 6.
Essendosi dimostrato il quadrato aritm.^{co}, il Circolo aritm.^{co}, e convenienti quadrato, e Circolo nell'aper-
tura di compasso in $B\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}B$ (figure VII, VIII), come in 1 a 1 principio della progressione moltiplice,
di cui si sono dimostrati mezzi rispettivi li fini, fini, protatti etc.; e a guaglio la circonferenza dovrà
trovarsi armonica, l'apertura di compasso dovrà trovarsi aritmica, e come centro, o sia mezzo.
Dovrà trovarsi aritm.^{co}, come linea retta in proprietà di natura appartenente al quadrato (demonstrato).
Dovrà trovarsi come centro, o sia mezzo, perchè quadrato, e Circolo convergono tra loro nelle linee
rispettive, come mezzi, o centri della progressione moltiplice. Dunque come mezzi, dovranno
convenire tra loro nelle due unità, che sono il principio della progressione, con questa differenza,
che 1 appartenente al quadrato dovrà trovarsi mezzo aritm.^{co}; 1 appartenente al Circolo dovrà
trovarsi mezzo armonico, ma in linea eguali, perchè come 1 a 1; e tutto ciò dovrà verificarsi
nella tripla, perchè in questa si racchiudono li principj costitutivi del sistema.

Proposizione Vltima Figura XI

Data la tripla armonica, sarà 6, 3, 2. dunque 11 in somma; e in linea AB 12, BC 3, CD 6,
AD 11. Per dedurre il Centro, o sia mezzo aritm.^{co} della tripla nella stessa data linea AD, sia
ciascuna parte (come AQ) divisa in 14. Sarà AB 28, BC 42, CD 84, e tutto AD 154.
Il Centro geom.^{co} discreto della tripla, formato da due mezzi, aritm.^{co}, aritm.^{co}, e la ragione obsequiente,

perche' ^{aritm. aritm.} 2, 3, 4, 6. dunque sia BE 56; e pero' BC 42 a BE 56, come 3 a 4. Ma data la sesquiterza
 geom.^{ica} discreta 42, 48, 49, 56, il termine 49 e' il centro, o' sia mezzo aritmetico della ragione 42, 56.
 dunque BX 49 sara' il centro, o' sia mezzo aritm.^{ico} della ragione 42, 56. dunque BX a tutta la linea
 come 49 a 154. Ma il Circolo e' di natura intrinseca armonica, e questa si racchiude nelli due principi
 costitutivi del sistema, dupla, e sesquialtera, quali sommate, formano la tripla armonica. dunque
 la Circonferenza e' la somma della tripla armonica, qual somma essendo 154, sara' a raddoppio
 la semicirconferenza 154. Ma il centro della Circonferenza e' nell'apertura di compasso (eguale
 a $B\frac{1}{2}$), quale si deve trovare come cento, o' sia mezzo aritm.^{ico} sesquiterzo, perche' in propria di natura
 appartiene al quadrato, ch' e' aritmetico, e che dimostravansi e si sciano: sia il suo centro sesquiterzo;
 e il centro aritm.^{ico} sesquiterzo della tripla e' 49. dunque l'apertura di compasso e' 49. Ma questa,
 come mezzo, e cento aritm.^{ico} deve trovarsi come 1 a 1 ad altra linea rispettiva del Circolo, quale
 a raddoppio deve trovarsi come mezzo armonico; e di fatto si trova, che la corda AD del Circolo
 (figura VIII) e' radicale sesquiterza, e mezzo armonico tra le due corde AC, AE, ed e' eguale all'
 apertura di compasso, e pero' come 1 a 1. dunque verificandosi tutte le premesse condizioni del sistema
 rispetto al Circolo, e al quadrato, sara' vero, che l'apertura di compasso alla semicirconferenza
 si trova nella ragione incompleta di 49 a 154: in numeri primi di 7 a 22.
 Confesso si espone col numero piu' brevemente: la somma della tripla armonica 6, 3, 2, e' 11. Aggiunto il
 mezzo aritm.^{ico} alla stessa posizione 6, 3, 2, sara' la tripla geom.^{ica} discreta 6, 7, 8, 2. sommato il
 centro sesquiterzo 4, 3, sara' 7. dunque la somma del centro della tripla geom.^{ica} discreta alla somma
 della tripla armonica, come 7 a 11. Con il semidiametro $A\frac{1}{2}$ (figura VIII) ad $\frac{1}{4}$ della Circonferenza AECB.
 Ma e' stato gia' dimostrato da Archimede per poligoni inscritti, e circoscritti, che la ragione incompleta
 del diametro alla Circonferenza e' come 7 a 22; e pero' eguale alla dedotta dal presente sistema.
 dunque vera la dimostrazione del sistema, e in questa confermata vere tutte le antecedenti.
 si oppone, che la relazione della corda AD (figura VIII) al semidiametro, o' sia apertura di compasso
 $\frac{1}{2} 6$, come 1 a 1, non e' in alcuna categoria delle due progressioni moltiplici gia' demonstrate. Perche' la
 prima progressione si e' dedotta dal raddoppio de' fini del Circolo, e de' fini propriati. La seconda si e' dedotta
 dal raddoppio delle corde del Circolo, e delle ipotenuse de' triangoli etc.: Ma il raddoppio di AC corda e'
 ad $\frac{1}{2} 6$, che non puo' esser che fino. dunque fuori di categoria. E' vero, ma si dira' meglio, se
 si dira' che tal relazione e' media tra le due categorie. La prima progressione ha dimostrato li fini
 del Circolo armonici, li fini propriati aritmetici. La seconda progressione ha dimostrato le corde del
 Circolo armoniche, le ipotenuse controarmoniche. dunque la legittima conseguenza si e', che restano
 in qualunque modo il Circolo armonico, e cambiandosi rispettivamente il quadrato di aritm.^{ico} in
 contraum.^{ico}, la relazione di $\frac{1}{2} 6$ (come fino) ad AC corda del Circolo deve risultare media tra
 le due categorie; cioe' tra AC, come costanti: armonico; ed un termine medio tra il mezzo
 aritmetico, e il mezzo controarmonico. Sub ne viene, che restano la semicirconferenza
 come 154, BX (figura XI), come 49, mandati dalla quantita' completa: il che si dimostra
 per poligoni inscritti, e circoscritti al Circolo. dunque 49 dovra' alzarsi di quantita' verso
 il termine 50, mezzo contraum.^{ico} della stessa ragione sesquiterza, di cui 49 e' mezzo aritmetico.
 cio' si dimostra in primo luogo secondo le proposizioni note, di Archimede, 7, 22; la comune, 50, 157.

Sia la *positione* di Archimede 7, 22, ridotta alla *positione* del sistema presente in 49, 154, a di
 cui ragguaglio posta la *positione* comune 50, 157, si trova, che li due termini 49, 50, indicanti
 il diametro sono li precisi formanti la ragione *construam^o* del centro della *vesquiterza geom^{ica}*
 discreta 42, 48, 49, 50, 56. dunque in tal rispetto è dimostrata la *propositione* dalla sola
positione de termini. Ma inanzi. Dati li due termini indicanti il diametro, cioè 49, 50: dati li due
 termini indicanti la *Circonfenza*, cioè 154, 157; e dedotte le due medietà aritmetiche rispettive
 tra 49, 50, 49½; tra 154, 157, 155½, in numeri primi 99, 311, questi due termini nella loro
 semplicità prima aritm^{ica} (seben incompleta) sono più prossimi alla vera quantità delle due
positioni suddette, 7, 22; e 150, 157. dunque resta dimostrata la *propositione* suddetta etc.
 Se poi si volesse ridurre la dedotta *positione* 99, 311 (in numeri primi la più completa di tutte)
 al calcolo *construam^o*, si troverebbe in affatto minima differenza della *positione* di Eudoxo presa
 in quante cifre si vuole. Ma questo non essendo l'intento, si omette, e si passa inanzi.

Si dimostra in secondo luogo l'effetto prodotto dalla moltiplica tra loro de due mezzi, 49 aritm^{ica}, 50
construam^o della ragione *vesquiterza* 42, 56; che vuol dire dall'alzar 49 verso 50 con la moltiplica
 tra loro, di *temperamento geom^{ico}* in prodotto.

Data la dupla geom^{ica} discreta in questi quattro termini, 35, 49, 50, 70; e data la *vesquiterza geom^{ica}*
 discreta *construita* li tre mezzi, 42, 48, 49, 50, 56, li mezzi della dupla, 49, 50, saranno
 eguali alli due mezzi della *vesquiterza*, 49 aritm^{ica}, 50 *construam^o*. E chiaro. Le radici duples di
 semplicità prima sono in questa scienza, 5, 7, (demonstrato), quali ridotte a *proportione geometrica*
 discreta, sono 30, 35, 36, 42; e 35 mezzo aritm^{ica}, 36 mezzo aritm^{ica}. Ora si moltiplichino 49 per
 50; sarà il prodotto 2450, con cui per mezzo di un termine aggiunto si formi la ragione 35, 36,
 centro delle radici duples 5, 7. Sarà il termine aggiunto 2520, quale a 2450 è come 36 a 35.
 Data la ragione incompleta del diametro alla *Circonfenza* dedotta da Archimede, sarà 7 a
 quasi 22. Data la ragione stessa (affai meno incompleta) dedotta da Metro, sarà 113 a 355.
 Dedotta la differenza di queste due ragioni, sarà $\frac{113}{7} \times \frac{355}{22}$
 $\frac{2485}{2486}$.

dunque 22 di Archimede eccede 355 di Metro della ragione completa 2486, 2485. Data 2485
 di Metro, come mezzo tra li due assegnati termini 2450, 2520, si trova, che il mezzo 2485
 si risolve assieme con li estremi 2450, 2520, in 70, 71, 72, come numeri primi; preterito

per 5: 2450	per 5: 2485	per 5: 2520
per 7: 490	per 7: 497	per 7: 504
70	71	72

e si risolve per le stesse radici 5, 7, dalle quali è formata la *proportione geom^{ica}* discreta 30, 35, 36, 42.
 Ma duplicate li due mezzi, aritm^{ica} 35, aritm^{ica} 36 in 70, 72, e 71 mezzo aritm^{ica} indicante il geom^{ico} etc.
 et è eguale a 2485 di Metro risoluto in 71. dunque 49 alzato verso 50 col *temperamento*
geom^{ico} della moltiplica tra loro, incontra al termine relativo aggiunto ~~in~~ la differenza
 delle ragioni assegnate tra il diametro, e la *Circonfenza*, dedotta per poligoni; e la incontra
 come mezzo aritm^{ica} indicante il geom^{ico}. dunque vera la *propositione* etc. E qui si riflette,
 che nelle *positioni* del centro 49, 50, delle radici duples 5, 7, e del suo centro 35, 36, essendo

Evidenti: espressi li principj costitutivi del presente sistema; incontrandosi identici: li termini
dedotti dal sistema con li termini dedotti da poligoni inscritti, e circoscritti (vicenza, e metodo
affatto diverso) e degno dimostrativo della verità del sistema.

Ma qui ancora si oppone, che li due termini 49, 50, sono propri della dupla geom: discreta assegnata
35, 49, 50, 70, e non della resquiterza geom: discreta 42, 48, 49, 50, 56, con li quali quasi a volte
s'incontrano. E la forza di questa opposizione consiste nel concedere, che l'effetto dimostrato risulti
dal centro della dupla geom: discreta; nel negare, che risulti dal centro della resquiterza geom: discreta.
Ma non è vero, risulta dal centro resquiterzo. Primieram: si avverta, che 49, 50, come mezz di
35, 70, non sono, ne 49 mezz ann: ne 50 mezz ann: come venam: 49 è mezz anametrico,
50 cent'ann: della resquiterza 42, 56. La dupla geom: discreta assegnata non è di sim-
plicità prima: nasce dalla moltiplica delle radici duple 5, 7, 10, cioè $\frac{5 \times 7}{2 \times 10}$

è bensì vero, che data la somma delli tre termini radicali della dupla, 5, 7, 10, avrà la somma
22, e raguagliato il mezz 7 alla somma 22, si avrà la stessa ragione di Archimede dedotta
da poligoni, e la stessa dimostrata dal sistema. Ma altrettanto è vero, che data la tripla
geom: discreta 2, 3, 4, 6, e moltiplicati tra loro li termini in serie, 2 per 3, 6; 3 per 4, 12;
4 per 6, 24, si avrà in prodotto la dupla continua 6, 12, 24; e con ciò si rileverà dimostrativo
che non quasi a volte, ma per necessità il centro resquiterzo deve incontrarsi col centro duplo.
Perchè dedotte le medietà aritm: tra le ragioni formanti la tripla geom: discreta duplicate in
2, 3, 4, 6 sono 5, 7, 10, cioè le radici duple della scienza presente.

dupl: 4 5 6 7 8 10
med: aritm: 5 7 10

Dunque 7 medietà aritm: tra 6, 8, resquiterza in primo luogo: medio geom: incompleto della dupla
in secondo luogo.

Ma perchè si rilevi ad evidenza la forza, e la significazione del centro resquiterzo (cosa infinitam:
necessaria per ciò che rimane a dimostrare) nel raguaglio dell'apertura di compasso alla
semicirconferenza, o sia del quadrato al Circolo; e nello stesso tempo si rilevi la forza dimostrativa
della scienza presente non solo in risguardo alle ragioni, come forme (oggetto principale della
medesima), ma ancora in risguardo alla quantità, a cui per altro poco attento, e sopra cui
non fonda, se non come segno estrinseco di ragione, si prova la dimostrazione seguente,
in cui raccogliendosi in precisione quanto finora si è esposto, spiegato, e dimostrato del sistema
fisico armonico, si toccherà con mano la verità del medesimo assieme con tutte le altre proposte
verità.

Proposizione Ottava Figura XII

Il diametro in piano AB a tutto il rino E O delitto da ND $\frac{1}{2}$ di NM, rispetto al calcolo di questa
scienza fondato per sistema ne numeri razionali di prima semplicità, dev'essere come 18 a 17.
Perchè se il quadrato di GA essendo 9, di DE 8, le radici aritm: di semplicità prima di 3, 4,
sono 17, 18. Precederà 17 in prodotto della unità; ma come medio della ragione 16, 18, indicando
la ragione stessa, di cui è mezz, moltiplicata la ragione, cioè 16 per 18, li due prodotti saranno
completi; di 18 per 18, 324; di 16 per 16, 256; e 256 a 324, come 8 a 9. Dunque etc.
Data dunque il diametro NM 18, la linea DC differenziale tra il semidiametro AC, e il rino E D

producente la corda NE desqualebena radicale del sistema armonico, si divide per la forma, o' sia
 ragione dupla in GI 2, ID 1. In questa propotione sarà espresso tutto il sistema. Perché in primo luogo
 di diametro NM, la corda, o' sia diagonale NA, e la corda radicale desqualebena NE sono tra loro in
 ragione tripla radicale armonica, perché li loro quadrati, come 6, 3, 2, tripla armonica. In secondo
 luogo è fuori di disputa, che il Circolo avendo con il quadrato circoscritto il punto comune in A, si
 determina alla propria natura Circolare, nella portione di Circonferenza AE, e in relazione tra
 il semidiametro AC, e il seno ED. (Cio' s'intende rispetto alla propotione del seno ED del sistema
 armonico e il primo seno del Circolo), dunque a riguardo del seno GD, ch'è $\frac{1}{2}$ del diametro AM.
 In terzo luogo si è ~~illegibile~~ altrove, che li numeri impari sono in questa via considerata come
 radici delle rispettive ragioni, di cui sono somme, e il loro progresso è per differenza 2, cioè 1, 3, 5, 7
 Cio' messo, le radici di NA, NM, saranno 5, 7 (radici dupli), perché somme delle due ragioni formanti
 la dupla; cioè 2, 3; 3, 4. e di 2, 3, somma 5; di 3, 4, somma 7. Le radici di NE, NA saranno 9, 11
 (radici desqualebene), perché somme delle due ragioni formanti la desqualebene: cioè 4, 5; 5, 6; e di
 4, 5, somma 9; di 5, 6, somma 11. Ma queste radici procedono per serie di differenza 2, e la portione
 EA del quarto di Circonferenza NEA è potenza di ragione media tra NA, NE, e tra NG, ND.
 dunque sarà in potenza della ragione 7, 9. Perché data la serie de numeri impari, 1, 3, 5, 7, 9, 11,
 etc., 7, 9, è media ragione tra 5, 7; 9, 11. Ma NA, NM, come 5, 7; NE, NA, come 9, 11; dunque
 lo spazio medio non sarà ne potrà esser in altra potenza di ragione, che di 7, 9, media tra
 5, 7; 9, 11. Ridotta questa ragione, di potenza nel Circolo, in arco nel diametro, sarà NI 7, NG 9;
 e in conseguenza resterà diviso GD ($\frac{1}{2}$ del diametro) in GI 2, ID 1. E come si è dimostrato
 altrove, che il sistema fisico arm. ha il suo principio nella dupla, e il suo complemento in $\frac{1}{2}$;
 così tutto ciò sarà espresso metafisicam. in DC $\frac{1}{2}$, diviso nella ragione dupla per la ragione 7, 9,
 media tra le ragioni 5, 7; 9, 11: ragioni radicali della tripla armonica, in cui si chiudono li
 principi costitutivi del sistema, dupla, e desqualebene. Da questa sistematica propotione risulta
 immediatam. dentro il diametro la ragione dell'apertura di compasso NG, come 7, al quarto
 di Circonferenza NEA come 11; perché così NI 7 ad IM 11; e però il sistema stesso diventa
 una dimostrazione, tanto più concludente, quanto che le radici 7, 9, sono somma delle due ragioni
 3, 4; 4, 5, formate dalli tre mezzi della tripla geom. disorta 2, 3, 4, 5, 6; e la somma de tre
 termini 3, 4, 5, ch'è 12, con la somma de due estremi tripli 2, 6, ch'è 8, forma la ragione
 desqualebene espressa in NG 9, ND 6.

Eppoi si ha qualche difficoltà (ragionevole) a ben concepire, e comprendere questo modo di dimostrazione
 sistematica, in cui le ragioni si considerano metafisicam. come astratte dalle figure rispettive, la
 scienza presunta può spiegarli in altro modo, e con effetto far conoscere la verità della ragione.
 sia il centro radicale desquintero, o' sia medio prop. sarà in questa scienza 97 tra 84, 112, ragione desqui-
 tenta. si dimostra. 84 per 112, 9408; 97 per 97, 9409. Ma 97 medio di 96, 98; e 96 per 98, 9408.
 dunque etc. sarà dunque 97 il dato centro radicale desquintero, già dimostrato in altro modo, e pos-
 sione nella settima propotione. Data la ragione 7, 9, si riduce a propotione geom. disorta.
 sarà 56, 63, 64, 65, 72. duplicati tutti li termini per dedurseli mezzi necessari, sarà 112, $\frac{126}{128}$, 144.
 tra il mezzo arm. 126, e altri: 128, sarà mezzo 127; tra il mezzo arm. 128, e altro arm. 130 sarà
 mezzo 129. Così questi due termini 127, 129, e data la media prop. della dupla 16, 32, si formerà

A  C

17

il triangolo isoscele B  C, di cui AC metà proporz. di 1632; AB 127; BC 129. di questi triangoli si parlava
quanto prima, e presentem^{te} basta, che il termine 129 ipotenusa del triangolo sia dedotto dalle due
medietà, aritm^{ica}, contrarim^{ica}, della ragione 7,9, ridotta a proporzione geom^{ica} discreta. Dati questi due
termini di sistema, si sommano $\frac{127}{226}$. Alla somma 226 si sommi di nuovo 129. $\frac{129}{355}$. E due
somme saranno 226, 355. Ma questa è in precisione la ragione dedotta da metà per poligoni tra
l'apertura di compasso, e $\frac{1}{4}$ di circonferenza; e è si tute assegnabili in pochi numeri (sinora)
la più prossima al vero. dunque ven li termini assegnati, vero il sistema. Questo è l'effetto prodotto
dalla due termini sistematici 97, 129; e la scienza presente non solo insegna il derivarli, si sommarli nel
tal modo etc.; ma insegna di più a risolvere qualunque data proporzione dedotta da poligoni tra il
quadrato, e il circolo ne suoi propri principj: regno dimostrativo, che li principj primi sono in questa
scienza; e ciò sia detto di passaggio.

Confrontando alla dimostrazione (figura XII), e rilevata eguale la ragione di NI 7, IM 11, alla ragione
~~demonstrata nella settima proposizione~~ di NC apertura di compasso 7, e $\frac{1}{4}$ di circonferenza NEA 11,
si vuole, e si deve sapere, da qual principio procede il difetto nel termine 7, o l'eccesso nel termine 11;
giacché ciò per poligoni si dimostra. Essendo si divisa la linea GD nella ragione dupla in GI 2, ID 1,
e sommato IC 9, e in conseguenza MI 11, NI 7, è chiaro, che DI come 1 manca, GI come
2 eccede. E qui si trova la ragione dupla 2, 1, che non regge alla sua forma, perché accresciuta
ad 1, o sottratta a 2 qualivoglia minima quantità, non sarà mai dupla completa tra li due termini.
Ma la ragione dupla nel sistema armonico è inalterabile, perché principio. dunque è segno dimostrativo,
che la indicazione dupla 2, 1, nella linea GD è equivoca. Ma si è sopra dimostrato nella settima
proposizione, che 7 equalm^{te} si trova centro duplo radicale, e centro desquiterzo. dunque non potendo
esser duplo, sarà desquiterzo; e con ciò si dimostra nuovam^{te}, che 7 è principalm^{te} centro desquiterzo,
secondariam^{te} centro duplo. Radice il centro, come desquiterzo, è chiaro, che in questo deve trovarsi
l'eccesso, e il difetto in riguardo al metodo presente nella linea GD, non più dividibile per la
dupla, ma per il centro desquiterzo sino alle due radici. Sia dunque (com'è) centro completo 48,49,
della desquiterza geom^{ica} discreta 42,56. Per dedurre le due radici, si moltiplichino li due termini
per 4. di 48 per 4, 192; di 49 per 4, 196. Saranno 193, 195 radici della ragione 48,49. Perché
moltiplicati in se stessi, 193 per 193, 37249. 195 per 195, 38025. Confrontato il prodotto a 48,49,
ovvero la differenza 1824200, 1824201. Ma 193 medio tra 192, 194: 195 medio tra 194, 196; e
192 per 194, 37248; 194 per 196, 38024; e 37248, 38024, come 48, 49. dunque etc.

Dati li tre termini 193, 194, 195, si duplicchino in 386, 388, 390, e si deducano le due medietà 387,
389, saranno questi due termini 387, 389, radici delle radici del centro desquiterzo 48,49. di queste
radici (dedotte tutte dal centro desquiterzo) si prenda 194 medio tra le radici prime 193, 195 (in numeri
primi 97 centro immediato radicale desquiterzo); e si prenda 387 delle radici seconde. Dati questi
due termini 194, 387, sia GI 387, sia ID 194. Sarà GD la loro somma, e però 581.
Ma GD è $\frac{1}{6}$ del diametro NM. dunque moltiplicato 581 per 6, 3486, sarà NM 3486. MG metà
sarà 1743, a cui sommato GI 387, sarà MI 2130, sarà l'avanzo IN 1356. Ma 1356, 2130,
in numeri primi, come 226, 355, proporzione identica di metà dedotta da poligoni. dunque etc.

Più. Siano noti a proporzione geom. discreta li sommassegni due termini 387, 389, col mezzo necessario aggiunto 388. Sarà la proporzione

150156 ^{mez. arit. 150543} ^{arit. 150544} ^{controar. 150545} 150952.

Duplicato il mezzo arit. 150544 in 301088, e aggiuntaci l'unità per il triangolo Pitagorico (a ruotura) sarà 301089. Quadruplicato il primo termine 150156 con $\frac{1}{2}$ aggiunto per equivarare nella moltiplica. Con l'altro estremo 150952 con $\frac{1}{2}$ aggiunto il prodotto del mezzo aritmetico moltiplicato in se stesso, sarà 600626. Sia GI 600626, ID 301089, sarà GD 901715. Dunque il diametro MN 5410290; MC metà 2705145, a cui sommato GI 600626, sarà MI 4305771, e l'avanzo IN 2104519. Comparati questi due termini 2104519, 4305771, alla proporzione di medio 226,355, si trova la minima differenza completa di 747104245, 747104246. Avanzando il calcolo, e comparando li due termini risultati alla proporzione di Eulero presa in quante cifre si vuole, si va consumando la differenza in progressione infinita.

Più ancora. Dato 396, ch'è il termine 99 moltiplicato per 4, relativo controar. della Resquenza geom. discreta, e ipotenusa del triangolo Pitagorico derivato dalla medesima, si moltiplichi in se stesso. Sarà il prodotto 156816. Dello stesso termine 396 si deduca il termine Resquialtero; sarà 264. Sommato al prodotto 156816, sarà il risultato 157080. Duplicato sarà 314160. Sarà dunque prossimo alla proporzione di Eulero 314159. Si deduca la Resquialtera da 395, contraria con 396 di 197, 198, radici di 98, 99. Sarà 263: $\frac{1}{2}$. Si sommi a 156816. Sarà il risultato 157079: $\frac{1}{2}$. Duplicato sarà 314158: $\frac{1}{2}$. Dunque più prossimo alla proporzione di Eulero. Quanto si voglia far la radice di punte: Car le radici, alzando le potestioni, si forma una progressione di numeri identici a numeri di Eulero in quante cifre si vuole, e la progressione è infinita.

Più finalm. Dato la proporzione di uso comune, ch'è il diametro come 50, alla Circonferenza come 157, il termine 50 è l'identico mezzo controar. della Resquenza geom. discreta 42, 48, 49, 50, 56. Il termine 157 è l'identico relativo controar. medio fra le due ragioni 11, 13; 12, 14, note a proporzione geom. discreta. La ragione 11, 13, è ragione radicale delle radici doppie 5, 7. La ragione 12, 14, è ragione radicale arit. della Resquenza 6, 8, di cui è mezzo arit. 7; in 12, 14, di 6, 7, duplicati. Le due proporzioni geom. discrete sono

di 11, 12, 13 di 12, 13, 14

132. ^{mez. 143 arit.} ^{144 arit.} 156. 156 ^{mez. 168 arit.} ^{169 arit.} ^{170 controar.} 182.

Il termine 156 è il preciso congiungente le due proporzioni geom. discrete. Fatto centro geom. della prima proporzione il mezzo arit. 144, e il controar. 145, moltiplicati fra loro, il prodotto è 20880. Relativam. aggiunta la unità all'estremi 132, 156, e però 133, 157, moltiplicati fra loro, il prodotto è 20881. Egualm. fatto centro geom. della seconda proporzione il mezzo arit. 169, il controar. 170, moltiplicati fra loro, il prodotto è 28730. Aggiunta relativam. la unità all'estremi 156, 182, e però 157, 183, moltiplicati fra loro, il prodotto è 28731. Il calcolo non si egualia, non si egualia mai, come si egualia fra le

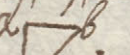
moltiplica del cento formato dalle due mediet  anm.; anm.; e la moltiplica dell' estremi di proporzione naturale, cio  132, 156; e 156, 182. E la ragione si  , perch  questo calcolo   relativo. Controanm.; cio  relativo a pi  1, di unit  anteriore alla unit  aritmetica, e perc  indefinito. Corrisponde a meno 1 dell' Algebra; e volam  differisce dalla medesima in un punto important , cio  che, nella scienza, e sistema sicoanm.; questa tal natura di quantit  si tratta sicilian , e dimostrativam ; essendo inseparabili le dimostrazioni da quanto si vede, si tocca, e si sente. Nulla importa nel caso presente la spiegazione integrale di tal natura (  una scienza intiera): bastando al bisogno la indicazione dimostrativa del calcolo, e il fatto stesso. In tutto   chiaro il termine 157, come relativo controanm.; e come detto dalli due centri, desquiterzo, e duplo radicale, nello stesso senso, in cui si   dimostrato nella veltima proposizione il termine 7 cento desquiterzo, e radice dupla; e in conseguenza   chiaro, che la proposizione comune, 50, 157, si   risolta ne principj di questo sistema.

Quanto dunque si   dimostrato nella veltima, e ultima proposizione, senza a far toccar con mano la verit  di questo sistema: essendo affatto impossibile l'incontro identico delle ragioni, e de' termini dedotti dalla scienza presente (ben diversa dalle altre) con le ragioni, e termini dedotti dalle scienze dimostrative comunem  note, de non in disposto, che questa, e quelle dimostrino lo stesso con principj diversi bens , ma egualm  sicuri: sempre perch  con vantaggio sommo di questa, perch  oltre la sua inseparabilit  dalle verit  sicche, si fa in oltre sapere, che rispetto alla quantit  la scienza presente pu  impegnarsi con facilit  senza proporzione maggiore, di quello possa la Geometria per poligoni (nel caso presente, e in altri rispettivi) di assegnare, non volam  l'ultima minima differenza della quantit  in progressione infinita; ma di pi  (che finalm    il fatto) di risolvere qualunque dedotta proposizione dalle altre scienze ne propri principj, e dimostrare la ragione a priori, da cui procede. Ma comeche nel presente trattato, che verit  sopra una cosa particolare di questo sistema, la direzione si   a dimostrare quanto si propone non per quantit , ma per ragione accompagnata dalla esperienza (come si   veduto di sopra, e si vedr  meglio in appresso), cos  non vi   bisogno di spiegare ulteriom , e integralm  li principj universali, e il metodo, da cui si sono dedotte le dimostrazioni soprassegnate nelle due proposizioni suddette. Se tal caso bisognasse, esporre tutta la scienza,   impo  farebbe un volume intiero.   vero, che in conseguenza o non varanno in tebe a bastanza, o non compariranno con tutta la loro forza le dimostrazioni suddette. Ma si sappia, che non sono ordinate immediate  le medesime alla prova dell' assunto principale, come si vedr  chiaram ; ma sono ordinate alla indicazione dimostrativa in genere della verit  del sistema, col fatto stesso delle ragioni, e termini risultati, e con la risoluzione delle ragioni, e termini delle altre scienze ne principj sicchi e dimostrativi di questa, e cio  basta all' intento presente.

Ma per altro, non dovendoti derogare alla verit  si distingue la cosa dal modo. Si intende di aver stabilito sicilian , e dimostrativam  li principj costitutivi del presente sistema, e di cui radici, o siano potenze primitive si risolvono nell' centri desquiterzo, e duplo. Questa   la cosa, che si pretende di aver dimostrata nel modo appresso a poco comune; cos  che non vi rimanga, ne possa rimanervi oscurit  alcuna per esser intesa, e capita come dimostrazione, che produce,

e genera scienza. Il modo poi, con cui si sono risolte le ragioni e termini delle altre Scienze nelle ragioni, e termini indicati dimostrativi: li principi del sistema presente, questo è particolare della scienza del sistema; e questo deve distinguersi dalla cosa, perchè non è congiunto alla medesima in tal modo, che diventi parte essenziale, senza di cui non possa dimostrarsi quanto si è proposto. Ma però è un fatto; e come fatto, de cettarsi. Si prende da una scienza, si chiama indicazione dimostrativa, quale, quando si consideri nettamente, nelle due circostanze, ha la forza stessa di una dimostrazione assoluta. Intanto si prosegue alle ultime dimostrazioni dopo aver premessa la spiegazione de' triangoli pitagorici: cosa inseparabile dal presente sistema, e necessaria nell'impegno presente.

Comunari: noto il triangolo Pitagorico 3, 4, 5 (dello Pitagorico, perché indicato da Pitagora). Formato un triangolo rettangolo, in cui un lato sia 3, l'altro 4, e l'ipotenusa sia 5. Il Sig. ¹ ~~Matteo~~ ² ~~Matteo~~ ³ ~~Matteo~~ ⁴ ~~Matteo~~ ⁵ ~~Matteo~~ ⁶ ~~Matteo~~ ⁷ ~~Matteo~~ ⁸ ~~Matteo~~ ⁹ ~~Matteo~~ ¹⁰ ~~Matteo~~ ¹¹ ~~Matteo~~ ¹² ~~Matteo~~ ¹³ ~~Matteo~~ ¹⁴ ~~Matteo~~ ¹⁵ ~~Matteo~~ ¹⁶ ~~Matteo~~ ¹⁷ ~~Matteo~~ ¹⁸ ~~Matteo~~ ¹⁹ ~~Matteo~~ ²⁰ ~~Matteo~~ ²¹ ~~Matteo~~ ²² ~~Matteo~~ ²³ ~~Matteo~~ ²⁴ ~~Matteo~~ ²⁵ ~~Matteo~~ ²⁶ ~~Matteo~~ ²⁷ ~~Matteo~~ ²⁸ ~~Matteo~~ ²⁹ ~~Matteo~~ ³⁰ ~~Matteo~~ ³¹ ~~Matteo~~ ³² ~~Matteo~~ ³³ ~~Matteo~~ ³⁴ ~~Matteo~~ ³⁵ ~~Matteo~~ ³⁶ ~~Matteo~~ ³⁷ ~~Matteo~~ ³⁸ ~~Matteo~~ ³⁹ ~~Matteo~~ ⁴⁰ ~~Matteo~~ ⁴¹ ~~Matteo~~ ⁴² ~~Matteo~~ ⁴³ ~~Matteo~~ ⁴⁴ ~~Matteo~~ ⁴⁵ ~~Matteo~~ ⁴⁶ ~~Matteo~~ ⁴⁷ ~~Matteo~~ ⁴⁸ ~~Matteo~~ ⁴⁹ ~~Matteo~~ ⁵⁰ ~~Matteo~~ ⁵¹ ~~Matteo~~ ⁵² ~~Matteo~~ ⁵³ ~~Matteo~~ ⁵⁴ ~~Matteo~~ ⁵⁵ ~~Matteo~~ ⁵⁶ ~~Matteo~~ ⁵⁷ ~~Matteo~~ ⁵⁸ ~~Matteo~~ ⁵⁹ ~~Matteo~~ ⁶⁰ ~~Matteo~~ ⁶¹ ~~Matteo~~ ⁶² ~~Matteo~~ ⁶³ ~~Matteo~~ ⁶⁴ ~~Matteo~~ ⁶⁵ ~~Matteo~~ ⁶⁶ ~~Matteo~~ ⁶⁷ ~~Matteo~~ ⁶⁸ ~~Matteo~~ ⁶⁹ ~~Matteo~~ ⁷⁰ ~~Matteo~~ ⁷¹ ~~Matteo~~ ⁷² ~~Matteo~~ ⁷³ ~~Matteo~~ ⁷⁴ ~~Matteo~~ ⁷⁵ ~~Matteo~~ ⁷⁶ ~~Matteo~~ ⁷⁷ ~~Matteo~~ ⁷⁸ ~~Matteo~~ ⁷⁹ ~~Matteo~~ ⁸⁰ ~~Matteo~~ ⁸¹ ~~Matteo~~ ⁸² ~~Matteo~~ ⁸³ ~~Matteo~~ ⁸⁴ ~~Matteo~~ ⁸⁵ ~~Matteo~~ ⁸⁶ ~~Matteo~~ ⁸⁷ ~~Matteo~~ ⁸⁸ ~~Matteo~~ ⁸⁹ ~~Matteo~~ ⁹⁰ ~~Matteo~~ ⁹¹ ~~Matteo~~ ⁹² ~~Matteo~~ ⁹³ ~~Matteo~~ ⁹⁴ ~~Matteo~~ ⁹⁵ ~~Matteo~~ ⁹⁶ ~~Matteo~~ ⁹⁷ ~~Matteo~~ ⁹⁸ ~~Matteo~~ ⁹⁹ ~~Matteo~~ ¹⁰⁰ ~~Matteo~~ ¹⁰¹ ~~Matteo~~ ¹⁰² ~~Matteo~~ ¹⁰³ ~~Matteo~~ ¹⁰⁴ ~~Matteo~~ ¹⁰⁵ ~~Matteo~~ ¹⁰⁶ ~~Matteo~~ ¹⁰⁷ ~~Matteo~~ ¹⁰⁸ ~~Matteo~~ ¹⁰⁹ ~~Matteo~~ ¹¹⁰ ~~Matteo~~ ¹¹¹ ~~Matteo~~ ¹¹² ~~Matteo~~ ¹¹³ ~~Matteo~~ ¹¹⁴ ~~Matteo~~ ¹¹⁵ ~~Matteo~~ ¹¹⁶ ~~Matteo~~ ¹¹⁷ ~~Matteo~~ ¹¹⁸ ~~Matteo~~ ¹¹⁹ ~~Matteo~~ ¹²⁰ ~~Matteo~~ ¹²¹ ~~Matteo~~ ¹²² ~~Matteo~~ ¹²³ ~~Matteo~~ ¹²⁴ ~~Matteo~~ ¹²⁵ ~~Matteo~~ ¹²⁶ ~~Matteo~~ ¹²⁷ ~~Matteo~~ ¹²⁸ ~~Matteo~~ ¹²⁹ ~~Matteo~~ ¹³⁰ ~~Matteo~~ ¹³¹ ~~Matteo~~ ¹³² ~~Matteo~~ ¹³³ ~~Matteo~~ ¹³⁴ ~~Matteo~~ ¹³⁵ ~~Matteo~~ ¹³⁶ ~~Matteo~~ ¹³⁷ ~~Matteo~~ ¹³⁸ ~~Matteo~~ ¹³⁹ ~~Matteo~~ ¹⁴⁰ ~~Matteo~~ ¹⁴¹ ~~Matteo~~ ¹⁴² ~~Matteo~~ ¹⁴³ ~~Matteo~~ ¹⁴⁴ ~~Matteo~~ ¹⁴⁵ ~~Matteo~~ ¹⁴⁶ ~~Matteo~~ ¹⁴⁷ ~~Matteo~~ ¹⁴⁸ ~~Matteo~~ ¹⁴⁹ ~~Matteo~~ ¹⁵⁰ ~~Matteo~~ ¹⁵¹ ~~Matteo~~ ¹⁵² ~~Matteo~~ ¹⁵³ ~~Matteo~~ ¹⁵⁴ ~~Matteo~~ ¹⁵⁵ ~~Matteo~~ ¹⁵⁶ ~~Matteo~~ ¹⁵⁷ ~~Matteo~~ ¹⁵⁸ ~~Matteo~~ ¹⁵⁹ ~~Matteo~~ ¹⁶⁰ ~~Matteo~~ ¹⁶¹ ~~Matteo~~ ¹⁶² ~~Matteo~~ ¹⁶³ ~~Matteo~~ ¹⁶⁴ ~~Matteo~~ ¹⁶⁵ ~~Matteo~~ ¹⁶⁶ ~~Matteo~~ ¹⁶⁷ ~~Matteo~~ ¹⁶⁸ ~~Matteo~~ ¹⁶⁹ ~~Matteo~~ ¹⁷⁰ ~~Matteo~~ ¹⁷¹ ~~Matteo~~ ¹⁷² ~~Matteo~~ ¹⁷³ ~~Matteo~~ ¹⁷⁴ ~~Matteo~~ ¹⁷⁵ ~~Matteo~~ ¹⁷⁶ ~~Matteo~~ ¹⁷⁷ ~~Matteo~~ ¹⁷⁸ ~~Matteo~~ ¹⁷⁹ ~~Matteo~~ ¹⁸⁰ ~~Matteo~~ ¹⁸¹ ~~Matteo~~ ¹⁸² ~~Matteo~~ ¹⁸³ ~~Matteo~~ ¹⁸⁴ ~~Matteo~~ ¹⁸⁵ ~~Matteo~~ ¹⁸⁶ ~~Matteo~~ ¹⁸⁷ ~~Matteo~~ ¹⁸⁸ ~~Matteo~~ ¹⁸⁹ ~~Matteo~~ ¹⁹⁰ ~~Matteo~~ ¹⁹¹ ~~Matteo~~ ¹⁹² ~~Matteo~~ ¹⁹³ ~~Matteo~~ ¹⁹⁴ ~~Matteo~~ ¹⁹⁵ ~~Matteo~~ ¹⁹⁶ ~~Matteo~~ ¹⁹⁷ ~~Matteo~~ ¹⁹⁸ ~~Matteo~~ ¹⁹⁹ ~~Matteo~~ ²⁰⁰ ~~Matteo~~ ²⁰¹ ~~Matteo~~ ²⁰² ~~Matteo~~ ²⁰³ ~~Matteo~~ ²⁰⁴ ~~Matteo~~ ²⁰⁵ ~~Matteo~~ ²⁰⁶ ~~Matteo~~ ²⁰⁷ ~~Matteo~~ ²⁰⁸ ~~Matteo~~ ²⁰⁹ ~~Matteo~~ ²¹⁰ ~~Matteo~~ ²¹¹ ~~Matteo~~ ²¹² ~~Matteo~~ ²¹³ ~~Matteo~~ ²¹⁴ ~~Matteo~~ ²¹⁵ ~~Matteo~~ ²¹⁶ ~~Matteo~~ ²¹⁷ ~~Matteo~~ ²¹⁸ ~~Matteo~~ ²¹⁹ ~~Matteo~~ ²²⁰ ~~Matteo~~ ²²¹ ~~Matteo~~ ²²² ~~Matteo~~ ²²³ ~~Matteo~~ ²²⁴ ~~Matteo~~ ²²⁵ ~~Matteo~~ ²²⁶ ~~Matteo~~ ²²⁷ ~~Matteo~~ ²²⁸ ~~Matteo~~ ²²⁹ ~~Matteo~~ ²³⁰ ~~Matteo~~ ²³¹ ~~Matteo~~ ²³² ~~Matteo~~ ²³³ ~~Matteo~~ ²³⁴ ~~Matteo~~ ²³⁵ ~~Matteo~~ ²³⁶ ~~Matteo~~ ²³⁷ ~~Matteo~~ ²³⁸ ~~Matteo~~ ²³⁹ ~~Matteo~~ ²⁴⁰ ~~Matteo~~ ²⁴¹ ~~Matteo~~ ²⁴² ~~Matteo~~ ²⁴³ ~~Matteo~~

Vi è parim: l'ordine de' triangoli, &ragonici, dedito da numeri pari, & impari (e però universale);
ma con questa differenza, che uno de' due lati è sempre irrationale, & ciò in genere.
In specie poi si deve avvertire in primo luogo, che il lato irrationale è sempre la media propie-
tella ragion dupla, quale per differenza 2 procede in serie infinita di 2, 4; 4, 8; 8, 12 etc.
rispettiva sempre de' triangoli. In secondo luogo si deve avvertire (e principalme:) che la forma
di questi triangoli è inseparabile dalle proporzioni geom: discrete, nelle quali siano espressi tutti
li tre mezzi, armon:, aritm:, controarm:; e vi s'intenda implicatam: il mezzo geom: di queste
scienze, altrove spiegato, per esser dedito, et espresso nel triangolo. Si spiega. data la tripla
geom: discrete, di 2, 3, 4, prima di tutte le proporzioni di questo genere, sarà 2, 3, 4, 5, 6.
Duplicati tutti li termini in 4, 6, 8, 10, 12, e dediti li due mezzi, 7, tra 6, 8; (et è il geom: di
questa scienza); 9, tra 8, 10: assegnata la media propie: della dupla 4, 8, sarà formato
il triangolo a . a, b, radii di 12, a, c, 7; c, b, 9.

data la seconda proporzione geom.^{ca} discesa, ch'è la dupla, in 6, 8, 9, 10, 12; duplicati li termini in 12, 16, 18, 20, 24; e habbi li due mezzi, 17, tra 16, 18 (che è il geom.^{co} di questa scienza); 19,

Ma 18, 20; assegnata la media prop^{ta} della dupla 6, 12, vari formato il triangolo AB, radice di 72, AC 17, GB 19. etc.

In questi triangoli avviene l'affezione dimostrativa della media prop^{ta} della dupla rispettiva de
 loro infinitam^{te} per lato; e nella progressione armonica avviene il fisico terzo suono costante
 in infinito nel termine $\frac{1}{2}$, ch'è della dupla $1, \frac{1}{2}$, valea negli occhi la deduzione dimostrativa.
 Ridotti li primi termini delle prop^{ta} geom^{te} discrete, 2, 6, 12, 20 etc.: a serie aritmetica
 1, 2, 3, 4 etc.; la stessa media prop^{ta} della dupla vari lato costante, in infinito di tutti li triangoli
 rispettivi. fa serie delle prop^{ta} geom^{te} discrete, nello stato naturale e la seguente.

2, 3, 4, 5, 6 tripla
 6, 8, 9, 10, 12 dupla
 12, 15, 16, 17, 20 super 2 part: 3
 20, 24, 25, 26, 30 desquialtera etc.

Trasportata a serie aritm^{te}: ne primi termini delle prop^{ta}, e fatto a raguglio, vari la
 seguente

{ 1 — 60, 90, 120, 150, 180 tripla
 { 2 — 120, 160, 180, 200, 240 dupla
 { 3 — 180, 225, 240, 255, 300 super 2 part: 3
 { 4 — 240, 288, 300, 312, 360 desquialtera etc.

dedotti li mezzi (senza duplicare li termini) per la formatione de suddetti triangoli, varanno
 li seguenti.

tra 90, 120, 150, mezzi 105, 135.
 tra 160, 180, 200, mezzi 170, 190.
 tra 225, 240, 255, mezzi 232: $\frac{1}{2}$, 247: $\frac{1}{2}$.
 tra 288, 300, 312, mezzi 294, 306. etc.

Formati li triangoli rispettivi, vari lato costante in infinito la media prop^{ta} della dupla 60, 120.
 e questa fa la conferma di quanto si è dimostrato nella quinta proposizione (figura VIII) sopra
 la diagonale AB in rispetto al terzo suono; e fa la indicazione dimostrativa di ciò, che significa
 li triangoli Pitagorici nel presente sistema.

Finalm^{te} in terzo luogo si deve averne sopra tutto (perchè questo è il luogo presente), che tanto
 li triangoli dedotti da numeri impari, quanto li dedotti in universale da pari, e impari, dipendono
 intrinsecam^{te} dalla natura di quantità contrarmonica in genere universale, fisico e dimostrativo.
 Non faccia specie, che qui si realizzi fisicam^{te} tal sorta di quantità; e vlam^{te} si v'impenda il giudizio
 fino che a suo tempo sia prodotto il sistema intero. Intanto si dimostra.

Li triangoli dedotti dal numero impari, la serie è la seguente.

3, 4,	5
5, 12,	13
7, 24,	25
9, 40,	41 etc.

Li triangoli dedotti dal numero pari, la serie è la seguente.

6, 8, 10,	12
8, 15, 17,	20
10, 24, 26,	30
12, 35, 37,	42
14, 48, 50,	56
16, 63, 65,	72
18, 80, 82,	90
20, 99, 101,	110
22, 120, 122,	132
24, 143, 145,	156
26, 168, 170,	182
28, 195, 197,	210
30, 224, 226,	240
32, 255, 257,	272
34, 288, 290,	306
36, 323, 325,	342
38, 360, 362,	380
40, 399, 401,	420
42, 440, 442,	462
44, 483, 485,	506
46, 528, 530,	552
48, 575, 577,	600
50, 624, 626,	650
52, 675, 677,	702
54, 728, 730,	756
56, 783, 785,	812
58, 840, 842,	870
60, 899, 901,	930
62, 960, 962,	990
64, 1023, 1025,	1052
66, 1088, 1090,	1116
68, 1155, 1157,	1182
70, 1224, 1226,	1250
72, 1295, 1297,	1320
74, 1368, 1370,	1392
76, 1443, 1445,	1466
78, 1520, 1522,	1542
80, 1600, 1602,	1620
82, 1681, 1683,	1700
84, 1764, 1766,	1782
86, 1849, 1851,	1866
88, 1936, 1938,	1952
90, 2025, 2027,	2040
92, 2116, 2118,	2130
94, 2209, 2211,	2222
96, 2304, 2306,	2316
98, 2401, 2403,	2412
100, 2500, 2502,	2510
102, 2601, 2603,	2610
104, 2704, 2706,	2712
106, 2809, 2811,	2816
108, 2916, 2918,	2922
110, 3025, 3027,	3030
112, 3136, 3138,	3140
114, 3249, 3251,	3252
116, 3364, 3366,	3366
118, 3481, 3483,	3482
120, 3600, 3602,	3600
122, 3721, 3723,	3722
124, 3844, 3846,	3844
126, 3969, 3971,	3969
128, 4096, 4098,	4096
130, 4225, 4227,	4225
132, 4356, 4358,	4356
134, 4489, 4491,	4489
136, 4624, 4626,	4624
138, 4761, 4763,	4761
140, 4900, 4902,	4900
142, 5041, 5043,	5041
144, 5184, 5186,	5184
146, 5329, 5331,	5329
148, 5476, 5478,	5476
150, 5625, 5627,	5625
152, 5776, 5778,	5776
154, 5929, 5931,	5929
156, 6084, 6086,	6084
158, 6241, 6243,	6241
160, 6400, 6402,	6400
162, 6561, 6563,	6561
164, 6724, 6726,	6724
166, 6889, 6891,	6889
168, 7056, 7058,	7056
170, 7225, 7227,	7225
172, 7396, 7398,	7396
174, 7569, 7571,	7569
176, 7744, 7746,	7744
178, 7921, 7923,	7921
180, 8100, 8102,	8100
182, 8281, 8283,	8281
184, 8464, 8466,	8464
186, 8649, 8651,	8649
188, 8836, 8838,	8836
190, 9025, 9027,	9025
192, 9216, 9218,	9216
194, 9409, 9411,	9409
196, 9604, 9606,	9604
198, 9801, 9803,	9801
200, 10000, 10002,	10000

Li triangoli dedotti dal numero pari, la serie è la seguente.

6, 8, 10,	12
8, 15, 17,	20
10, 24, 26,	30
12, 35, 37,	42
14, 48, 50,	56
16, 63, 65,	72
18, 80, 82,	90
20, 99, 101,	110
22, 120, 122,	132
24, 143, 145,	156
26, 168, 170,	182
28, 195, 197,	210
30, 224, 226,	240
32, 255, 257,	272
34, 288, 290,	306
36, 323, 325,	342
38, 360, 362,	380
40, 399, 401,	420
42, 440, 442,	462
44, 483, 485,	506
46, 528, 530,	552
48, 575, 577,	600
50, 624, 626,	650
52, 675, 677,	702
54, 728, 730,	756
56, 783, 785,	812
58, 840, 842,	870
60, 899, 901,	930
62, 960, 962,	990
64, 1023, 1025,	1052
66, 1088, 1090,	1116
68, 1155, 1157,	1182
70, 1224, 1226,	1250
72, 1295, 1297,	1320
74, 1368, 1370,	1392
76, 1443, 1445,	1466
78, 1520, 1522,	1542
80, 1600, 1602,	1620
82, 1681, 1683,	1700
84, 1764, 1766,	1782
86, 1849, 1851,	1866
88, 1936, 1938,	1952
90, 2025, 2027,	2040
92, 2116, 2118,	2130
94, 2209, 2211,	2222
96, 2304, 2306,	2316
98, 2401, 2403,	2412
100, 2500, 2502,	2510
102, 2601, 2603,	2610
104, 2704, 2706,	2712
106, 2809, 2811,	2816
108, 2916, 2918,	2922
110, 3025, 3027,	3030
112, 3136, 3138,	3140
114, 3249, 3251,	3252
116, 3364, 3366,	3366
118, 3481, 3483,	3482
120, 3600, 3602,	3600
122, 3721, 3723,	3722
124, 3844, 3846,	3844
126, 3969, 3971,	3969
128, 4096, 4098,	4096
130, 4225, 4227,	4225
132, 4356, 4358,	4356
134, 4489, 4491,	4489
136, 4624, 4626,	4624
138, 4761, 4763,	4761
140, 4900, 4902,	4900
142, 5041, 5043,	5041
144, 5184, 5186,	5184
146, 5329, 5331,	5329
148, 5476, 5478,	5476
150, 5625, 5627,	5625
152, 5776, 5778,	5776
154, 5929, 5931,	5929
156, 6084, 6086,	6084
158, 6241, 6243,	6241
160, 6400, 6402,	6400
162, 6561, 6563,	6561
164, 6724, 6726,	6724
166, 6889, 6891,	6889
168, 7056, 7058,	7056
170, 7225, 7227,	7225
172, 7396, 7398,	7396
174, 7569, 7571,	7569
176, 7744, 7746,	7744
178, 7921, 7923,	7921
180, 8100, 8102,	8100
182, 8281, 8283,	8281
184, 8464, 8466,	8464
186, 8649, 8651,	8649
188, 8836, 8838,	8836
190, 9025, 9027,	9025
192, 9216, 9218,	9216
194, 9409, 9411,	9409
196, 9604, 9606,	9604
198, 9801, 9803,	9801
200, 10000, 10002,	10000

Li triangoli dedotti dal numero impari, la serie è la seguente.

3, 4,	5
5, 12,	13
7, 24,	25
9, 40,	41 etc.

Li triangoli dedotti dal numero pari, la serie è la seguente.

6, 8, 10,	12
8, 15, 17,	20
10, 24, 26,	30
12, 35, 37,	42
14, 48, 50,	56
16, 63, 65,	72
18, 80, 82,	90
20, 99, 101,	110
22, 120, 122,	132
24, 143, 145,	156
26, 168, 170,	182
28, 195, 197,	210
30, 224, 226,	240
32, 255, 257,	272
34, 288, 290,	306
36, 323, 325,	342
38, 360, 362,	380
40, 399, 401,	420
42, 440, 442,	462
44, 483, 485,	506
46, 528, 530,	552
48, 575, 577,	600
50, 624, 626,	650
52, 675, 677,	702
54, 728, 730,	756
56, 783, 785,	812
58, 840, 842,	870
60, 899, 901,	930
62, 960, 962,	990
64, 1023, 1025,	1052
66, 1088, 1090,	1116
68, 1155, 1157,	1182
70, 1224, 1226,	1250
72, 1295, 1297,	1320
74, 1368, 1370,	1392
76, 1443, 1445,	1466
78, 1520, 1522,	1542
80, 1600, 1602,	1620
82, 1681, 1683,	1700
84, 1764, 1766,	1782
86, 1849, 1851,	1866
88, 1936, 1938,	1952
90, 2025, 2027,	2040
92, 2116, 2118,	2130
94, 2209, 2211,	2222
96, 2304, 2306,	2316
98, 2401, 2403,	2412
100, 2500, 2502,	2510
102, 2601, 2603,	2610
104, 2704, 2706,	2712
106, 2809, 2811,	2816
108, 2916, 2918,	2922
110, 3025, 3027,	3030
112, 3136, 3138,	3140
114, 3249, 3251,	3252
116, 3364, 3366,	3366
118, 3481, 3483,	3482
120, 3600, 3602,	3600
122, 3721, 3723,	3722
124, 3844, 3846,	3844
126, 3969, 3971,	3969
128, 4096, 4098,	4096
130, 4225, 4227,	4225
132, 4356, 4358,	4356
134, 4489, 4491,	4489
136, 4624, 4626,	4624
138, 4761, 4763,	4761
140, 4900, 4902,	4900
142, 5041, 5043,	5041
144, 5184, 5186,	5184
146, 5329, 5331,	5329
148, 5476, 5478,	5476
150, 5625, 5627,	5625
152, 5776, 5778,	5776
154, 5929, 5931,	5929
156, 6084, 6086,	6084
158, 6241, 6243,	6241
160, 6400, 6402,	6400
162, 6561, 6563,	6561
164, 6724, 6726,	6724
166, 6889, 6891,	6889
168, 7056, 7058,	7056
170, 7225, 7227,	7225
172, 7396, 7398,	7396
174, 7569, 7571,	7569
176, 7744, 7746,	7744
178, 7921, 7923,	7921
180, 8100, 8102,	8100
182, 8281, 8283,	8281
184, 8464, 8466,	8464
186, 8649, 8651,	8649
188, 8836, 8838,	8836
190, 9025, 9027,	9025
192, 9216, 9218,	9216
194, 9409, 9411,	9409
196, 9604, 9606,	9604
198, 9801, 9803,	9801</

dati li triangoli universali di numero pari, e impari, si è già dimostrata la deduzione delle loro ipotenuse
dalla due mezzi aritm.: e controarm.:; dunque relativi Controarm.:; dunque etc.: Vi è qualche
altra formula per dedurli; ma qualunque sia, si trovano sempre o di natura Controarm.:
immediata, o di natura Controarm.: relativa.

Da questo calcolo Controarm.: in forza de' suddetti triangoli si è dedotta la dimostrazione assegnata
nella proposizione ottava de' due termini 97, 129, dalla somma de' quali si sono dedotti li due
termini di Metro 226, 355. Il termine 97 è il preciso medio geom.: (nella scienza presente)

tra 96, 98; cioè tra 48, 49, Centro della Sesquiterza geom.: discreta 42, 56; e però 97
è il preciso medio relativo Controarm.: tra 128, 130, cioè tra 64 mezzo aritm.: 65 mezzo Controarm.:
della ragione 7, 9, ridotta a proporzione geom.: discreta in 56, 63, 64, 65, 72; e però 129 ipote-

nusa del triangolo Pitagorico dedotta dalla suddetta proporzione geom.: discreta. Le due medie
proprie rispettive alle due triangoli suddetti sono; la media propria della dupla 14, 28; ed è
del triangolo sesquiterza, la media propria della dupla 16, 32; ed è del triangolo dedotta dalla

ragione 7, 9. Vannate le due duple suddette ne' loro primi termini $\frac{14}{30}$, ne' secondi $\frac{28}{60}$
si avrà la dupla prima del proprio armonico 60, 30, 20, 15, 12, 10;

dimostrazione patet.: (in questa scienza) della operazione fatta nella somma di 97 con
129 etc.; etc.: E questa indicazione sia di passaggio.

Ma perchè si comprenda meglio l'effetto di questa serie quantità Controarm.:, e de' suddetti triangoli, siano
gli essenzj seguenti sopra il presente impegno, ch'è di dimostrare la ragione (incompleta), in cui
si trova l'apertura di compasso ad $\frac{1}{4}$ di circonferenza; ~~inipidendo la prima~~

Figura VIII

si vagli del diametro AM, come diviso armonicamente, sono cinque, rispettivi a' seni; cioè $A\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}$ M,
come 1 a 1. $A\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$ AM, come 1 a 2. $A\frac{3}{4}$ ad $\frac{1}{4}$ M, come 1 a 3. $A\frac{4}{5}$ ad $\frac{1}{5}$ M, come 1 a 4. $A\frac{5}{6}$ ad $\frac{1}{6}$ M, come

1 a 5. In questo ultimo vaglio di 1 a 5 fu il suo compimento la sestupla, dimostrata altrove
compimento del sistema armonico. E a questo vaglio di 1 a 5 corrisponde, fisicamente, la conta di
tre, fuori, 1, 2, 3. si riduca la ragione 1, 5, a proporzione geom.: discreta, e si deduca con

la regola assegnata il triangolo Pitagorico. La proporzione sarà la seguente; 3, 5, 9, 13, 15
si due mezzi dedotti per il triangolo Pitagorico sono, 7 tra 5, 9; 11 tra 9, 13. la media propria
sarà della dupla 6, 12. dunque un lato sarà la radice di 72, l'altro 7, e la ipotenusa 11.

Ma la dupla 6, 12, è la prima del sistema, perchè proporzione geom.: discreta di semplicità prima;
e però tanto li estremi 6, 12, quanto li mezzi 8, 9, producenti 72 (il che non può verificarsi in
altri triangoli, e non in quelli, che dipendono immediatamente dalla dupla geom.: discreta); e

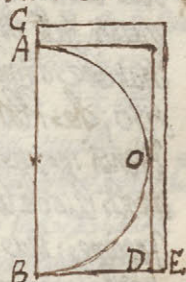
la ragione 7, 11 formata dal lato, e dalla ipotenusa, è la ragione di $A\frac{1}{2}$ di diametro al
quarto di circonferenza AEB. dunque dal triangolo Pitagorico etc.:

data la dupla geom.: discreta 6, 8, 9, 10, 12; supposto (perchè dimostrato) che quadrato, e Circolo
convergono tra loro rispetto a' seni, corde etc.: nella ragione dupla; supposto li due seni $B\frac{1}{2}$, $C\frac{1}{2}$
radici della ragione sesquiterza (demonstrativa: vero, perchè li loro quadrati sono, come 9, 8);

si abbia la differenza (grande assai in questo secolo) di scoprire un momento con li termini

Aristotelica per dedurre una demonstratione. Si supponga la ragione Contrarm.: 10,9, della dupla 12,6, come
potenza di quantità indefinita da ridursi all'atto nella ragione 9,8, vero, e determinato centro della dupla
quadrata, a cui armoniciam^{te} corrispondono li quadrati 9,8, de due termini $B\frac{1}{2}$, $G\frac{1}{2}$; et è innegabile la
determinatione del Circolo tra li due termini suddetti. Da questa ragione Contrarm.: 10,9, come potenza, si
deduca la forma, per cui sia attuale questa la potenza ne due termini suddetti per la ragione 9,8. e cento,
che dalla ragione 10,9, si dovranno sottrarre le radici desquittave, perchè queste sono la forma.
Le radici desquittave di questa scienza sono 33,35. Perchè 33 per 33, 1089. 35 per 35, 1225.
Ma 33 mezzo di 32,34: 35 di 34,36; e 32 per 34, 1088; 34 per 36, 1224; e 1088, 1224, come 8,9.
Dunque etc.: dalla ragione 10,9, sottratta la ragione 33,35, resta la ragione 315, 330: in numeri
simili 21,22. Dunque a paraglio dati li due termini 6,10, della dupla suddetta: 6 primo termine,
e però comune alle due figure, 10 mezzo contrarm.: e sottratta la ragione radicale desquittava
33,35, resterà la ragione 210, 330: in numeri simili 7,11. Ma questa è la ragione dimostrata etc.;
Dunque dalla quantità Contrarm.: etc.:

Questa quantità Contrarm.: (non variante chiamata potenza) sia espressa fuori della unità Circolare,
nel modo seguente. Sia g il diametro AB . Sia aggiunta al diametro la particella AC ,
quale congiunta al diametro in GB , formi col diametro AB la radice della ragione 10,9.
Dedotto dalle due linee radicali il rettangolo rispettivo, sarà il rettangolo GE 10, AD 9.
Sia per la scienza presente (e per Archimede) il semicircolo inscrito AOB al rettan-
golo circoscritto AD , come 11 a 14. Si cerca, in qual ragione si trovano il rettangolo
 GE al semicircolo: sarà il rettangolo GE 140; il rettangolo AD 126, il semicircolo
 AOB 99. Dunque il rettangolo GE al semicircolo, come 140 a 99. Ma 140, 99
sono radici duple. Perchè 140 per 140, 19600; 99 per 99, 9801; ma 99 mezzo di 98,100, producenti con
la moltiplica tra loro 9800, a cui è duplo 19600; e 98,100, come 49,50, centro geom^{te} discreto della
dupla 35,70. Dunque etc.: Ma si è dimostrato, che dalla dupla, come principio universale dedotto
all'infinito etc., procede il sistema armonico. Dunque etc.: Quanto il calcolo di quantità sia instituito
col principio esposto in questa figura, e si riduca alli termini Contrarmonici relativi alla ragione 9,10,
notata a proporzione geom^{te} discreta, si arriverà con somma facilità, e speditezza alle minime
escogitabili differenze: deducendo il calcolo dalla particella AC .



Questa è la famosa particella accennata nel Timeo da Platone, dove tratta della formatione dell'anima
del Mondo; e dove per interpretare li numeri ivi assegnati, tanti Filosofi hanno detto cose ridicole, e
altrimenti l'hanno creduto (e si crede ancora) un fanatismo. Per troppo que tali Filosofi antichi (podipero)
possederanno la scienza fisica armonica. Ma l'hanno tenuta sempre nascosta, e han creduto profanazione
il palesarla. Ma questo non è il luogo, ne il tempo. Volam^{te} si osservi nel citato luogo, che Platone dice;
avendo lasciato lo intervallo di questa particella, che ha li termini di numero a numero, come 256 a 243.
Preso la media aritm^{te} 19 tra 18, 20, e formata la ragione 19, 20, come ragione radicale aritm^{te}
di 9,10, comparata alli due termini di Platone 243, 256, si trova in differenza completa di
1215, 1216. Comparati li due termini di Platone alle radici geom^{te} incomplete, della stessa ragione
9,10 (e sono 64, 721), si trovano in differenza di 2538, 2539, e frazioni. Nel resto di Timeo
(illustrato da Platone) questa particella lasciata fuori è espressa con il numero 380. Questo
è l'identico prodotto della moltiplica di 19 per 20, 380; e si avverte, che 19 è l'ipotenusa del

Triangolo Pitagorico debito dalla dupla geom: discreta. Ma la Cabala di questi tali Filosofi consiste
principalmente nel non assegnar mai in precisione que tali termini, che potessero scoprire ciò che
da loro si voleva occultare. Bensì nelli stessi termini da loro assegnati vi era un doppio significato,
e mistero. Per esempio la differenza sopra risultata è 1215, 1216. Sommare le cifre 1, 2, 1, 5,
la somma è 9; le cifre 1, 2, 1, 6, la somma è 10. Indicano la ragione a priori delle parti
cella, di 9, 10. Divise le stesse cifre nel modo seguente 12, 15 : 12, 16, indicano la pro-
porzione geom: discreta 12, 15, 16, 20. Cosa questa significhi, si vedrà tra poco. Vani: nello stesso
lucido luogo dice Timeo (nel suo testo) che la somma dev'esser 114965 (le stampe fide dicono
114956, ma è fallo della prima stampa; la cifra 6 dev'esser anteposta alla cifra 5, e si
assembra con franchetta, perchè è una demostrazione). Quanto abbiano detto Calcidio, Plutarco,
Aulio sopra questa somma, il Mondo tutto lo sa. Ma certant non vi è cosa nello stesso tempo
più luttuosa, e più ridicola di questa. Perchè da una parte la interpretazione di questi tali
(creduta vera) ha fatto, che il Mondo tutto derivi dal fonte di Filosofia: cosa luttuosa.
+ dall'altra sapendo che sia il mistero, e la Cabala di quei grandi uomini, la interpretazione di
questi tali diventa talmente ridicola, che (con rispetto uomo al rimanente della loro dottrina)
starebbe stimando in bocca di Arlecchino tanto Filosofo. Scovi intanto riflettere nel presente propo-
sito, che Platone, Sommo Geometra, in tutte le sue opere niun uso ha fatto di geom: dimostrazioni.
Bensì in un luogo esalta una certa tal quale Armetica de Filosofi sopra la Geometria; e in
molto luoghi la proporzione geom: discreta, come l'ultimo di tutti li legami. Pur troppo ha
ragione; Ma di questa tale Armetica non si ha, che rimasugli, e indicazioni estrinseche, e però
molto lontane dal bisogno della natura, e significazione intrinseca delle proporzioni geom: discrete.
Non si ha nemmeno un principio d'idea. La scienza fisicoarmonica è posta in precisione sopra
questi fondamenti presententi: ignoti; e però dev'esser vero interesse del tutto Mondo il dar braccio
alla scoperta, e avanzamento de medesimi: tanto più, quanto che la vera scienza delle
Proporzioni (che nello stato, in cui è, si conosce, e confessa mancante da tutti li Geometri) è congiunta
inseparabilmente alla scienza fisicoarmonica, e in senso metafisico è la stessa cosa. Che si speti
mai il suo compimento, se non per questo solo mezzo. Tutto ciò sia detto di passaggio, come di
passaggio si sono dati li esempi dell'effetto prodotto dalla quantità controarmonica, e da
triangoli Pitagorici, giacchè si crede nulla di più esser necessario nell'impegno presente.
Intanto si procede verso la ultima dimostrazione.
Epilogando dunque tutto il finora esposto per la maggior intelligenza di quanto rimane da esporti,
si è di fisico, la scoperta del terzo suono risultante da due suoni (qualunque), e costrutta
la dupla; e lo stesso terzo suono costante in infinito in 2 rispetto alla progressione armonica.
La corda di tre suoni $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, fenomeno già noto. Si due suoni di consenso; nella pelle circolare
desquialteri, come 9 a 6; nel cilindro fusesquienti, come 9 a 12. di dimostrativo si è,
la dupla debita dalla unità, e dal termine infinito. Se due figure, quadrato e circolo, tra
loro comparate per mezzo de fini, e de fini protratti: delle corde, e ipotenuse, in di cui forza si è
sono trovati nel circolo li fini, e le corde costantem: mezzi armonici; nel quadrato li fini protratti
mezi aritmetici, le ipotenuse mezzi controarmonici rispetto alle due progressioni, di prima

semplicità 1 a 1, 1 a 2, &c.; di minor semplicità 2 a 2, 2 a 3 &c.; e in conseguenza si è detto il Circolo
Armonico, il quadrato rispettivamente aritmetico, e controarmonico, perché la ragione eminentissima è della
natura dell'oggetto. La ragione dell'apertura di Compasso ^{alla prima} ~~alla prima~~ circonferenza, dedotta dalla
Scienza presente in forza della Tripla, ragione di Sistema, perché somma de due principj costitutivi
del sistema armonico, duplo, e sesquialtero. La ragione dell'apertura di Compasso ad $\frac{1}{4}$ di circon-
ferenza, dimostrata in forza della dupla, come principio primo assoluto, dedotta da due mezzi, aritm.: 9,
Controarm.: 10 della dupla geom.: discreta. La stessa ragione, dimostrata in forza della ragione 7, 9,
Media tra 5, 7; 9, 11. La stessa finalm.: dimostrata in forza della totale estensione del sistema
armonico, si è la desdupla (ordin.: dimostrato) per li gradi della divisione del diametro di 1 a 1 fino
1 a 5. Il Centro sesquiterzo, come principio a priori, in cui si risolvono tutte le potizioni del Circolo
al quadrato dedotte per poligoni (demonstrato in 7, 11 di Archimede; in 226, 355 di Metio; nelle numeri
identici di Eulers; e nella posizione comune 50, 157). Il calcolo controarmonico, e l'uso de triangoli
Pitagorici, come un fatto, di cui a sufficienza si sono dati segni dimostrativi: non essendo questo il caso
di produrre la scienza insieme. Ciò premesso, e disposto, si discorre così:
Questo terzo suono, che rispetto alla progressione armonica 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ &c.; si trova costante in $\frac{1}{2}$, e di cui
si è scoperta la ragione in AB (figura VIII), è cent.: de nel sistema armonico non si potrà mai
sentire eguale al suono del diametro AM. Perché data la progressione arm.: in AM, $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{3}$ &c.
(Supposte tutte linee sonore) il primo terzo suono si ha dalle due linee $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{3}$, e si ha eguale al
suono di $A\frac{1}{2}$, come 1 a 1; e però primo termine della progressione. Dunque è fisicam.: e dimostrativam.:
impossibile nel sistema armonico aver il terzo suono eguale al suono del diametro AM. Ma la unità
fondamentale del sistema armonico è AM, perché è la prima unità della progressione armonica;
il terzo suono è radice fisicarm.: di questo sistema. Dunque il terzo suono eguale ad AM deve darsi;
perché AM prima unità fondamentale; e questo terzo suono non può dipendere dal sistema, come
armonico semplicem.: perché la unità del sistema, come armonico, è $\frac{1}{2}$. Ma la unità prima in
genere non è AM, bensì $A\frac{1}{2}$ apertura di Compasso, e da questa si deduce AM, come 2,
(demonstrato nella deduzione della dupla dalla unità, e dal termine indefinito); dunque se la potenza
della deduzione di AM sta in $A\frac{1}{2}$, e nel termine indefinito, a giusto ragguaglio nella stessa potenza
deve stare la deduzione del terzo suono eguale ad AM. Pare dunque, in tal caso, che se dato
 $A\frac{1}{2}$, come armonico, e a ragguaglio di ragion dupla il suo centro, o sia mezzo sesquialtero $A\frac{3}{2}$, si ha per
terzo suono $A\frac{1}{2}$; così dato $A\frac{1}{2}$, come aritmetico, e a ragguaglio di ragion dupla il suo centro, o sia mezzo
aritmetico $A\frac{3}{4}$, si deve avere per terzo suono AM. Perché Quadrato, e Circolo convergono nella
ragion dupla rispetto a Sini, corde, &c.: $A\frac{1}{2}$ è eguale a $B\frac{1}{2}$, di è il primo Sino, e assegnandosi ad
 $A\frac{1}{2}$, come armonico, il centro sesquialtero; allo stesso $A\frac{1}{2}$, come aritm.: il centro sesquiterzo; si sono
dedotti questi due centri, o siano mezzi, dalla ragion dupla, e però dedotti dal principio universale.
Tuttociò è vero in $A\frac{1}{2}$, come armonico: nulla di ciò è vero in $A\frac{1}{2}$, come aritmetico. Perché dati $A\frac{1}{2}$,
 $A\frac{3}{4}$ come due linee sonore, il terzo suono è AQ, non AM. Così dev'essere, perché data in suono
la ragione $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, il terzo suono dev'essere $\frac{1}{2}$. Ma $A\frac{3}{4}$ è 3; $A\frac{1}{2}$ è 4 del diametro AM 8.
Dunque non AM 8, ma AQ 6 sarà il terzo suono; perché così $\frac{1}{2}$ a $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$ come 6 a 4, 3.
È dimostrato nella settima proporzione, che il centro sesquiterzo della Tripla si trova eguale
ad $A\frac{1}{2}$, come radice dupla, nel termine comune 7, e però equivoco; e si è purim.: dimostrato

nello stesso luogo, che il centro desquiritzo è primo di priorità di natura (veniva dimostrata, sicam.
 dal Cilindro sonoro, in cui il suono di Consenso, ch'è l'isoleut, e più grave, e però primo, del
 suono naturale del Cilindro, ch'è l'isoleut; e questi due suoni sono tra loro in desquiritzo).
 Dunque non è assegnabile $A\frac{1}{2}$ per aver il terzo suono eguale al suono di AM; ma bensì
 a vagaglio del centro fisico, ch'è desquiritzo di $A\frac{1}{2}$, il centro dimostrativo aritm., ch'è $A\frac{3}{4}$,
 con cui $A\frac{1}{2}$ forma la ragione desquiritza. Il vagaglio del suono di Consenso, o' ha suono
 del centro fisico del dato Cilindro supposto 12 (e però 16 il suono di Consenso) al centro dimostra-
 tivo aritm. di $A\frac{1}{2}$ supposto 12, ch'è $A\frac{3}{4}$ 9, è di evidenza fisica, e dimostrativa. Perché
 il Cilindro suppone innanzi di sé il quadrato, quale girando in se stesso, forma il Cilindro; e però
 il suono di Consenso desquiritzo è indicazione fisica dimostrativa del quadrato, come base, e
 centro del Cilindro: ragione, per cui giustam. il suono di Consenso si chiama suono del Centro.
 Ma supposto il quadrato, come figura prima, e a vagaglio $A\frac{1}{2}$, come lato di un quadrato, non si
 può, né si deve supporre il di lui centro desquiritzo anteriore, e primo di $A\frac{1}{2}$: bensì centro in-
 trinseco attuale dello stesso $A\frac{1}{2}$; essendoti già dimostrato $A\frac{1}{2}$ (come apertura di compasso
 la prima data unità di natura intrinseca aritm. a priori, innanzi di cui nulla si può supporre
 in concreto, né di fisico, né di dimostrativo. Dunque vero il vagaglio fisico, e dimostrativo.
 Ritornando al proposito, ch'è di assegnare dimostrativi: li due termini, da quali si deve dedurre
 il terzo suono eguale al suono del diametro AM, si vede, chiamam. che non è, né può esser vero
 in modo alcuno l'assegnazione in genere di due termini razionali, come si è fatto sopra in
 $A\frac{1}{2}$, $A\frac{3}{4}$ (tentativo proposto in ipotesi per aver occasione di spiegar chiamam. la proposizione
 in tesi). Perché la deduzione di AM diametro è stata per mezzo della unità, e del termine
 indefinito, è chiaro, che a questo vagaglio per dedurre AM stesso, come terzo suono, dov'è assegnato
 un termine razionale corrispondente alla data unità, e un altro irrazionale corrispondente
 al termine indefinito (come si vedrà). Il corrispondente alla data unità $A\frac{1}{2}$ è il suo centro
 aritmico $A\frac{3}{4}$; e si dice corrispondente per modo d'intelligenza. E lo stesso $A\frac{1}{2}$, ma nel suo centro,
 e vuol dire, in maggior precisione di $A\frac{1}{2}$. Perché si domanda in qual modo si deve dimostrativi
 esprimere $B\frac{1}{2}$ di natura armonica, in vagaglio ad $\frac{1}{2}$ B di natura aritm.: non certam. in
 altro modo, e non concependo $A\frac{1}{2}$, come armonico, (eguale a $B\frac{1}{2}$), diviso in $A\frac{3}{4}$; lo stesso $A\frac{1}{2}$
 (però come aritmico, eguale ad $\frac{1}{2}$ B) diviso in $A\frac{3}{4}$; e ciò di necessità dimostrativa, perché $A\frac{1}{2}$
 è inseparabile dal concetto di dupla potenza rispetto al diametro AM, e di dupla aritmica.
 La cosa è chiara, riflettendo, che $A\frac{1}{2}$, come apertura di compasso, e come eguale di natura alla
 data unità al termine indefinito, è solitario, e nel suo principio primo non ha relazione alcuna
 concreta fuori di se stesso; e solam. nella formazione del diametro si rileva a posteriori la sua
 potenza subduple. Dunque conosciuta la ragione dall'effetto, la radice dal prodotto, la re-
 lazione, che deve avere in se stesso, è di centro di ragion subduple, perché questo è la sua
 potenza. Dunque in $A\frac{3}{4}$ centro di dupla aritmica sta la potenza subduple di $A\frac{1}{2}$, con-
 cretata, e spiegata nel diametro AM.
 Resta dunque $A\frac{3}{4}$, come centro di $A\frac{1}{2}$, si osservi in primo luogo, che congiunto con qualsivoglia delle
 linee armoniche $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{3}$, $A\frac{1}{4}$ etc., non ha, né può aver mai per terzo suono AM diametro.

Congiunto con $A\frac{1}{2}$, già si è veduto, che il terzo suono è AQ. Congiunto con $A\frac{1}{3}$, sarà come 9 a 8. Questa ragione ha per terzo suono 36; il diametro AM è 24. Congiunto con $A\frac{1}{4}$, sarà come 3 a 2. Questa ragione ha per terzo suono 3; il diametro a raguaglio è 8. Congiunto con $A\frac{1}{5}$, sarà come 15 a 8. Questa ha per terzo suono 60; il diametro a raguaglio è 40. Insomma, si procederà all'infinito senza incontrar mai per terzo suono il diametro. Ma più. Le ragioni formate dalla congiunzione di $A\frac{1}{2}$ con le linee armoniche soprassegnate, cioè 9, 8; 3, 2; 15, 8 etc.; si suppongano tutte ridotte a proporzione geom.: discosta per l'assegnazione de quattro merzi, armonico, geometrico (secondo questa scienza), aritmetico, e controarmonico. Si dimostra con somma facilità esser impossibile incontrare per terzo suono il diametro, congiungendo $A\frac{1}{2}$ con ciascuno de merzi rispettivi di tutte le suddette ragioni. Non si assegna la dimostrazione, perchè essendoti spiegato nel principio del trattato il terzo suono, intesa la spiegazione, la dimostrazione è facile a chiunque. Supponiam: più. Questa scienza dimostra, qual sia il terzo suono, che deve risultare da due date linee sonore, una delle quali sia razionale, l'altra irrazionale, ma cognita. Per esempio dato il lato, e la diagonale del quadrato, come due linee sonore, si sa per dimostrazione, qual deva essere il terzo suono. Ma questa è una parte non breve della scienza, e però si ommette di estenderla, e spigarla. Intanto si fa responsabile l'Autore (quando si sogni) che dato $A\frac{1}{2}$ Congiunto con qualsivoglia linea irrazionale dedotta o dalle medie proporz. delle soprascennate ragioni, o dalle medie proporz. de loro merzi rispettivi, o quali si vogliano ad arbitrio (perchè cognite), non si avrà mai per terzo suono AM diametro. Si conclude dunque impossibile la deduzione di AM per terzo suono da $A\frac{1}{2}$ Congiunto con qualunque linea nota, o razionale, o irrazionale cognita.

Figura XIII

Si osservi in secondo luogo, che dato lo stesso $A\frac{1}{2}$ Congiunto con AX (e sono tra loro in ragione di 14 a 11 come si vedrà, di è per Archimede, e per la scienza presente la ragione incompleta del Quadrato Circonscritto BD, e Circolo inscritto AOMN) espresso in suono (figura Musicale Congiunta) in $A\frac{1}{2}$ Cossuet, AX elami diesis crescente dal vero*, si ha per terzo suono il diametro AM. Questa è la unica ragione tra tutte le infinite possibili, e la dedotta da queste, 7, 11 (Circolo Circonscritto, quadrato inscritto), in di cui forza si abbia fisicam: (e chiaramente) il terzo suono eguale al diametro. Il fatto è fisicam: certo; si istituiscano quali, e quante esperienze si vogliono, si troverà tale in perpetuo. Ma intanto apparirà contraddizione l'aver nella osservazione antecedente assente impossibile la deduzione del terzo suono eguale al suono di AM da qualunque linea cognita o razionale, o irrazionale, congiunta con $A\frac{1}{2}$, e l'assenire nella osservazione presente che $A\frac{1}{2}$ come 14, Congiunto con AX come 11, ha per terzo suono AM; e così AX 11 con la metà di $A\frac{1}{2}$ 7, di è AC. Non è contraddizione. AX, di è il termine indicante il Circolo, non è solam: irrazionale, ma incognito, e indefinito. Intanto si esprime sopra il Violino, come 11 determinato inquanto il dito del suonatore incontrando molti punti della corda infinitam: prossimi a 11, coglie, e preme quel punto, in forza di cui si ha il terzo suono AM. Si fatto in questa delicata, e sottile deduzione il suonatore non solam: deve averire di cogliere col dito la linea in punto 11 di quantità; ma deve comprimere il dito con tal riguardo, che dalla misurata compressione di un poco più, un poco meno, si deduca l'incontro del terzo suono AM nell'incontro del punto incognito. Il termine 11 è la regola della positione del dito. La misurata compressione del dito è la regola per l'incontro

del punto incognito; e il risultato terzo suono AM è la fisica dimostrazione dell'incontro del punto incognito; perchè finchè non s'incontra, li terzi suoni, che risultano, sono ben diversi, e lontani da AM.

Si osservi finalm^{te} in terzo luogo (figura medesima) in qual sito della linea $A\frac{1}{2}$ si trovi AX, come 11; giacchè il sito nasce da necessità dimostrativa in paragoglio al primo termine sicuro $A\frac{3}{4}$. Per tale osservazione, e primieram^{te} necessario determinare la linea $A\frac{1}{2}$ a quella tal ragione, che sia intrinseca, e inseparabile dalla linea stessa. Ma questa è la ragion dupla, di cui $A\frac{1}{2}$ è in potenza, e di cui è centro aritm^o $A\frac{3}{4}$ già determinato in tal rispetto, e però è già determinata la ragione. Dunque $A\frac{1}{2}$ sia diviso nella dupla geom^o: discreta in $A\frac{1}{2}$ 12, AE 10 mezzo controarm^o; $A\frac{2}{3}$ 9 mezzo aritm^o; $A\frac{3}{4}$ 8 mezzo aritm^o; $A\frac{4}{5}$ 6. Moltiplicati tutti li termini per 14, saranno li prodotti corrispondenti nella stessa figura; e in relazione di $A\frac{3}{4}$ 126, sarà AX 99, perchè così 14 a 11, come 126 a 99. Dunque AX 99 con il mezzo controarm^o AE 140 si trova in radice dupla. Perchè dati 70, 140, estremi dupli; dati mezzi li questi estremi, 98, 100, de quali è mezzo 99, è certo, che come 98 per 100, 9800, così 70 per 140, 9800. Ma 99 mezzo della ragione 98, 100; dunque nelle viene presente mezzo geom^o etc. Dunque il trovare AX con AE in radice dupla, è indicazione dimostrativa del principio duplo radicale, in cui devono convenire tra loro quadrato, e Circolo, per le due progressioni dedotte da Sini, e Sini primari; dalle corde, e ipotenuse, principj delle quali progressioni sono le due linee (figura VIII) B $\frac{1}{2}$, AB, quali sono tra loro in radice dupla. E questa è conferma di quanto si è detto nella spiegazione de triangoli Pitagorici sopra la particella di Platone. Dunque AX si trova nel sito del Centro duplo radicale in paragoglio di AE termine preciso di centro, perchè mezzo della dupla; e di centro trascendente, perchè mezzo controarmonico. Ma ciò succede da necessità dimostrativa, perchè succede in forza di $A\frac{3}{4}$ centro necessario desquienzo della stessa ragion dupla. Dunque in tale operazione si sono ridotti li due termini $A\frac{3}{4}$, AX a loro centri rispettivi, oltre li quali non vi è, ne vi può esser regresso verso un principio anteriore (qualunque).

Poi. Nella ultima proposizione, in forza della tripla somma de due principj costruttivi del Sistema etc. si è dimostrata la ragione dell'apertura di compasso alla semicirconferenza; e la posizione si è dedotta dal centro Sesquitenzo etc. Nella posizione presente de due termini $A\frac{3}{4}$, AX, in cui la ragione di $A\frac{3}{4}$ ad AX si è ridotta al centro primo, è cert^o che non potrà mutar natura di centro rispetto alla tripla, quando siano vere le due dimostrazioni, cioè la qui soprassegnata, e l'assegnata nella settima proposizione. Sia dunque ridotto $A\frac{1}{2}$ a tripla geom^o: discreta (figura medesima) in $A\frac{1}{2}$ 12, $A\frac{2}{3}$ 8, $A\frac{4}{5}$ 6, $A\frac{3}{4}$ 4; e a paragoglio de termini moltiplicati per 7, $A\frac{1}{2}$ 84, $A\frac{2}{3}$ 56, $A\frac{4}{5}$ 42, $A\frac{3}{4}$ 28. Si domanda in qual sito di questa proporzione si trovi AX? Ridotta a proporzione geom^o: discreta (a sesquitenza $A\frac{2}{3}$ 56, $A\frac{4}{5}$ 42, Centro della tripla), li tre mezzi saranno, controarm^o 50, aritm^o 49, aritm^o 48; dunque si trovano AX mezzo tra 50, 49. Moltiplicati questi due termini in 100, 98, sarà AX 99 la precisa ipotenusa del triangolo Pitagorico dedotta dalla proporzione sesquitenza. Dunque AX dimostrato nella settima proposizione somma della tripla armonica, è ridotto nella presente dimostrazione al centro primo della tripla. Dunque vere le due dimostrazioni. Vedete ora che vi risulta AX armonico, e qui relativo controarm^o. E per se chiaro in genere, che ridotto

la ragione dalla circonferenza al centro, il centro dovrà risultare trascendente nello stesso senso, in cui dato per esempio il termine 2 rationale, la sua radice trascende la quantità rationale, e però è irrationale. E per se dicasi in specie (e d'intelligenza comune) che nella convenzione de termini (stando ferma la ragione) il termine rationale diventava irrationale, e così per il contrario. Nella prima proposizione era irrationale, e incognito il termine indicante il quadrato rationale, e cognito il termine indicante il Circolo. Qui è rationale, e cognito il termine indicante il quadrato; irrationale, e incognito il termine indicante il Circolo. ma la ragione è la stessa. Si prosegue, e si domanda in qual soto della tripla medesima sarà il termine $A\frac{3}{4}$? essendo 9 medio di 8, 10: 8 medietà aritm.: 10 medietà contrarim.: della tripla 4, 6, 8, 10, 12 (in numeri primi 2, 3, 4, 5, 6) sarà $A\frac{3}{4}$ 9 la precisa ipotenusa del triangolo pitagorico dedotto dalla proporzione tripla. Dunque non volam: si conferma, ma resta più che dimostrata la indizione de due termini $A\frac{3}{4}$, Ax , alli centri primi, oltre, e sopra li quali non vi è, ne vi può esser regresso, perchè ridotti alla natura relativa contrarim.: nelle due rispettive ipotenuse.

Ma così doveva essere (e però così si trova in risultato) in forza della serie composta di doppia proporzione geom.: discreta, in cui la tripla si congiunge con la dupla nel modo preciso, con cui si è diviso $A\frac{1}{2}$ nella dupla e tripla geom.: discrete. Questa serie composta dipende da numeri quadrati, aggiunti rispettivamente alla proporzione della serie semplice. Per esempio la prima proporzione geom.: discreta della serie semplice è la tripla 2, 3, 4, 6. Si aggiunga il primo numero quadrato 1: sarà la proporzione composta 1, 2, 3, 4, 6; e avrà due centri rispettivi; cioè 2, 3, centro delli estremi 1, 6; e 3, 4, centro delli estremi 2, 6. Così data la seconda proporzione della serie semplice, sarà la dupla 6, 8, 9, 12. Aggiuntovi il secondo numero quadrato 4, sarà la composta 4, 6, 8, 9, 12, e avrà due centri rispettivi; cioè 6, 8, delli estremi 4, 12; e 8, 9, delli estremi 6, 12; e così in infinito. Ma si avverta con importanza somma nel caso presente, che li due mezzi 2, 3, delli estremi 1, 6, ne 2 è armonico, ne 3 aritmetico; e egualm.: in tutta la infinità delle proporzioni composte li due mezzi della proporzione relativa al numero quadrato aggiunto non sono mai ne armonici, ne aritmetici. La sola tripla congiunta con la dupla ha la proprietà singolare di aver li due mezzi arim.: e arim.: perchè (come sopra) 4, 6, 8, 12, come 2, 3, 5, 6; e 3 vero mezzo arim.: 4 vero mezzo arim.:. Indi la sestupla deduce la perfezione del suo periodo, come somma di dupla, e di tripla. Indi Platone ha dedotto la particella lasciata fuori 243, 256, nel modo seguente. Tripla, e dupla congiunte in 4, 6, 8, 9, 12. Moltiplicato 8 in se stesso, il prodotto è 64. Moltiplicati tra loro 6 per 9, il prodotto è 54. Moltiplicati tra loro 4 per 12, il prodotto è 48. Saranno dunque li tre prodotti 48, 54, 64. Moltiplicato in se stesso il mezzo 54, il prodotto è 2916. Moltiplicati tra loro li estremi 48, 64, il prodotto è 3072. Ma 2916, 3072 in numeri primi 243, 256. Dunque così etc.

Più ancora. Il centro massimo includente li due centri della dupla, e della tripla, a cui hanno aggiunti li mezzi rispettivi contrarim.: 5 della tripla, 10 della dupla, è nella ragione super 2 part.: 3. Perchè 3, 4, 5, centro triplo integrale. Ma 8, 10, estremi del centro duplo, eguali a 4, 5; dunque in 3, 4, 5, inclusi li due centri rispettivi. della ragione 3, 5, formata dalli estremi del centro, sono radici

in questa scienza 7, 9. Perché dati li termini 3, 4, 5, Sommati $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$; e da questi due termini si è
 derivata la dimostrazione nella proposizione d'ora: avvertendosi di più, che $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, Sono li due numeri
 fisici di consenso della data corda 1 di un Cembalo, o monocordo. Ridotta la ragione 3, 4, 5, a propor-
 zione geom.^{ica} discreta in 12, 15, 16, 20, due cose sono dimostravanti: Vere. La prima (a priori),
 che il centro di questa ragione (l'intrinseco, e il continuo: non l'estrinseco, e il contiguo) è formato dal
 legame di due sesquiterze; 12, 15, 16, 20; Il che è fuori di disputa, perchè moltiplicati tra loro per
 serie li quattro termini, 12 per 15, 180; 15 per 16, 240; 16 per 20, 320; il progresso de' prodotti 180, 240, 320
 (in numeri primi 9, 12, 16) è di sesquiterza continua. La seconda (a posteriori) che dentro questo centro
 15, 16, è incluso il centro della proporzione geom.^{ica} discreta (in potenza di progressione infinita) del
 Dr. Ceulen, per poligoni, rispettiva al Circolo, e al quadrato, in 3141592 etc. Questa posizione ha
 per confini 30, 31, 32, a cui siano aggiunti tanti zero, quante sono, o si vogliono, le cifre di Ceulen.
 Ma 30, 32, come 15, 16; dunque etc. Che osta, che il termine di Ceulen non possa dimostrarsi
 ne mezzo armonico, ne geom.^{ico}, ne aritm.^{ico}, ne controarm.^{ico} immediato, di questa ragione 15, 16. Si potrebbe
 ben^{no} dimostrare, in qual rispetto di fuori e verso li mezzi dubbi, e verso li estremi, se ciò importasse.
 Ma qui basta per l'intento presente, che vi sia incluso, il che è fuori di disputa; e quel che è più im-
 portante, si è, che dato 5 mezzo controarm.^{ico} della tripla; dato 10 mezzo controarm.^{ico} della dupla;
 dato 20 estremo della proporzione 12, 15, 16, 20, si trovino in vagaglio al centro 15, 16, li tre termini
 rispettivi, del diametro alla circonferenza tra 5, 15: più x tra 15, 16; del Circolo circoscritto al
 quadrato inscrito tra 10, 15: più x tra 15, 16; del quadrato circoscritto al Circolo inscrito tra 20,
 16: più x tra 16, 15. Ciò premesso, si osservi qual effetto produca la congiunzione della dupla, e
 della tripla in $A\frac{1}{2}$ (figura medesima) rispettivamente al diametro AM. Congiungendo $M\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{2}A$, la
 esposizione de' termini sarà la seguente: $M\frac{1}{2} 12$, $ME 14$, $M\frac{3}{4} 15$, $M\frac{1}{2} 16$, $M\frac{1}{4} 18$, $M\frac{1}{8} 20$.
 dunque in $M\frac{1}{2} 12$, $M\frac{3}{4} 15$, $M\frac{1}{2} 16$, $M\frac{1}{8} 20$ risulta la ragione 3, 5, in proporzione geom.^{ica} discreta.
 e nelli due termini $ME 14$, $M\frac{1}{4} 18$, la ragione 7, 9, nasce della ragione 3, 5. dunque conferma etc.
 (A questo luogo rispetto alla proporzione geom.^{ica} discreta 12, 15, 16, 20, si riporta quanto si è accennato altrove
 della particella di Platone disciata fuori nella ragione 243, 256. Poi si è detto, che la ragione diferen-
 ziale 1215, 1216, risultata dalla comparazione di 243, 256, alla ragione 19, 20, indicava nelle
 cifre divise 12, 15; 12, 16, la proporzione geom.^{ica} discreta 12, 15, 16, 20. Nella qui sopradotta
 spiegazione della stessa proporzione si nota, cosa significa; e si tocchi con mano la cabala, e il
 mistero di que tali Filosofi antichi).

Quanto finora si è esposto nelle tre osservazioni, si è cretuto più che necessario alla intelligenza della posizione
 sistematica di $A\frac{1}{2}$ diviso nella dupla, e tripla geom.^{ica} discreta, e della induzione sistematica della
 ragione 14, 11, di $A\frac{3}{4}$, AX , a centri rispettivi della tripla, e della dupla. La conseguenza immediata,
 che nasce dalla intelligenza delle dubbe posizioni, e della conversione delle suddette (per la con-
 giunzione di $M\frac{1}{2}$ ad $\frac{1}{2}A$) nella ragione 3, 5, ridotta a proporzione geom.^{ica} discreta, si è, che la
 posizione di $A\frac{3}{4}$, e di AX , rispetto al sito delle dubbe proporzioni è posizione dimostrativa de
 centri, da quali sono debbiti a priori li due termini $A\frac{3}{4}$, AX , per formar la ragione, in cui
 deve trovarsi il quadrato circoscritto al Circolo inscrito. La conseguenza è evidente. Perché $A\frac{3}{4}$
 è innegabile, come centro naturale di $A\frac{1}{2}$, dimostrato aritm.^{ico} in proporzione di natura, e duplo in potenza

24
 È innegabile, come centro dimostrativo aritm.^o della dupla geom.^o discreta, espressa in $A\frac{1}{2} 12$, $A\frac{3}{4} 9$, $A\frac{1}{3} 8$, $A\frac{1}{4} 6$.
 Ma la ragione dupla è principio a priori (demonstrato); l'apertura di compasso $A\frac{1}{2}$ è per se a priori. dunque
 $A\frac{3}{4}$ loro centro è centro a priori. Equalm.^o si è dimostrato nella settima proposizione AX (indicante il
 Circolo) Somma della tripla armonica, e però 11; l'apertura di compasso, Centro desquiterzo della tripla
 geom.^o discreta, e però $B\frac{1}{2}$. Nella presente posizione si trova AX nel centro desquiterzo (in genere)
 della tripla geom.^o discreta, espressa in $A\frac{1}{2} 168$, $AE 140$, $A\frac{1}{3} 112$, $A\frac{1}{4} 84$, $A\frac{1}{5} 56$: in numeri primi
 6, 5, 4, 3, 2. dunque in genere ridotto al centro della proporzione, di cui è somma relativa. In specie
 si trova nello stesso centro desquiterzo, medio relativo controarmi: (essendo 99 tra 100 mezzo controarmi: e
 98 mezzo aritm.^o), e in relazione dupla radicale al termine $AE 140$, mezzo controarmi: della stessa
 proporzione. dunque in specie è ridotto al centro a priori, perché la relazione controarmi: è relazione di
 quantità trascendente; e ridotto al principio a priori, perché si trova in dupla radicale col mezzo controarmi:
 $AE 140$, e però trascendente. Ma nulla importa, che AX , come 99, sia di quantità incompleta rispetto
 alla sua vera, e completa quantità; Perché sottraendo mezzo relativo controarmi: tra 100, 98, già si sa in
 questa scienza, che la quantità non può esser completa; ma equalm.^o si sa, che la ragione indicata dal
 mezzo è dimostrativa: siccome rispetto alle proporzioni, delle quali la ragione indicata è centro, o
 sia mezzo composto; dunque resta inferam.^o dimostrato, che la posizione di $A\frac{3}{4}$, AX , rispetto al loro
 sito è di necessità dimostrativa, in ragguaglio a centri a priori delle proporzioni, da cui sono debiti;
 in ragguaglio al presente sistema in genere; e in ragguaglio alla prima potenza della ragione, in cui
 deve insubire il quadrato circoscritto al Circolo inscritto, quando dalla potenza de centri sia ridotta
 all'atto la figura rispettiva.

Equalm.^o $A\frac{3}{4}$ indicante il quadrato circoscritto (come 126 ad $AX 99$), convertito in AC indicante il
 quadrato inscritto (come 63 ad $AX 99$), congiunto AC con AX , si avrà per terzo ruono il dia-
 metro AM , nello stesso modo, che data nel sistema aritm.^o in due linee sono la ragione desqui-
 quante $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, si avrà per terzo ruono $\frac{1}{2}$; e convertito $\frac{1}{4}$ in $\frac{1}{8}$, congiunto $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, si avrà per
 terzo ruono lo stesso $\frac{1}{2}$. dunque equalm.^o si dovrà trovare AC centro rispettivo, come si è
 trovato $A\frac{3}{4}$, e a ragguaglio di AC si dovrà trovare AX , come si è trovato a ragguaglio di $A\frac{3}{4}$.
 Così di fatto si trova, perché così dev'essere; e si dimostra. $AC 63$, cioè $A\frac{3}{4}$ convertito in
 AC , si trova tra $A\frac{1}{4} 84$, $A\frac{1}{5} 56$. la sua base essendo $A\frac{3}{4}$ (perché AC debito da $A\frac{3}{4}$), sarà $A\frac{3}{4}$
 inseparabile dalla posizione, e però li termini di necessaria posizione saranno $A\frac{1}{4} 126$, $A\frac{1}{5} 84$,
 $AC 63$, $A\frac{1}{5} 56$. Ma 126, 84, 63 (in numeri primi 6, 4, 3) è indicazione dimostrativa della tripla
 geom.^o discreta 6, 4, 3, 2; equalm.^o 84, 63, 56, (in numeri primi 12, 9, 8) è indicazione dimostrativa
 della dupla geom.^o discreta 12, 9, 8, 6; cotiche aggiunto in AQ il termine $A2$, si forma tra li
 cinque termini 126, 84, 63, 56, $A2$ (in numeri primi 18, 12, 9, 8, 6) la proporzione geom.^o discreta
 doppia: composta di tripla, e di dupla, inventam.^o identica alla dimostrata 4, 6, 8, 9, 12 in $A\frac{1}{2}$.
 e la base è il centro primo $A\frac{3}{4}$; dunque nella conversione di $A\frac{3}{4}$ in AC si è ridotta la pro-
 porzione doppia: composta, espressa in $A\frac{1}{2}$, al suo centro $A\frac{3}{4}$. Ma AC in questa proporzione
 è centro, o sia mezzo di due rispetti: armonico in rispetto tripla, aritm.^o in rispetto dupla. dunque
 non soltanto AC si è trovato in genere centro rispettivo; ma di più si è trovato centro di centro;
 Perché $A\frac{3}{4}$ estremo della dubbia proporzione è per se, centro primo; dunque si è dimostrato che
 ma in questa posizione è un estremo della ragione, di cui è mezzo AC ; dunque AC
 mezzo di mezzo, cioè centro di centro. dunque si è dimostrato etc.

Da questa verità nasce un effetto ben curioso, e ben grande rispetto ad AX. Il termine AC 63 comparato all'apertura di compasso $A\frac{1}{2}$ 168 è in ragione di 3 a 8. Perché si veggia, cosa sia questa ragione, e cosa significhi nel presente sistema, Forvi in memoria la vestigola dimostrata nel corollario del detto dalla quinta proposizione estensione integrale, o sia compimento di periodo del sistema armonico. Sia dunque la sua forma, 1, 2, 3, 4, 5, 6. A questi sei termini si sottoponga la dupla continua in altri sei termini: indicante, et esprimente la ragion dupla, dimostrata radice continua infinita del sistema armonico. Moltiplicati tra loro i termini rispettivi per formar in serie un prodotto, in cui convergano le due posizioni, sarà il prodotto

1	2	3	4	5	6
1	2	4	8	16	32

Il centro locale antim^o della vestigola, di 3, 4, si sarà convertito nel centro locale sottoposto 12, 32. A' è in numeri primi la ragione di 3 a 8; e il perché è chiaro nella dupla sottoposta. Questa è la ragione 3, 8, e questo significa in genere nel presente sistema. Ora si fa sapere al detto Mondo Matematico, che AX si trova talmt^o prossimo ad un termine cubo dovuto dal mezzo armonico del centro geom^o discreto della ragione 3, 8: più un'avanzo dimostrabile, e consumabile invariante: (d'è quella porzione di quantità relativa contraria: inseparabile dal Circolo), che meritavella la fatica (peraltro improba) di avanzare, e purificare il calcolo. Il fatto si è, che di prima semplice deduzione si trova AX in minima differenza dal vero di una particella di $A\frac{1}{2}$ denominata da un numero, che consta di dieci cifre; e la posizione del detto AX come cubo, ha progresso infinito per minorare la differenza. Qui non vi si attende, perché si sa di poter ottenere lo stesso intento molto meglio, e con somma facilità. E volent^o da tale indicazione, che qui si dà di passaggio, e che si provava dimostrativa: vengo, se vi sia la curiosità, o il bisogno, di rilevar la forza, e la significazione in genere de' centri delle proporzioni geom^o discrete, e delle ragioni sistematich: la verità in specie di trovare AX centro relativo della ragione 3, 8, formata da AC con $A\frac{1}{2}$ per la conversione di $A\frac{1}{2}$ in AC.

Se dunque la posizione di AX in primo rispetto ad $A\frac{1}{2}$, in secondo ad AC, è posizione di necessità dimostrativa, perché relativa a centri primi; se dato AX come linea sonora con $A\frac{1}{2}$ come linea sonora (equalmt^o AX con AC) si ha per terzo fuono il diametro AM, non solo resta finalmt^o scoperta la ragione completa, in cui si trova il Circolo al quadrato o Circonsritto, o inscrito; ma di più resta scoperta la ragione, per cui così dev'essere.

Anche in primo luogo se $A\frac{1}{2}$, AX sono posizioni necessarie di centro, equalmt^o il terzo fuono diversa conseguenza necessaria delle dette posizioni. E però AM, come terzo fuono, è un'effetto, un prodotto necessario di una ragione, e radice necessaria in $A\frac{1}{2}$, AX.

In secondo luogo se il quadrato e il Circolo convergono in $A\frac{1}{2}$ semidiametro (demonstrato), equalmt^o devono convenire in AM diametro (evidente). Ma $A\frac{1}{2}$ è il centro rispettivo indicante il quadrato (demonstrato): AX è il centro rispettivo indicante il Circolo (demonstrato); e tra loro non solo convergono nel terzo fuono AM diametro, ma anzi lo producono. Dunque la ragione, per cui il quadrato Circonsritto dev'essere al Circolo inscrito nella ragione, in cui si trova $A\frac{1}{2}$ ad AX, si è la necessità fisica, e dimostrativa di dover non solo convenire tra loro in AM diametro, ma anzi di doverlo produrre. Dunque il terzo fuono AM risultante dalle due linee $A\frac{1}{2}$, AX,

(Come sonore) non risulta da meccanismo semplice, ma da ragion fisica, e dimostrativa; e in conseguenza
Così succede, e così si trova, perché così dev'essere.
Ma ve così dev'esser fisici, e dimostrativi; dunque ne il meccanismo, ne la quantità incognita
di AX osta alla dimostrazione, e nulla affatto regge alla di lei forza. Perché $A\frac{3}{4}$ nel suo rispetto
è termine dimostrativo: completo, e rationale. Dunque sicuro. AX per se incognito, in relazione
ad $A\frac{3}{4}$ diventa cognito, completo, e sicuro, perché con $A\frac{3}{4}$ deve, fisici, e dimostrativi: produrre
per terzo suono AM; e lo deve produrre nello stesso punto matematico di relazione, in cui si trova
1 a 1, ch'è punto d'identità niente meno, che di relazione, perché in tal punto deve trovarsi il suono
di AM diametro al terzo suono prodotto da $A\frac{3}{4}$, AX. Dunque è definibile la ragione, in cui si trova
AX con $A\frac{3}{4}$; ed è quella ragione, che in punto matematico produce per terzo suono il suono del diametro
AM. In conseguenza il meccanismo di questa ragione composta da un termine cognito, e da un
termine incognito, diventa eguale al meccanismo di una ragione composta da due termini cogniti.
Perché date per esempio due linee sonore, che siano tra loro in ragione desqualebena di $\frac{2}{3}$ a $\frac{1}{3}$,
si sa che deve avere per terzo suono $\frac{1}{2}$, eguale, o sia unisono ad $\frac{1}{2}$ in punto matematico. Ma
non però il meccanismo delle due date linee $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, e del terzo suono risultato sarà di tutto in punto
matematico: nello stesso modo, senso, e concetto, in cui data una linea, perché sia divisa in due
parti eguali, il meccanismo del compasso non farà, che la divisione sia in punto matematico.
Io farò bensì la supposta premessa dimostrazione, e sopra la linea dimostrata divisa in due parti
eguali, e sopra le due date linee, prima demonstrate come $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$; e in tal caso si sa egualm^{te} per
antecedente dimostrazione, che date due linee sonore, come $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, hanno per terzo suono $\frac{1}{2}$.
Così parim^{te} il risultato terzo suono $\frac{1}{2}$ non sarà mai perfettam^{te} unisono al suono della linea $\frac{1}{2}$;
vi sarà qualche minima differenza nel più, nel meno, se bene indiscernibile all'udito. Ma si sa, che
ciò nulla significa rispetto al meccanismo della ragione $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, e del risultato terzo suono $\frac{1}{2}$, perché
nulla dev'essere alla supposta premessa dimostrazione, per cui si sa, che il risultato terzo suono $\frac{1}{2}$
dev'essere unisono in punto matematico al suono della linea $\frac{1}{2}$. Il caso è preciso in $A\frac{3}{4}$, ter-
mine cognito, AX termine incognito. Per antecedente dimostrazione si sa, che queste due linee,
come sonore, devono avere per terzo suono il suono identico di AM; così che dato il diametro AM,
come una linea sonora, il terzo suono prodotto da $A\frac{3}{4}$, AX (deboli a vagaglio come linea sonora
dallo stesso diametro) deve risultare unisono in punto matematico al suono di AM diametro.
Dunque nulla importa il perfetto, o l'imperfetto meccanismo, se non per rilevare più, o meno
facilm^{te} il terzo suono. Egualm^{te} nulla importa, che AX sia incognito in tal moto, che non sia
esprimibile, se non per approssimazione in numero, e per approssimazione in linea sonora rispetto
al dito del suonatore. Il suo vagaglio, e necessaria congiunzione con $A\frac{3}{4}$ termine cognito, completo,
e sicuro lo fa egualm^{te} cognito, completo, e sicuro; e la prova fisica dimostrativa si è il prodotto terzo
suono, che si sa antecedentem^{te} dover di necessità risultare eguale al suono di AM. Dunque in forza
del terzo suono si ha la sicurezza della quantità di AX, e in conseguenza si ha finalm^{te} la
quadratura del Circolo, non perché sia nota la quantità completa di AX nel modo comune; ma perché
è nota (come completa) in qualità del terzo suono, ch'è quel moto accennato nel principio del trattato:
modo, che significa molto più, perché spiega la ragione, per cui il quadrato deve trovarsi col Circolo
nella suddetta ragione. In di ne viene, che nel caso presente il suono sia senza parità a miglior

Condizione del numero, della Geometria, dell'Algebra, e di tutte le note scienze di quantità. Perché dati due numeri come numeri, date due linee come linee, date insomma due quantità come quantità, nulla perciò si ha, e nulla succede di realtà fisica. Ma dati due suoni, si ha il terzo suono fisico reale; e in forza del solo terzo suono si può dimostrare, qual deva essere la quantità completa di $A \times C$.

Figura XIV congiunta a figura musicale

In conseguenza (per corollario meccanico) dato il monocordo AB , la di cui corda AB (indicante il quadrato circoscritto) sia C solfaut, e la corda AX (indicante il circolo inscritto) congiunta con la corda AB abbia per terzo suono F solbreut profondo (figura musicale congiunta), quale a C solfaut AB è in ragione dupla desquintenza, sarà quadrato il circolo in AX , come corda di ragione fisicam.^{te} e dimostrativam.^{te} determinata, e completa. Egualm.^{te} data la corda AC , metà della corda AB , e però indicante il quadrato inscritto; dato lo stesso AX , quale congiunto con AC avrà per terzo suono lo stesso F solbreut profondo, sarà quadrato il circolo in AX per la stessa ragione.

AB del monocordo sarà eguale ad $A \frac{3}{2}$ della figura XIII; così AC , AX del monocordo ad $A \frac{1}{2}$, $A \times C$ della stessa figura. $A \frac{3}{2}$ della figura medesima corrisponderà a $\frac{3}{2}$ del semidiametro $A \frac{1}{2}$; $A \times C$ corrisponderà a $\frac{3}{8}$ di un quarto della circonferenza, cioè ABO ; e però si è segnato in AX del quarto di circonferenza ABO . Così AC della figura medesima corrisponderà a $\frac{3}{8}$ del semidiametro $A \frac{1}{2}$; e però la ragione del centro 3, 4, e del centro 3, 8 (centri dimostrati) risulterà meccanicam.^{te} espressa nelle numeratori, e denominatori di quella porzione di linee, che per forza dimostrativa si sono adoperate per la quadratura del circolo.

Le difficoltà, che possono occorrere alla perfetta intelligenza del presente sistema, per quanto appare, si riducono a tre, e sono; Prima, l'aver rapportata la ragione del quadrato al circolo nelle due linee $A \frac{3}{2}$, AX , di $A \frac{1}{2}$ semidiametro. Perché non s'intenderà, come due termini di significazione ben diversa appartengano alla stessa linea. Seconda, l'aver ridotta al terzo suono la conseguenza della scoperta. Perché non s'intenderà, come vi entri questo terzo suono per la deduzione di una tale, e tanta conseguenza. Terza, maggior chiarezza del modo, in cui $A \frac{3}{2}$, AX , devano intendersi centri primi, e in conseguenza una prova dimostrativa più chiara, che siano tali, quali devono intendersi.

Alla prima difficoltà si risponde, che l'eguale della comparazione del quadrato al circolo si è instituito (proposizione quarta, figura VII) in $B \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} b$, come 1 a 1; e queste due unità in forza delle ivi debite progressioni risulteranno come mezzi rispettivi; il che vien dimostrato dalla serie de' seni, e de' seni proiettati. Perché $B \frac{1}{2}$ è come 1, principio della serie de' seni $G \frac{1}{2}$, $D \frac{1}{4}$. Egualm.^{te} $\frac{1}{2} b$ è come 1, principio della serie de' seni proiettati $\frac{1}{3} c$, $\frac{1}{4} d$. Ma li seni $G \frac{1}{2}$, $D \frac{1}{4}$, e li seni proiettati $\frac{1}{3} c$, $\frac{1}{4} d$, si sono dimostrati mezzi rispettivi della progressione, triplice; dunque della stessa natura di mezzi si devono apporre le due unità principj della serie. Dunque se ben sono, come 1 a 1, nonimeno sono inseparabili dalle due unità li due rispetti diversi, che vi sono tra loro in rapporto alla serie, di cui sono principj. Perché $B \frac{1}{2}$ è principio di serie di mezzi armonici; $\frac{1}{2} b$ è principio di serie di mezzi aritmetici; e però è da loro inseparabile quel rispetto, che costituisce la loro natura. Nella figura XIII, in cui fatto si è dimostrato in $A \frac{1}{2}$, è certo, che $A \frac{1}{2}$ è eguale a $B \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} b$ della figura VII;

sono anzi identici tutti, perchè sono tutti la stessa apertura di compasso. Se dunque in $A\frac{1}{2}$ si sono riportati li due diversi rispetti del quadrato, e del Circolo nelli due termini $AB\frac{3}{4}$, Ax , esprimendo quadrato, e Circolo, si sono riportati dimostrativam^{te}; perchè sopra tal linea si è istituito il primo nome; in questa tal linea vi sono intrinseci li due diversi rispetti; e questa è la linea della prima data unita. Si aggiunga, che la institutione del suddetto nome, tutta ha versato sopra li mezzi, che qui si chiamano centri; e questa institutione non è stata arbitraria, ma dimostrativa, perchè fondata sopra quella ragione, e sopra quelle linee, che sono ritrovate comuni al Circolo, e al quadrato. Se dunque si è costituito in $A\frac{1}{2}$ l' nome sopra li mezzi rispettivi, si è operato a rigore di metodo, e potestione matematica; e sarebbe stato paralogismo l'operare altrimenti. Resta a vedere, se le ragioni de' suddetti mezzi rispettivi siano dimostrativam^{te} assegnate, perchè da queste si sono dedotti li mezzi suddetti. Ma è impossibile affatto, che sopra le medesime possa cadervi opposizione; si perchè si sono demonstrate tutte in specie; si perchè in genere sono le costitutive del sistema. dunque resta sciolta intieram^{te} la prima difficoltà in qualunque rispetto.

Alla seconda difficoltà si risponde, che nel presente trattato si prescinde dalla spiegazione del modo, con cui fisiam^{te} si produce questo terzo suono: non altro importante al presente bisogno, ve non? l'effetto, e il risultato. Per altro è debito di chiunque il concepire in genere, che la di lui produzione proviene da due archi circolari di corde vibranti, e intersecanti tra loro nell'aria, come a ragguaglio succede in due vassi gettati nell'acqua. E debito di concepire in specie la ragione del terzo suono nella propostione quinta (figura VIII) dimostrata in AB corda prima del quanto di Circonferenza $ADCB$, qual corda è il principio della serie infinita delle corde radicali arm^{te}; AC , AD etc.; qual corda è radice di $\frac{1}{2}$, in cui costanti risulta il terzo suono delle ragioni della serie arm^{te}; qual corda è il complemento, o sia determinazione dell'arco del quadrante $\frac{1}{2} ADCB$; qual corda ha punto comune in AB , in cui convergono Circolo, e quadrato etc. etc. Basta dunque per il presente bisogno, che il terzo suono sia fisiam^{te}; e dimostrativam^{te} sicuro; che appartenga al sistema armonico; e che sia intrinseco al principio costitutivo del sistema. che sia fisiam^{te}; e dimostrativam^{te} sicuro, e fuori di ogni dubbio. Perchè questo terzo suono, come costante in infinito in $\frac{1}{2}$, avendo per base la serie armonica infinita, combinata di ragione in ragione, cioè di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, producente per terzo suono $\frac{1}{2}$, di $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ producente per terzo suono $\frac{1}{2}$, etc.; la serie per se stessa lo dimostra. In oltre nella suddetta quinta propostione si è già dimostrata la ragione, per cui il terzo suono dee' essere, e deve durare tanto costante in infinito del sistema armonico; e questa ragione è la ragion dupla a priori. dunque il terzo suono è fisiam^{te}; e dimostrativam^{te} sicuro; Appartiene al sistema armonico fisico; ed è affatto intrinseco al principio costitutivo a priori del sistema, ch'è la ragion dupla. Ma in oltre ciò, che con particolar riflessione deve osservarsi in questo fenomeno, si è la sua universalità già accennata nella di lui spiegazione. Essi due suoni (qualunque, eccettuata la ragion dupla) si ha un terzo suono. Data questa universalità, in cui s'includono rispetti alli due dati suoni tutte le ragioni rationali, e irrationali; tutte le progressioni aritm^{te}, geom^{te}, arm^{te}; tutte le

Combinazioni de' mezzi, aritm.^o, geom.^o, aritm.^o, Controarm.^o, e se altri ve ne sono, è cosa più ch'è evidente, che il terzo suono diventa misura fisica comune universale. Ma si è dimostrato il Circolo armonico secondo quelli rispetti, in cui si è dimostrato il quadrato aritm.^o, e Controarm.^o; e il terzo suono è misura fisica comune in qualunque rispetto. Dunque il terzo suono vi entra, come misura fisica comune de' diversi rispetti, in cui si trova il Circolo al quadrato. Dunque vi entra per quel titolo, e ragione, che non si può, né potrà mai contrastare. Che poi questo fenomeno sia stato finora ignoto, e però sia stato impossibile farne uso alcuno, in ciò facilm.^{te} si conviene. Ma scoperto che sia, è intesa la sua forza, e significazione, che però se ne faccia uso fisico, e dimostrativo, il detto Mondo non solam.^{te} lo deve accordare, ma deve avere a buon grado la bilui scoperta, e uso, giacchè da questo dipende una tale, e tanta conseguenza.

Alla terza difficoltà si risponde, che in $A\frac{1}{2}$ apertura di Compasso si sono ridotti al centro primo $A\frac{3}{4}$, $A\frac{1}{2}$. Come potenze, o siano forme di ragione; e però sono due termini per se trascendenti, e metafisici secondo il loro rispetto. Perché non solam.^{te} sono astratti dalle figure, che rappresentano; ma sono rapportati alla natura di linea retta in quel senso, in cui si è dimostrata la natura di linea retta antenore alla natura di linea circolare; e però rapportati a quel principio primo, da cui, come da ragione, forma, radice, Centro, devono procedere le due rispettive figure, nella tal determinata ragione, e oltre di cui non vi è, né può esservi regresso. Così devono intendersi, perché così sono, come si è dimostrato, e qui si dimostrerà più diavanz.^{te}. Che poi per conseguenza ne venga esservi una Metafisica reale, nella scienza intiera del sistema fisico armonico, è cosa ver.^{ma}; e questo è uno de' suoi pregi principali.

Avendosi in concreto nella stessa linea $A\frac{1}{2}$ (figura XIII) li centri armonici attuali, rispetti vi alle ragioni Dupla, e Tripla, dalle quali si sono dedotti li centri primi astratti in $A\frac{3}{4}$, $A\frac{1}{2}$; e dovendo tutti li suddetti centri astratti, e concreti convenire in AM diametro, perché la natura aritm.^o di linea retta nel quadrato, e la natura armonica di linea curva nel Circolo convergono in AM diametro, quando si dimostra, che dalli centri concreti armonici (sopra l'assegnazione de' quali non può cadere dubbio) si deduca per terzo suono AM diametro; e li centri armonici concreti siano dedotti in precisione dalle stesse ragioni, dalle quali si sono dedotti li centri primi astratti, sarà dimostrata la verità de' centri astratti dalla verità de' concreti in tal modo, che non vi sarà mai più luogo a dubbio, e opposizione. Sia però la dimostrazione seguente (figura XIII). Si è dimostrato $A\frac{3}{4}$ Centro potenziale aritm.^o di $A\frac{1}{2}$ apertura di Compasso, come dupolo in potenza rispetto al diametro, con cui forma linea retta; e in conseguenza si è attualm.^{te} dimostrato Centro aritm.^o della Dupla $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{4}$. Si è dimostrato $A\frac{1}{2}$ Centro relativo Controarm.^o di $A\frac{3}{4}$, $A\frac{1}{4}$, Centro composto della Tripla $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{8}$; e dalla congiunzione di queste due linee, come sonore, si ha per terzo suono il diametro AM. Le due linee di Centro arm.^o concreto, rispettive alli due centri suddetti, sono, $A\frac{1}{2}$ Centro armonico della Dupla $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{4}$, come $A\frac{3}{4}$, e Centro aritmico della stessa Dupla $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{4}$. Egualm.^{te} $A\frac{1}{2}$ è Centro armonico di $A\frac{3}{4}$, $A\frac{1}{4}$, Centro Composto della Tripla $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{8}$, come $A\frac{1}{2}$ è Centro relativo Controarm.^o dello stesso Centro Composto $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{4}$. Dunque la deduzione delle due linee di Centro armonico $A\frac{1}{2}$, $A\frac{1}{8}$, è in precisione di Centro alla deduzione delle due linee $A\frac{3}{4}$, $A\frac{1}{2}$. Ma dato $A\frac{1}{2}$ congiunto ad $A\frac{1}{8}$, come due linee sonore, si ha per terzo suono AM diametro. Perché dato $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$,

di ha per terzo suono $\frac{1}{2}$. Ma $A\frac{1}{2}$ 112, e $\frac{1}{5}$; A 96, 96, e $\frac{1}{7}$ di 672, di cui AM diametro
 336 e $\frac{1}{2}$. dunque dato $A\frac{1}{2}$ 112, A 96, 96, congiunti come due linee sonore, si avrà per terzo
 suono AM diametro 336. dunque $A\frac{3}{4}$, A X congiunti, $A\frac{1}{2}$, A 96 congiunti hanno lo stesso terzo
 suono AM, in cui devono convenire. dunque sono vere le due prime proposizioni di centro astratto
 $A\frac{3}{4}$, A X, perchè sono vere le due proposizioni di centro concreto arm.^o $A\frac{1}{2}$, A 96.
 Ma (per corollario) intanto sono vere tutte, in quanto quadrato, e Circolo devono convenire in AM.
 dunque la ragione, per cui il quadrato circoscritto dev'esser al Circolo inscritto nella ragione, in cui
 si trova $A\frac{3}{4}$ ad A X, è la necessaria fisica, e dimostrativa di dover tra loro convenire in AM.
 Ma perchè si tocchi con mano il principio fisico di queste proposizioni di mezzi, che qui si chiamano centri
 non per arbitrio, ma per forza di verità fisica dimostrativa, sia per esempio di posizione fisica
 innegabile la Corda di Metallo tesa sul Cembalo, o sul monocordo, in cui si rilevano li tre suoni,
 1 naturale della Corda tesa, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, suoni di consenso per modo d'intelligenza comune; ma
 in realtà fisica, e dimostrativa suoni de centri, o siano mezzi armonici, $\frac{1}{2}$ di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ di $\frac{1}{2}$,
 già spiegati in questo trattato, come relativi alla sestupla estensione del Sistema armonico, già
 dimostrata; (e in questo senso medesimo si devono intendere li due suoni di consenso, nel diapason,
 o sia Cilindro sonoro, e nella pelle circolare, o sia base del Cilindro, ripartita dal medesimo).
 Questo fenomeno della Corda di tre suoni è universalmente noto, e ricercato (di fatto è vero) e però
 innegabile. Quando dunque si dimostra, che il principio è uniforme in AM diametro (figura XIII)
 Come corda di tre suoni, e Come linea, in cui per terzo suono devono convenire AC, A X,
 (indicanti quadrato inscritto, Circolo circoscritto), si sarà data in tal caso quella tale dimostrazione,
 che nello stesso tempo farà toccar con mano la verità della posizione de centri suddetti, e dovrà
 metter a segno chiunque sopra la verità del presente sistema. Ecco la dimostrazione.
 Per la dimostrata ragione 3, 5, Centro locale armonico della sestupla estensione congiunta con la dupla
 Continua etc. si converte $A\frac{3}{4}$ in AC, quale congiunto con A X ha equalm.^{te} (come $A\frac{3}{4}$, A X congiunti)
 per terzo suono AM. In conseguenza la ragione del quadrato circoscritto al Circolo inscritto,
 14, 11, si converte nella ragione del Circolo circoscritto al quadrato inscritto, 11, 7. dunque il
 principio è uniforme in genere ad AM come corda di tre suoni, e di AM come terzo suono di
 A X, AC; perchè è in genere la sestupla estensione. Sia AM linea tesa sonora 3360;
 avranno li due suoni di consenso $A\frac{1}{2}$ 1120, $A\frac{1}{3}$ 672; perchè così 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, come 3360, 1120, 672.
 Pignieram.^{te} Si osservi, in qual rapporto si trovi AC 630: termine indicante il quadrato inscritto,
 ad $A\frac{1}{3}$ 672: termine indicante il suono secondo di consenso. 630 a 672, come 15 a 16. dunque
 AC 630 con $A\frac{1}{3}$ 672 si trova in quella ragione precisa, che forma il Centro composto della ragione
 3, 5, (inversa di $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, suoni di consenso) ridotta a proporzione geom.^{ica} di sovrà in 12, 15, 16, 20.
 dunque principio uniforme, perchè le due linee compiono lo stesso centro di quella ragione,
 sopra cui tanto si è dimostrato, e osservato nel trattato presente; e non vi è luogo a dubbio,
 perchè le due linee suddette sono di quantità razionale, e però cognita, e determinata.
 Secondariam.^{te} si osservi, in qual rapporto si trovi A X 990: termine indicante il Circolo circoscritto,
 ad $A\frac{1}{2}$ 1120: termine indicante il suono primo di consenso. Essendo li due termini in numeri

primi 99, 112, per la differenza 13 si trovano tra loro in ragione di $7 : \frac{8}{13}$, a $8 : \frac{8}{13}$; ragione
 prossima a 15, 17. Comparata la ragione 99, 112, alla ragione 15, 17, si trovano tra loro
 in differenza completa della minima ragione 560, 561. Ma la ragione 15, 17, è formata
 dal centro, o ha mezzo arit.: 15, e dal controarit.: 17 della stessa proporzione geom.: discreta
 12, 15, 16, 17, 20. Dunque principio uniforme tra AX, $A\frac{1}{2}$, come tra AC, $A\frac{1}{2}$. Se ora,
 che la ragione 99, 112, si trovi in differenza di 560, 561, alla ragione 15, 17, anzi conferma
 molto più la dimostrazione. Siano le radici duple di questa scienza 17, 24 (altrove spiegate),
 a cui sia sommata la ragione 9, 10 (composta dal mezzo arit.: 9, e dal controarit.: 10 della dupla
 geom.: discreta 6, 8, 9, 10, 12). Sarà il risultato 153, 240: in numeri primi 50, 81. Comparata
 la ragione 50, 81, alla ragione 7, 11 (AC 7, AX 11) risulta la stessa differenza 560, 561.
 Dunque principio uniforme. Ma non basta. L'assegnazione delle radici duple 17, 24, a cui
 sia sommata la ragione 9, 10, è indicazione dimostrativa del principio universale del sistema,
 ch'è la ragion dupla. Ciò è fuori di disputa, perchè tutti li termini assegnati sono della dupla
 geom.: discreta. Il termine 17, ch'è mezzo controarit.: della proporzione geom.: discreta
 12, 15, 16, 17, 20, equalm.: è mezzo geom.: (in questa scienza) della dupla 12, 24, come medio
 tra 16, 18 (altrove dimostrato); et equalm.: è lato del triangolo Pitagorico dedotto dalla dupla geom.:
 discreta in che 72, come un lato; 17, come un altro lato; 19, come la ipotenusa (altrove demo-
 strato). Dunque ridotto il calcolo alla quantità contrarmonica, data la proporzione geom.: discreta
 della ragione 9, 10, base, e radice della ipotenusa 19 del triangolo, sarà 342. m^o 360
ant^o 361
contro 362

dedotti li due termini per il triangolo Pitagorico, e però duplicati li mezzi 360, 361, 362 in
 720, 722, 724, saranno li dedotti 721, 723: 721 lato, 723 ipotenusa, e l'altro lato sarà
 di 1444, cioè la metà propria della dupla 38, 76, in numero primo 19. Il termine AX,
 ch'è 99, e però come 11 di Archimede, si riduce con tutto il calcolo (a vagaglio) a 355 di merito,
 come termine più prossimo al vero. Sarà $A\frac{1}{2}$ 253120, $A\frac{1}{2}$ 151872; e sono li due termini
 di consenso $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$. AC a vagaglio sarà 142380, AX 223650 (AC quadrato in scritto,
 AX circolo circoscritto, equali a 226, 355 di merito). Comparata la ragione 223650, 253120,
 alla ragione 15, 17, si trovano tra loro in differenza della ragione 723:5; 724:5. Dunque in
 differenza completa di 2617983, 2617984, dalla ragione 723, 724, formata dal mezzo
 controarit.: 362 duplicato in 724, e dal termine della ipotenusa 723. Dunque dal termine
 19, quale con 17 forma il triangolo Pitagorico della dupla geom.: discreta, sottratta la ragione
 723, 724 (et è l'eccesso controarit.: di 19 in 361 duplicato in 722, rispetto alla ipotenusa
 723, e mezzo controarit.: 724), e a vagaglio riportata la sottra in 17, relativo in primo
 luogo a 19, in secondo luogo a 15, si trovano tra la ragione 223650, 253120; e la
 ragione risultata dalla sottra di 723, 724, al termine 17 congiunto con il termine 15
 (et è 10860, 12291: in numeri primi 3620, 4097) l'affatto minima ragione differenziale arit.:
 poleta 2617983, 2617984. Dunque principio uniforme, si perchè sottratto l'eccesso sco-
 perto in 17, come relativo in primo luogo a 19, e come per se mezzo geom.: eccedente li termini

12, 24, congiunto col termine 15 resta in affatto minima differenza dalla ragione 223650, 253120;
 e perchè la minima ragione differenziale 2617983, 2617984, essendo completa, è indicazione
 dimostrativa nella scienza delle proporzioni di principio uniforme delle due ragioni comparate.
 Non basta ancora. Si vuol vedere, in qual differenza siano tra loro queste due ragioni, $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$,
 ragione de due suoni di consenso; 11, 7, ragione di AX, AC. Sottatto da $\frac{3}{5} \times \frac{5}{11}$
 resta $\frac{35}{55}, \frac{33}{55}$.

Ma nella ottava proposizione si è dimostrata la ragione 3, 5, in 6 primo termine della dupla
 geom.^a discreta, e in 10 suo mezzo controarm.^o Come ragione di potenza, da cui si deduce
 la forma 7, 11, sottraendo dalla medesima le radici della ragione 9, 8, demonstrate 35, 33; dunque
 principio uniforme fisico, e dimostrativo tra li due suoni di consenso $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$, e li due termini AX, AC.
 Ma la conseguenza equalm.^{te} è di principio uniforme, e lo è fisicam.^{te}. Perchè AM, come suono 1,
 ha fisicam.^{te} per suoni di consenso $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}$. AX, AC, come 11, 7, di principio uniforme con li suoni
 di consenso, ha fisicam.^{te} per terzo suono AM; e però principio, e conseguenza uniforme.
 Dunque vere le proposizioni dimostrativam.^{te}, e fisicam.^{te}. Si rifletta, e si metta sopra questa ultima
 dimostrazione quanto mai si sa, e si può, perchè ben intesa che sia, basta abbondantem.^{te} per
 convincer chiunque della verità fisica, e dimostrativa del presente sistema in genere, e di quanto
 si è condotto in specie, e precisione, di che la quadratura del Circolo.

Cioè le tre difficoltà che appartengono immediatam.^{te}, e intrinsecam.^{te} al sistema fisicoarm.^o; e alla di
 cui scienza, non si sa dall'Autore, quali, e quante obiezioni possano proporsi dalle altre scienze
 dimostrative, Geometria, Algebra, etc. Come non possiede le medesime, così in loro rispetto non ne
 prevede, che tre sole. La prima è la Comparazione, che si è fatta, e fondata del quadrato al
 Circolo in forza de punti, e linee comuni, in cui convergono Quadrato, e Circolo. Questa com=
 parazione non è particolare, e sola di queste due figure; è del triangolo equilatero inscritto,
 e circoscritto al Circolo; è de rettangoli detti; è in genere dell'infinita serie de poligoni.
 Questa obiezione (se si facesse) è distrutta dall'assunto. Si assume di comparare quadrato, e
 Circolo, e non alcun'altra figura, perchè ciò che si cerca, è tra quadrato, e Circolo. Dunque
 punti, linee, e ragioni comuni al quadrato e al Circolo devono esser il fondamento della Comparazione.
 La seconda obiezione, che certam.^{te} si credeva insolubile, si è, che non si è mai dimostrata la precisa
 completa quantità di AX (figura XIII), ne mai si dimostrerà dalla scienza fisicoarmonica, come
 non si è ancora dimostrata ne dalla Geometria, ne dall'Algebra, ne dal calcolo degli Infinitesimi.
 Questo è ciò che si cerca in precisione, e identità, e non l'approssimazione, che a bastanza è nota
 per poligoni. Questa difficoltà, se ben si concepisce il caso, in cui si è presentem.^{te} (sia detto
 con tutta venerazione, e rispetto verso le altre scienze, e verso li Professori delle medesime) diventa
 una cosa puerile. Perchè è bensì vero, che giova al caso presente, una scienza dimostrativa
 (e'è la Geometria) per indicare AX nella sua maggior approssimazione alla vera quantità.
 Ma questo è lo stesso, che aver bisogno di un ottimo compasso per descrivere un Circolo più
 rettam.^{te} che sia possibile. E si vuol dire (con verità, e chiarezza) che la Geometria è il
 meccanismo migliore per la materiale operazione suddetta. Ma la dimostrazione non nasce
 in specie di far questa comparazione sul fondamento della ragion hydra comune alle due figure.
 Non vi sono, ne possono esservi altre figure, in cui succeda lo stesso.

da questo principio. Nasce dal principio di aversi dimostrativam^{te} cognito il tempo suono AM, che deve
esser prodotto da AX (incognito quanto si vuole) congiunto con $A\frac{3}{4}$ cognito dimostrativam^{te}. Dati
in tal caso due termini dimostrativam^{te} cogniti, resta cognito il tempo, e lo resta in tal modo, che
procedendo per esempio il dito del suonatore sopra il diametro AM dal punto cognito di $A\frac{3}{4}$ (già
supposto suono stabile del termine cognito) per tutti li punti della linea differenziale $\frac{3}{4}X$, ne
quali non s'incontrerà mai il tempo suono AM, quando arriva in X, e incontra il punto (e
di necessità fisica, e per di via esperienza s'incontra), quale con $A\frac{3}{4}$ fia per tempo suono AM
e non solo fisicam^{te}, ma dimostrativam^{te}. Ricordo di aver incontrata la completa quantità di AX;
e in tal operatione meccanica non vi è nemmeno bisogno di approssimatione o poca, o molta
alla vera quantità di AX, perchè per antecedente dimostrazione si sa, che AX è racchiuso
in X dalla ragione 49, 50; e si sa esser impossibile esservi alcun punto della linea 49, 50
che congiunto con $A\frac{3}{4}$ abbia per tempo suono AM. La fisica operatione dunque del suonatore,
il compasso, et equalm^{te} la Geometria sono nel caso presente meccanismi tutti, tra quali è a
miglior condizione il suono, perchè dalli due suoni si ha il tempo, in cui sta tutta la forza
della dimostrazione. E perchè si abbia vera, e concreta idea della cosa, sia AX per la
demonstratione di questa scienza chiuso in X dalla ragione 49, 50; fia equalm^{te} chiuso per la
demonstratione de poligoni dalla ragione di Archimede 1561, 1562; dalla ragione di Cuden
di cifre 24 nelli due ultimi termini 6, 7; e de si vuole, da quella di cifre 36 nelli due ultimi
termini 8, 9, e di quante siano mai possibili. Si conviene, che ne per la Geometria, ne per
alcuna delle nove scienze di quantità, ne per la scienza fisico armonica (quando però AX
non si trovi cubo armonico del centro della ragione 3, 5, nel modo già indicato) si dimostrerà
mai il punto matematico della completa quantità di X dentro la ragione 49, 50 di questa
scienza; 1561, 1562 di Archimede; 6, 7 ultimi termini della ragione di Cuden di cifre 24 et
Vi entra in mezzo la scienza fisico arm^{te} con un principio affatto diverso della principi
delle altre scienze, e dice (e lo prova fisicam^{te} e dimostrativam^{te}); Il punto matematico
della completa quantità di X dentro tutte le suddette ragioni è quello, che adattata
al suono la linea AX indeterminata, e incompleta, è congiunta con la linea $A\frac{3}{4}$
demonstrativam^{te} completa e determinata, sana dimostrativam^{te} determinato dal ri-
sultante tempo suono eguale al suono di AM in punto matematico, cioè come 1 a 1.
Questa è la vera idea del caso, in cui si è presentem^{te}; e in forza di tal verità la
obiectione è un nulla affatto. Ma si dirà, come si sa la ragione, se non si sa la
quantità nel modo comune? si risponderà, che si sa ben^{mo} la ragione in forza del tempo
suono, et si sa di più la ragione della ragione. Ma qual colpa è dell'Autore, se il detto
Mondo crede, che dalla quantità proceda la ragione, e non dalla ragione la quantità?
Chi lo ha obligato a così credere? Non certam^{te} principio alcuno dimostrativo, ma
solam^{te} la idea materiale, che si è fatta comunem^{te} della quantità senza aver mai
formata vera idea della ragione. Dispiace all'Autore, e si manifesta di dover toccare

questo punto in faccia al detto Mondo: punto di troppa importanza, e che significa infinitamente più di quello apparisce nel proposito presente. Intanto, giacché si è al nodo della massima delle cose importanti, e si tratta di scioglierlo, sarà pensiero non dell'Autore, che con franchezza libera da qualunque timore assensisce ciò che intende di poter e saper dimostrare, et è che la ragione è prima della quantità, ma sarà pensiero del detto mondo di sciogliere il nodo presente, di che si esservi dimostrata la ragione indipendentemente dal termine Componente la ragione, e in conseguenza della ragione dimostrata vaperti dimostrativi: quel deve essere la quantità del termine senza concretarla nel modo comune. Per altro ciò nulla osta alla quadratura del Circolo, il che è chiaro. Qualunque vettta linea materialm; prossima alla vera quantità di AX, denominata da AX come produttore con $A\frac{1}{2}$ il terzo suono AM, serve alla dimostrativa quadratura del Circolo.

La terza obiezione, che accadrà facilment, sarà il poter si ridurre le ragioni e proporzioni particolari, che qui si sono adoperate per dimostrare quando si è proposto, a principj Algebratici; et egualment, quel poco e semplice uso, che qui si è fatto di Geometria comune, a Geometria sublime: quasi che si pretendesse di ridurre la scienza fisicoarmonica all'Algebra, o Geometria; e in conseguenza quanto si è qui esposto, dipendesse, o potesse dipendere da altri principj. Non s'ingannino li dot^{ti} Matematici sopra questo punto, e sospendano il giudicio fino alla produzione dell'intero Sistema. Allora vedranno chiaramente, che questa scienza è affatto indipendente da qualunque altra scienza, et ha il suo principio, e fondamento affatto diverso da qualunque altro principio. Si vale bensì della Geometria, e del numero comune aritmetico, di cui principalment^{re} fa uso, come Segno indicante ragione, proporzione, e progressione; ma per tal uso ha la sua scienza particolare, di cui qui si sono dati que soli indizj, et esempj, che si sono creduti sufficienti, e necessari al disegno. Il sistema intero non è necessario all'assunto presente, se ben l'assunto è debito dal sistema. Si premette, e si separa questa di lui parte (per buona sorte separabile), acciò rilevata la verità, e la importanza di questa, sia in conseguenza desiderato dal detto mondo il sistema intero, in cui si trovavano certam^{te} cose assai più importanti, se ben la presente finora si è creduta la important^{ma} di tutte.

Non si vuole poi credere in modo alcuno, che siccome l'Autore sincerament^{re} confessa di non altro sapere di Geometria, se non quel poco, che diventa necessario al presente sistema, e d'Algebra nulla sapere affatto; coti potendosi, e anzi dovendosi trovare in questo trattato o pochi, o molti error materiall di lettere, figure, e termini adoperti (non avendo visto l'Autore valersi di alcun Geometra per la correzione) di sia in conseguenza imputato a ignoranza e di formi concetto suo fagioso dell'Autore, e del sistema. Questo pregiudicio non deve cadere in uomini di Spirito forte; anzi per il contrario riflettano, che deo esser molto chiara, e molto fondata quella verità che ha condotto a mano un uomo ignorante alla sua scoperta. Si attenda dunque, alle cose, e non alle parole. Se le cose sono vere, è facile emendar le parole, e li segni.





demonstratione universale del sistema

Figura XV

Nella vecchia proposizione, figura X, si è dimostrato il centro del quadrato, l'esquiduzo radicale, e la costruzione della figura è nelle due unità, quadrato, e Circolo. Nella proposizione settima, figura XI, si è dimostrata l'apertura di compasso come 49, in precisione di centro aritm.: sequisetizzo. Nella stessa proposizione si è dimostrato, che 49 deve alzarsi verso 50, perché come 49, manca in rispetto a 154. In conseguenza si è dimostrato, che il calcolo aritm.: indicato da 49 merco aritmetico si deve ridurre al calcolo contraritm.: indicato da 50 merco contrarmonico. Nella stessa proposizione si è dimostrata la identità de due termini, 49, 50, come mezzi di proportionione geom.: discreta della dupla 35, 70, di cui sono radici 5, 7, 10, con 49, 50, merco della l'esquiduzo geom.: discreta 42, 48, 49, 50, 56; e vi parimenti si è dimostrata l'azione delle radici duple, 5, 7, nella risoluzione de' due termini differenziali 2485, 2486, come mezzi rispettivi all'esterna 2450, 2520. Finalm.: si è ivi dimostrato che li due termini 49, 50, in priorità di natura appartengono alla sequisetizzo.

Nella Figura XIII, in cui si è assegnato il centro aritm.: di $A\frac{1}{2}$ in $A\frac{3}{4}$ sequisetizzo di $A\frac{1}{2}$ come relativo al quadrato, si è trovato, e dimostrato il centro AX relativo al Circolo tra 49, 50. E però come, nella loro superficie si è trovata (figura XI) l'apertura di compasso indicante la linea retta tra 49, 50, e la linea circolare, somma della tripla armonica; così in questa figura XIII, in cui le superficie si sono ridotte alli centri, si trova la linea retta nel suo centro sequisetizzo, e la linea circolare si trova nel suo centro tra 49, 50, come centro tra: tendente della tripla. E in forza di questi due centri espressi dalle due linee $A\frac{3}{4}$, AX, doppie linee sonore, si è trovata, e dimostrata la quadratura del Circolo nel risultato senz'alcun AM diametro. Questo è tutta la sostanza fisica e dimostrativa del presente trattato, oltre di cui nulla vi è di più, o di meno rispetto alli due generi, fisico, e dimostrativo, fondamenti del trattato. Tutto ciò si dimostra con una sola dimostrazione geometrica, in cui identicam.: ed inanimam.: è inclusa tutta la sostanza del trattato: non essendovi altra differenza, se non che la de la Geometria comune non avendo forza di dimostrare li centri componenti, e però non potendo dimostrare, se non le superficie de' centri composti (a differenza della scienza fisica aritm.: si è fondata sopra li centri componenti), la presente dimostrazione, come prima geometrica, dimostra in superficie tutto il trattato in una sola figura.

Figure XV

Figura XV. Essendosi nella scienza presente dimostrato (figura XI, prop. 7) l'apertura di compasso, come 49, sarà AE 49, e in conseguenza NO 49, perché eguale ad AE. Nella stessa 7.^{ma} propos.^{ne} essendosi dimostrato, che bisogna alzare 49 verso SO terminando contro arm.^a e però escluso dal Circolo sia NG 50. Essendosi dimostrato nella figura XIII il centro anm.^o Sequenza di AE apertura di compasso, e ruggaglio sia il centro Sequenza di NC 50. Sarà NS $37\frac{1}{2}$, perché $37\frac{1}{2}$ a 50, come 3 a 4. e perché non habbano fractioni, sia in numeri interi NO 98, doppio di 49. NC 100, doppio di 50. NS 75, doppio di $37\frac{1}{2}$. Il diametro AB sarà il doppio di AE 98. dunque sarà AB 196. da questa semplice sistematica posizione, che il presente sistema è vero deve dimostrarsi: dedotti il seno pro-
duttore della ragione del Circolo al quadrato nella ipotenusa del triangolo formato dal seno, e dalla rispettiva porzione del diametro. E deve dedotti immediatamente senza circuitos di calcolo, e di figure; e indipendentem.^{te} da poligoni, o da qualunque altro mezzo, e metodo geometrico. E ciò si verifica, di verità di necessaria consequen-
za fatto il sistema; Si verifica in modo, forza, e chiarezza tale, che non v'ha non
ci resti mai più luogo a dubbio alcuno: effetto naturale di qualunque dimostrazione.
Ma di più sia obbligato qualunque Geometra, vedendo principiare, intendere tutto
il sistema in forza di questa sola geometrica dimostrazione.

Il rino dunque per immediata demonstratione deve nascere dal centro desquierez, perche
anco il rino è intrinsecant: centro, ne può darsi rino, ve non come centro di propor-
tione. Ma NS è il centro desquierez. dunque condotta una retta da Sin D, sarà
il rino dedotto e dimostrato VD. In conseguenza sarà formato il triangolo rettangolo
BDV, e BV sarà la ipotenusa, in cui dovrà verificarsi la ragione del Circolo al
quadrato tra BV e BA diametro. NS è $\frac{3}{4}$ di NC. Ma NC è 100, dunque
NS è 75. Ma AD è eguale a NS, dunque AD 75. Il diametro AB è 196.
Stratto 75 da 196, resta 121. dunque DB 121. Moltiplicati tra loro 121, 75,
il risultato è 9075; dunque il quadrato del rino VD è 9075. Il quadrato di BD 121
è 14641. Sommati li due quadrati di DB 14641, di VD 9075, il risultato è 23716;
dunque il quadrato di BV è 23716. Ma la radice di 23716 è 154, perche moltip-
licato 154 per 154, il prodotto è 23716; dunque BV è 154. Condotta per il circolo
V in X, sarà BX eguale a BV 154. Ma il diametro AB è 196, XB è 154:
in numeri primi, 14, 11. e la ragione del quadrato Circonscritto al Circolo inscritto per
la demonstratione di Archimede del tutto da poligoni è di 14 a 11; dunque resta ve-
rificata la posizione, e in conseguenza tutto il Sistema presente.
Ma tutto il presente Sistema è fondato nel suo principio a priori sopra la ragione tripla
e sopra la ragione desquierez; e la linea NC divisa in S forma identica.

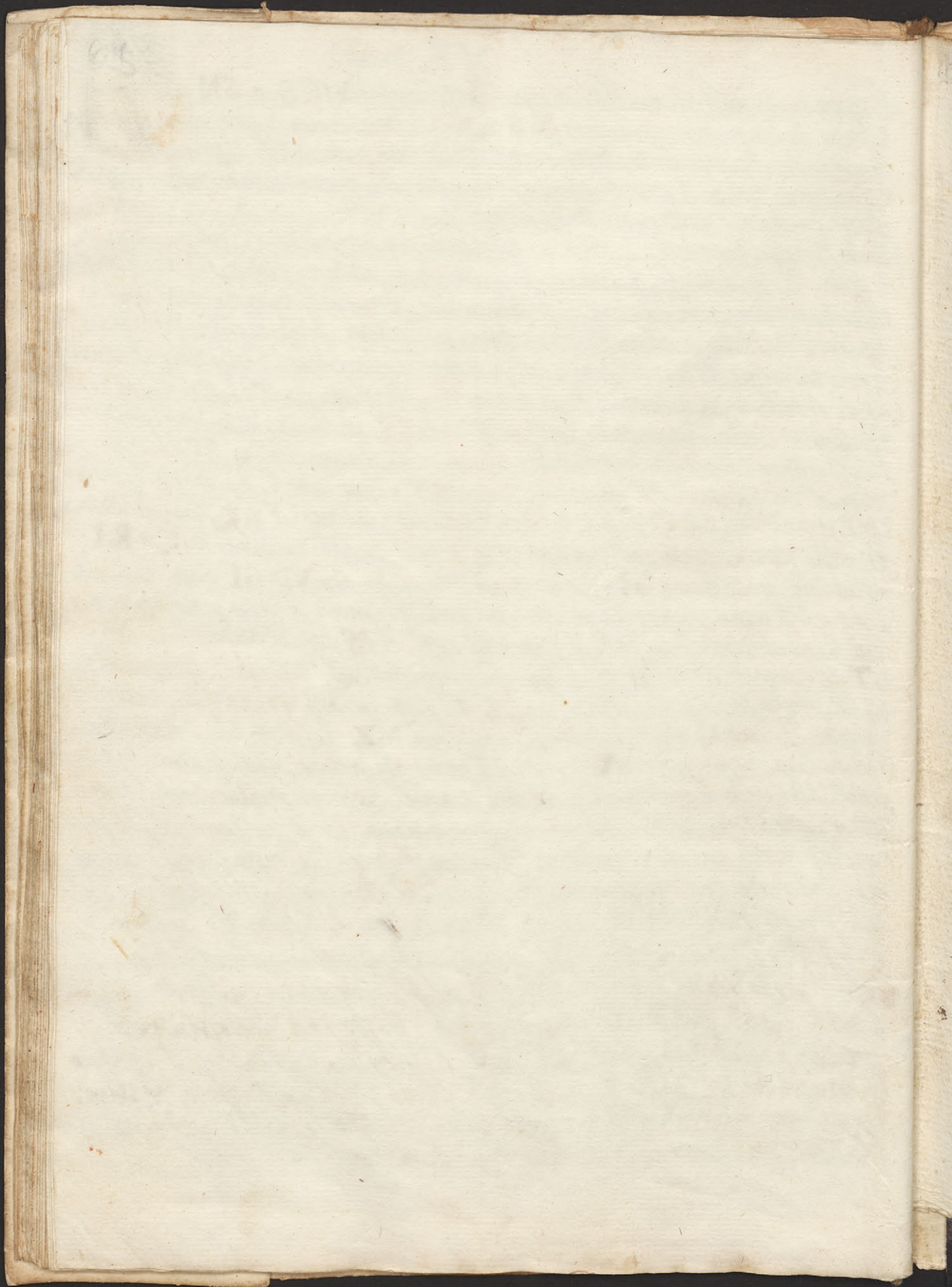
la ragione tripla, e la ragione desquienza. Perché comparato GS a SN è come 1 a 3;
e però ragione tripla: comparato NS a NO è come 3 a 4, e però ragione desquienza.
Dunque nella figura rubella resta identica: espresso e dimostrato il principio a priori
sopra cui è fondato il presente sistema. Dunque nella figura rubella resta dimostrato
il principio, mezzo, e fine di tutto il sistema.

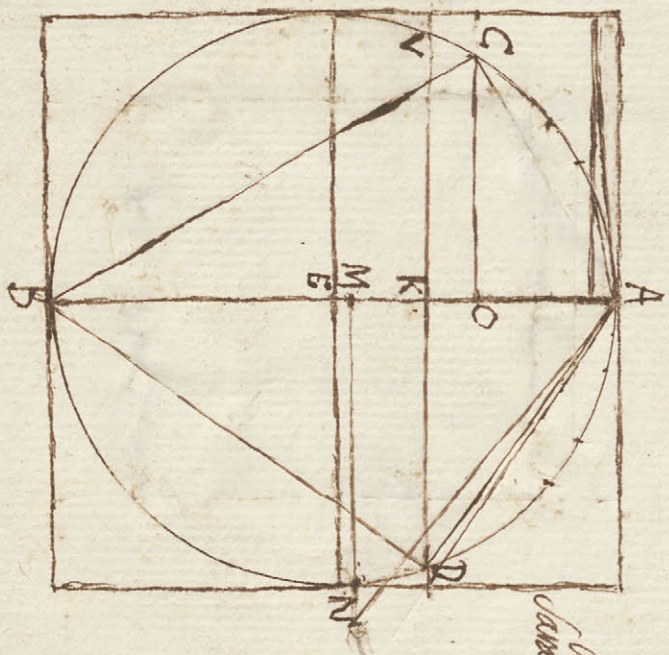
Quando si voglia la possibile quadratura del Circolo per mezzo della Geometria comune,
sappiano li Geometri, che questa è la figura, e la posizione identica de termini
necessarij. Chi possiede la scienza psicoarmonica non ha bisogno di questa inutile
fatica: il che è troppo chiaro dalla risultata quadratura psico dimostrativa del
Circolo in forza del rapporto; e di vuol dire in forza della scienza psicoarmonica.

Se poi si vuole o per curiosità, o per bisogno la quadratura geom.^a nella figura
medesima si conduca una retta da G in F; sarà FE 48; e indicherà dimostrativam.^{te}
il mezzo armonico della desquienza geom.^a discosta, come AE il mezzo aritm.^o 49, AT il mezzo
geometrico 50. (S'intende AF eguale a GO, e ad ET). Fatto centro G, sia descritto il Circolo
LMZH, di cui il raggio è GM $\frac{1}{4}$ di GA. Vant'interseca la linea GF in Z, la quadratura
del Circolo resta dimostrativam.^{te} tra GM CZ, cotiche condotta una retta da Z in RI,
per cui sarà formato il seno GI, dimostrativam.^{te} tra li due seni VD, GI sarà determinato
il confine dell'eccesso, e difetto della quadratura geom.^a del Circolo. Il primo passo dimostrativo
sarà il condurre una linea da G al punto medio aritm.^o di AF, cotiche tra questo punto,
e T sia costituita la linea, come 99, quale dimostrativam.^{te} indicherà la ipotenusa
99 del triangolo Pitagorico desquienza, come E, et il punto indicherà 97 lato dello stesso
triangolo. La linea G, et il disposto punto intersecherà MZ. dal punto della intersecazione
si conduca un nuovo seno tra GV. Questo è il fondamento prossimo della quadratura
geom.^a del Circolo, e in forza di questo seno si rende possibile la consumazione integrale
della quantità differenziale. Qui non si espone il calcolo, perché questa non è la inten-
zione dell'Autore, ne la proposizione del presente trattato. Ma basta per il medesimo
che il fondamento geom.^o resta incognito, dipenda dalla scienza psicoarmonica, e
dalli principi primi, sopra quali è costituito questo trattato e in forza
de quali si è scoperta la quadratura psico dimostrativa nel terzo libro.

Edam.^{te} per la prova della verità della rubella proposizione, e perché si appia
il metodo geom.^o relativo alla scienza presente, in forza di cui si appienee
possibile la quadratura geom.^a del Circolo, si propone, e si espone il principio
fondamentale del calcolo prossimo alla vera posizione. E questo basterà
per prova dimostrativa della verità della proposizione, e per intuizione
dimostrativa della possibilità della quadratura geom.^a del Circolo.

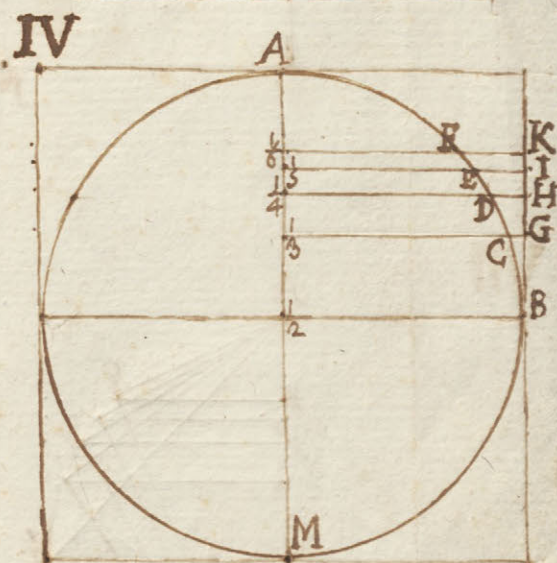
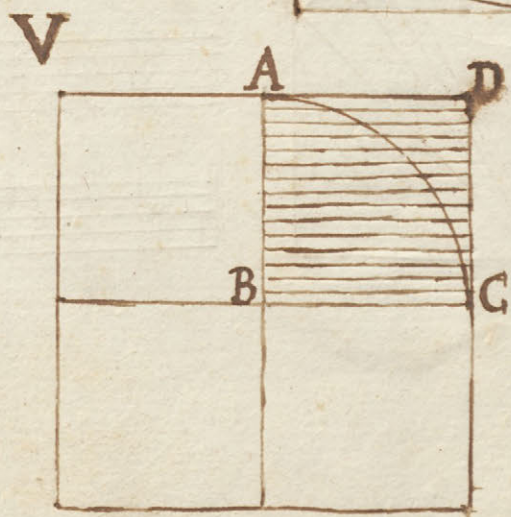
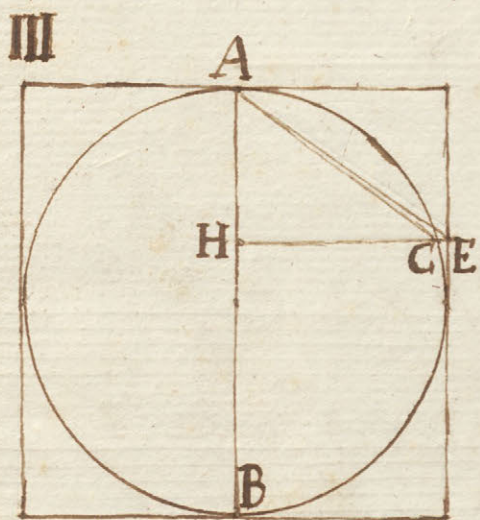
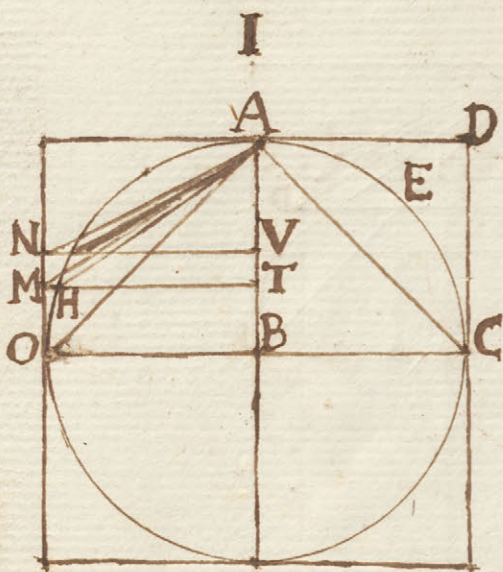






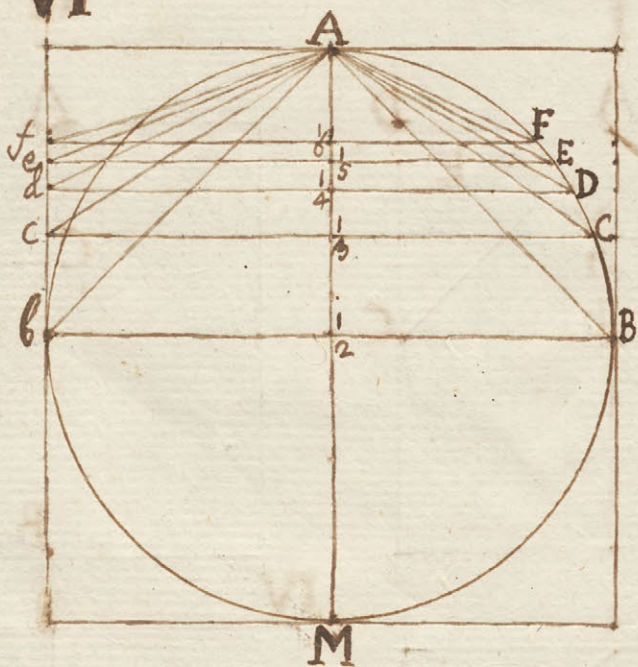
dividendo AB in quatuordecim partes 45. et per 15.
per 18 partes 20. — 360. denominato de 19, divi 1561
denominato per 8. — 8 per 10 — 80
8 per 15 — 120
8 per 25 — 200.

AM = a KD — quatuordecim 2 — per 10
MN = ad AD — quatuordecim 3 — per 15
longus AN — quatuordecim 5 — per 25 — divi 15

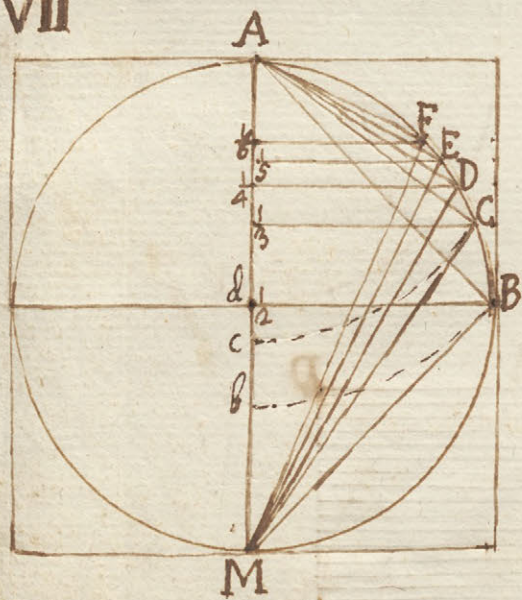


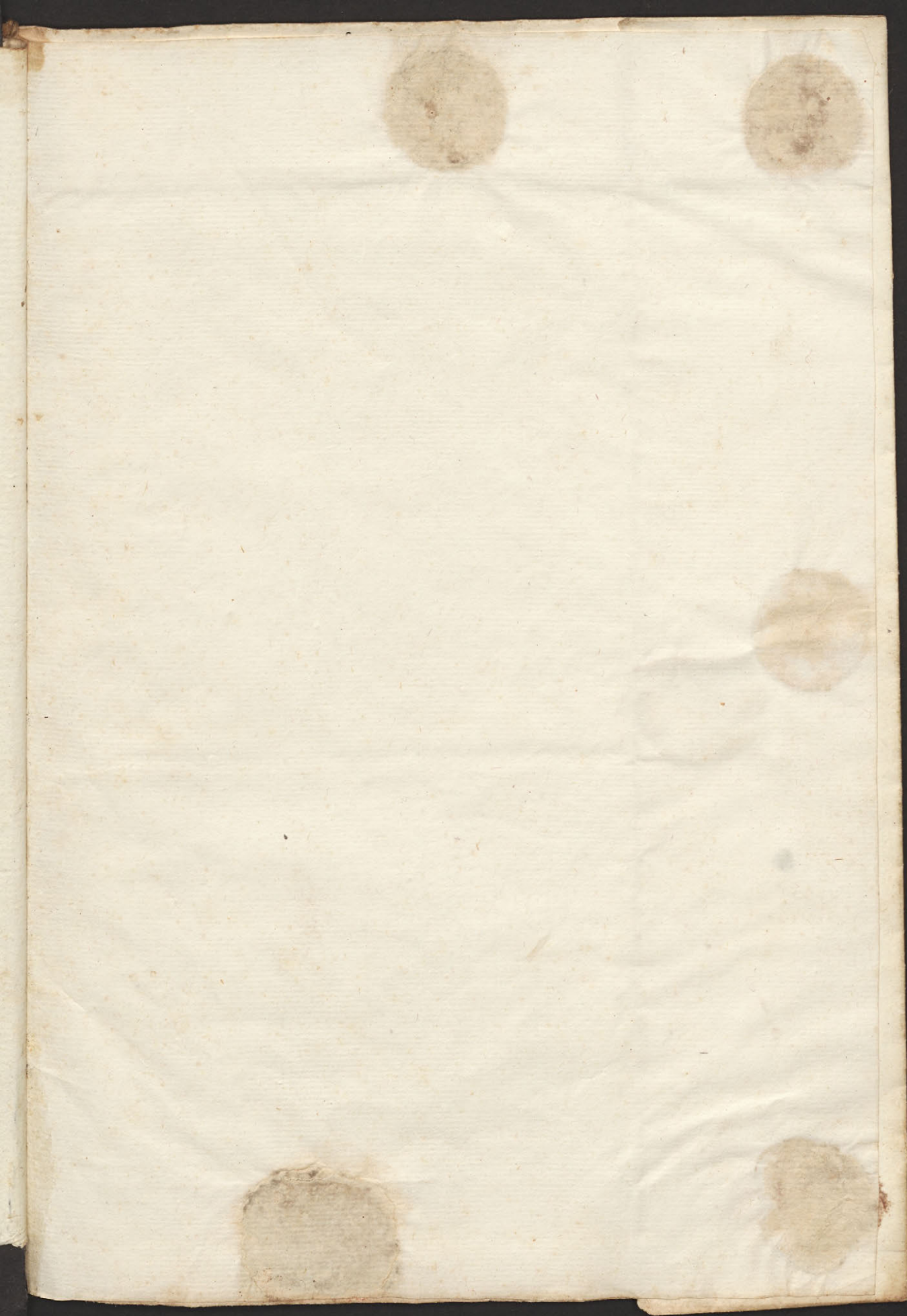
VI

33



VII





127