

GIUSEPPE TARTINI

SCIENZA PLATONICA
FONDATA NEL CERCHIO

Pirano/Piran, Archivio Regionale di Capodistria - Sezione Pirano, Slovenia

Pokrajinski Arhiva Koper upravnih enota Piran, Slovenija

Segnatura: ms. 233 ; antica: 128, Inventario: 4-233; cc. 195;

Trascrizione parziale (cc. 1-60)

Tre sono i principi di Platone: la natura dello stesso: la natura del diverso, e la sostanza. [p. 1]

Dalla nozione della natura dello stesso si ha vera scienza: dalla nozione della natura del diverso si ha sola opinione: dalla nozione della sostanza si ha un terzo modo, che Platone chiama adulterino, e che realm:te è un misto di scienza, e di opinione. Il continuo fisico della sostanza esteso con certa legge non solam:te è dimostrabile, ma di fatto si dimostra, e però genera scienza. Ma quel principio primo ch'è nella sostanza, come potenza fisicam:te estensibile, e che per necessità della propria natura, e del continuo è inseparabile dalla sostanza fisicam:te estesa con certa legge, non è capace di scienza, perche non ha determinazione alcuna, né può averla essendo potenza. Pure la estensione essendo quantità, e però la scienza della estensione non potendo non esser scienza di quantità, la quale necessariam:te cade sotto il numero, è certo che il numero conveniente alla sostanza attualm:te estesa, è numero reale concreto, e giustam:te si può chiamare numero fisico. Ma il numero conveniente alla sostanza puram:te estensibile in potenza, è necessariam:te astratto e conviene al solo genere metafisico. È bensì reale nel suo genere, quanto è il fisicam:te concreto, e quanto è reale la sostanza benché indeterminata; ma essendo segno reale di potenza reale al quanto senza esser quanta, dev'esser necessariam:te numero di potenza di quantità, e perciò sarà quanto come numero, non potendo esser numero se non è quanto, ma non sarà numero di cosa quanta. Questo è ciò che significa la parola adulterino e che si troverà veram:te quale è indicato da Platone, il quale rassomiglia la sostanza all' unguento privo di qualunque odore, ma capace di tutti gli odori. Tutto ciò si risolve nella necessaria distinzione della cosa di cui si fa, dalla cosa fatta: vero, ed unico fondamento della sana filosofia.

A ragguaglio dunque di questi tre principi si trovano tre nature di numeri tanto inseparabili dai medesimi, quanto da ciascun principio è inseparabile la propria natura. Da questi numeri è costituita la Platonica scienza: una volta palese agli antichi filosofi egizij, dai quali Pitagora e Platone l'anno appresa, ma tenuta nascosta con inviolabile segreto. Presentem:te essendo affatto ignota, è chiaro che chiunque pretende d'intender il sistema di Platone, pretende una cosa impossibile. Se poi questa scienza sia un fanatismo di que' tali antichi filosofi come si tiene dai filosofi moderni; o se per il contrario sia la unica scienza della vera filosofia, cosicché si trovi necessariam:te nel fanatismo chi si presume filosofo in grazia delle moderne fisico-mat:che discipline, questa ch'è la important:ma di tutte le possibili questioni, sarà qui decisa dal fatto, ch'è la scoperta della Platonica scienza. Di tanto s'impegna francam:te l'autore: di nulla per le citazioni de' testi, e de' dialoghi rispettivi, perche non ha tempo di legger a questo effetto tutto Platone, e incomincia dalle necessarie prenozioni.

Platone in più luoghi chiama il numero un dono divino. Afferma esservi l'aritmetica de [p. 2] filosofi distinta dalla volgare. Antepone una specie di proporzione a qualunque delle diverse; ed essendo Geometra Sommo, in tutt' i suoi dialoghi non vi è pur una geom:ca dimostrazione, ma invece si vale di questa specie di proporzione ch'è la geom:ca discreta, ed è fondata intimam:te nell'aritm:co numero comune. Di questo unicam:te si vale nella formazione dell'anima del mondo, e di questo egualm:te si è valuto Timeo da Locri scolare pitagorico nello stesso caso della formazione dell'anima del mondo. I testi sù tal proposito sono tanti, e si chiari, che non lasciano luogo a dubbio veruno, e nell'Epinomide distintamente.

Ciò premesso, e stabilito, si deve cercar la mente di Platone su la natura dello stesso, dalla quale si ha scienza. Ma la di lui mente è chiar:ma nel Timeo, dove dice che sia da distinguersi ciò che sia quello ch'è sempre, ma non ha generazione, e che sia quello che si genera bensì, ma non è mai. Dunque si può apprendere il primo dall'intelletto con la ragione, essendo sempre lo stesso; il secondo dalla opinione col senso, mutandosi sempre da quello ch'è. Qui ad evidenza si rileva la di lui mente, ed è che la natura dello stesso è la idea, ossia l'esemplare; la natura del diverso è la cosa fatta nella generazione ad immagine della idea, ossia l'esempio. Perciò Platone conchiude,

che se è bello questo mondo, e buono l'artefice di lui, chiaro è che l'artefice ha risguardato alla idea, e non al fatto, e però fù fabricato il mondo rispetto a quello che si apreude con la ragione, e se ne sta sempre ad un modo. Fin qui Platone.

Se dunque la scienza si ha unicam:te dalla natura dello stesso, ed unicam:te per mezzo del numero, è assolutam:te necessario che questo numero sia della natura dello stesso. È certo che la universal nozione del numero è fondata nell'aritmetica unità, misura egual, e comune dell'aritmetica serie, e perciò è certo che la sola unità è della natura dello stesso. Indi è che moltiplicata per se stessa, resta in se stessa a differenza di tutt'i numeri della serie, i quali moltiplicati per se stessi, non restano in se stessi, ma si cambiano, e passano necessariam:te nel diverso. Il corollario è patente, ed è, che nel numero la unità e la natura dello stesso è la cosa medesima.

Procedendo alla scienza col metodo de' gradi di Platone, ch'è, primo, il nome della cosa: secondo natura, ossia la definizione della cosa: terzo, l'idolo, ossia immagine della cosa (indi ne verrà per quarto la scienza) e qui avendosi avuto il nome, e la definizione della natura dello stesso, rimane ad aversi l'idolo, o sia immagine. Ma se questa è scienza inseparabile dal numero, e il numero è inseparabile dalle ragioni, e proporzioni, è certo che queste non possono aver altra immagine, che le matematiche figure, e ciò in genere. In specie, e precisione diventa necessaria quella sola figura, la quale realm:te contenga in se stessa la natura di cui è immagine. Ma la natura è dell'uno, e dello stesso. Adunque, è assolutam:te, ed unicam:te necessaria la figura circolare, perche tra tutte le possibili è la unica, che contenga in se la natura dell'uno, e dello stesso.

Se dopo l'immagine si ha la scienza, nel cerchio deve trovarsi il fondamento della dottrina di Platone. Così è in fatto, essendovi realm:te la scienza del cerchio ben diversa da quella che si ha dalla Geometria. Ha il suo proprio, e vero nome indicato da Timeo da Locri nel testo della formazione dell'anima del mondo, ed è, scienza armonica: nome impostogli dagli Egizij, da i quali fù poi tradotta in Grecia per mezzo di Pitagora, e di Platone. Perciò nelle processioni degli Egizij il vessillo della musica che rappresentava l'armonia, era il primo, e il duce di tutti gli altri vessilli simboli dei loro misteri, arti, e scienze. Perciò Pitagora, e Platone primi istitutori del diatonico genere musicale, per tal istituzione si sono valuti dello stesso identico principio, di cui Platone, e Timeo da Locri si sono valuti per la formazione dell'anima del mondo. Ciò vuol dire che l'armonia dell'universo è l'albero tutto: la musica n'è un ramo, e però necessariam:te della stessa natura, e radice, di che n'è prova evidente la musica congenita alla umana specie, la qual sola è capace di scienza di numero. In questo senso nel numero vi è scienza, e natura, come divinam:te ha inteso Platone; ed in questo senso si vede la possibilità di scoprire l'albero dal ramo, il tutto dalla parte, come in fatto è succeduto all'autore.

Come poi dal quarto grado ch'è la scienza, si passi al quinto, in cui dice Platone che risiede il conoscibile, e il vero, ed in cui tutto si risolve in unità di comprensione, e di termine, Platone stesso nella settima di lui lettera agli amici di Dione apporta l'esempio nel cerchio con astuzia e sottigliezza veram:te maravigliosa. Perche nello stesso tempo che apertam:te rivela il soggetto della scienza, trasportando la rivelazione del nome, e della cosa al titolo di esempio, sì altam:te lo nasconde, che da chiunque in tanti secoli si è trapassato il testo senza niun' avvedimento dell'arte. e dell'inganno.

In questo quinto grado sono riposti gli arcani, ai quali conduce questa scienza, e de' quali que' Filosofi hanno parlato con mistero inintelligibile da chi non possiede la scienza. Perciò siccome nel cerchio ch'è simulacro di cosa, è fondata la scienza, così nel quinto grado passandosi dal simulacro alla cosa, qui si trova la real distinzione di grado tra scienza, e sapienza, perche realm:te qui si trova piu che scienza rispetto alla comune idea dello scibile. Di questa distinzione vi sono manifest:me indicazioni in Platone; ma la più precisa al presente bisogno si è nel dialogo ottavo della Repubblica, dove Platone descrivendo un uomo non integro in virtù per esser

abbandonato dall'ottimo custode, e chiedendo Adimanto qual sia quest'ottimo custode, Platone risponde esser questo la ragione meschiata di musica, la qual sola, quando vi si trova, mantiene la virtù per tutta la vita in colui che la possiede. Questa proposizione che abbraccia tutti i generi, fisico, metafisico, teologico, e morale, consta di due termini positivi: ragione e musica. La sola ragione forma scienza: la ragione congiunta con la musica forma scienza e qualche cosa di più ed è chiaro che Platone qui non intende la musica material, e comune: di che meglio tra poco: bensì la intelligenza dell' armonia universale. Da ciò si deduca che può aversi la scienza [p. 4] del quarto grado senz'avervi la scienza del quinto, in cui unicam:te risiede quella tal perfezione che costituisce per tutta la vita l'uomo virtuoso in tutti i generi suddetti; e questa è la natura dell'arm:ca scienza di que' Filosofi antichi, che di essa furono possessori, ma che tenendola per divina, com'è in fatto, hanno creduto loro debito di nasconderla ai filosofi volgari.

Tra l'armonica scienza, e qualunque altra scienza dimostrativa vi è diversità sostanziale. Tutte le scienze dimostrative di quantità servono a questa di pure ministre per la scoperta materiale della quantità, e formale de' i rapporti, o siano ragioni tra i termini della scoperta quantità materiale: nulla più. Le ragioni formalm:te scoperte dalle altre scienze sono il soggetto materiale dell'arm:ca scienza. La cognizione, e distinzione delle ragioni applicate convenient:te alle tre nature dello stesso, del diverso, e della sostanza; la inseparabilità, e congiunzione delle medesime in qualunque proporzione assegnabile dalla scienza per le sue proprie dimostrazioni, le quali hanno per oggetto non mai cose particolari, ma sommi generi di cose: non mai in rispetto di contiguo, ma di continuo: non mai per intelligenza finale d'individui, e di specie, ma per comprensione di genere; l'ordine finalm:te, e la legge che forma, ed unicam:te può formare il legame universale delle cose in quella unità che sia il tutto fatto: immagine della idea di ciò ch'è da farsi; questa è la forma, e lo spirito dell'armonica scienza. A posteriori questa scienza principale concorda con le subalterne sue ministre in tutta la materialità del genere dimostrativo; ma questa è la sua superficie, in di cui rispetto può ben:mio succeder (e di fatto succede) che vi siano possessori delle comuni scienze dimostrative incomparabilm:te migliori di un possessore dell'arm:ca scienza per la scoperta materiale del quanto in atto: non mai della quantità in potenza, perchè di questa nelle scienze comuni non vi è nemmeno la traccia. Un orologiaio che raccoglie ciascuna parte integrante l'orologio da diversi fabri, ciascuno dei quali lavora egregiam:te la sua parte, e sa ch'è parte di orologio ma non sa poi costruirlo con tutte le sue parti integranti, è adeguata immagine della cosa. È ben facile che ciascun fabro lavori la sua parte meglio di quello farebbe l'orologiaio; non pertanto è orologiaio, ma fabro di ruote e di suste. Ma l'orologiaio che necessariam:te deve aver cognizione di ciascuna parte, benchè nell'attual lavoro di ciascuna possa esser inferiore al fabro rispettivo; benchè non abbia la prontezza manuale di lavorar (per esempio) una delle ruote in un giorno, quando il fabro rispettivo ne lavorerebbe dieci, ciò non ostante è sempre sostanzialm:te diverso dal fabro: questo ignaro: quello perito dell'uso, adattamento, e congiunzione di tutte quelle parti che formano l'orologio. Così a ragguaglio succede tra l'armonica scienza, e le comuni scienze dimostrative, di che dopo tutte queste ed altre nozioni necessariam:te premesse si verrà alla prova su'l cerchio, sù cui è fondata la Platonica, ossia l'armonica scienza. Si procederà rigorosam:te a norma della similitudine qui apportata dell'orologiaio, acciò si renda nello stesso tempo evidente la sostanza della cosa, e la verità della similitudine, e questo è il vero bisogno delle moderne filosofie peccanti di eccessiva presunzione sù falsi fondamenti a priori, ne quali l'arm:ca scienza discorda affatto dalle scienze moderne.

Come questa scienza conduca ai veri principj, Platone lo dichiara ne' i due dialoghi sesto, [p. 5] e settimo della Repubblica. In fine del sesto applica l'intelligibile alla ragione per la facoltà del dimostrare. Afferma fondata questa facoltà non in principj reali, ma in ipotesi, e supposizioni, valendosi di queste come di alcuni gradi, e sostegni, finché pervenendo a quello che non si suppo-

ne, cioè al principio dell'universo, si tocchi; ed in seguito abbandonate le ipotesi, e supposizioni, l'intelletto si appigli a quello ch'è attaccato al principio, procedendo in tal guisa fino al fine senza valersi affatto di niuna sensibil cosa; ma dalle specie medesime proseguendo per le stesse, e nelle specie terminando. Poi si spiega chiamando discorso ciò che si acquista dalle supposizioni per la Geometria: mezzano tra la intelligenza, e la opinione, distinguendolo dalla intelligenza che pone nel supremo grado, ma nel secondo il discorso. Qui dunque dovrà cercarsi, e sicuram:te stabilirsi cosa intenda Platone per le specie, giacche il rimanente è chiaro.

Nel dialogo settimo, veram:te aureo, e divino, in cui Platone va cercando le scienze convenienti per arrivar a questa suprema scienza, egli pone per principio e fondamento il numero, egualm:te fondamento delle due arti premesse alla istruzione del giovane, cioè ginnastica, e musica: della ginnastica per ordinanza delle squadre, accampamenti etc.: della musica per gli accordi, ritmo, misura etc.: Poi proseguendo conchiude che datosi il giovane alla scienza del contare, con l'intelletto pervenga in seguito alla contemplazione della natura dei numeri, non per cagione di vender, e di comprare, ma per ordinare se stesso alla guerra, e per facilm:te convertir l'animo dalla generazione alla verità, ed alla essenza. Spiega divinam:te la natura della essenza del numero, dove dice interrogando: o uomini maravigliosi, di quai numeri vi disputate voi, in cui si ritrova un tal uno, qual'è quello che da voi si dice, cioè che si ritrova ciascun tutto al tutto uguale, né in qualsivoglia minima parte discordante: nondimeno non contenente in se stesso niuna parte? A ciò fa che risponda Glaucone, ch'essi parlerebbero di quei numeri, i quali solam:te possono esser pensati, ma in veruno modo non maneggiati altrimenti. Indi conchiude affatto necessaria questa disciplina, perche induce l'animo a valersi della pura intelligenza per apprendere la verità. Passa indi Platone a considerar la Geometria, e qui la di lui sentenza si è, che nella Geometria vi è ben:mo la traccia della scienza suprema; ma che ridicolosam:te, e necessariam:te i Geometri ne parlano di essa come operarj, mentre dicono di quadrare, di prolungare, di aggiungere etc: (che vuol dire ciò che non è sempre), bench' esercitino questa dottrina per causa di cognizione, e la Geometria sia veram:te cognizione di ciò ch'è sempre. Con ciò Platone vuol inferire che nella Geometria vi è la facoltà che conduce alla scienza suprema, ma da i Geometri, non è conosciuta. Perciò afferma la Geometria necessaria al Filosofo per esser gradatam:te condotto fin' alla pura intelligenza.

Dopo la Geometria che pone nel secondo grado, trapassato lo studio de' solidi che versa nel profondo, e che pone per terzo grado, ascende nel quarto all'astronomia, la quale versa nel giramento del profondo. Qui egualm:te che nella Geometria distingue ciò ch'è da considerarsi, cioè non ciò che conduce alla generazione, ma ciò che astringe a vedere la essenza. Perciò esclude dall'astronomia qualunque considerazione fuorché la sola, che versa ne' corpi celesti su' loro rapporto alle vere varietà, ai veri movimenti in cui si trova la velocità, la qual è veramente, e la dimora che veram:te è tale, al vero numero, alle vere figure, etc:

Qui da tutto il contesto si comprende ad evidenza che Platone si vuol condurre ad un principio reale, astratto dalle cose, anteriore alle cose, di legge universale fondata nel numero, e spiegata nelle ragioni e proporzioni come idee sempre vere, sempre le stesse del moto e stato dell'universo e delle sue parti, le quali idee si risolvono nella prima idea dell'uno, del vero, e del buono. Si rivanghino pure tutte le proposizioni di Platone si congiunte, che sparse ne' suoi dialoghi: si troverà che tutte collimano a questo punto di vista chiaro, e preciso. Perciò nulla più aggiungendo se non che quanto egli espone in seguito sulla musica: cosa principalm:te necessaria all'intento presente, si porrà fine a i di lui testi, e s'incomincerà la prova. [p. 6]

Quando Platone ha descritto l'uomo abbandonato dall'ottimo custode, e richiesto qual sia, ha risposto esser la ragione meschiata di musica, ivi si è detto che certam:te Platone non ha inteso la musica material, e comune. ma l'armonia universale. In questo dialogo settimo si tocca

questa verità con mano, perché dopo l'Astronomia in cui egli dice non doversi considerare nei corpi celesti se non che le ragioni, e proporzioni de' loro movimenti nella loro essenza, afferma egualm:te necessaria la scienza dell'armonia per l'acquisto della scienza suprema: l'afferma sorella dell'Astronomia secondo la Pitagorica sentenza, e l'afferma necessaria nel medesimo senso dell'Astronomia, cioè che non debbano considerarsi le voci, o i suoni, ma le loro ragioni, e proporzioni nella propria loro essenza. Spiega poi la cosa dicendo, che come l'occhio è al visibile, così l'orecchio è all'armonia. Indi accennando il tempo perduto, e la vana fatica de' i musici intorno a i suoni, come degli Astronomi intorno a i corpi celesti, fa dire a Glaucone: per li dei molto ridicolosam:te fanno costoro etc., e poi soggiunge che alcuni dicono fra questo spazio di suoni di udir ancora qualche altro suono (si notino distintam:te queste parole sottosegnate), e conchiude che non sono da ascoltarsi costoro, perche non passano poi nelle proposizioni (ossia errore e voglia dire proporzioni) a considerare quai siano numeri consonanti, e quai nò, e per qual cagione siano tali. Rispondendo Glaucone: tu racconti una cosa divina, conchiude Platone con queste precise parole: ora io stimo se nel maneggio delle cose antedette si toccasse una vicendevoles comunicanza, e conoscenza delle medesime (astronomia, e musica) e s'investigasse in che modo se ne stiano congiunte di compagnia, che ciò ci condurrebbe a quello che noi desideriamo. Fin qui Platone. Se a ciò si aggiunga il fatto di Pitagora il quale senz'aiuto de' telescopi avendo detto ritrovarsi tra loro i pianeti nelle loro mezzane distanze in armonica proporzione, dopo due milleanni con l'aiuto dei telescopi si è trovata da Keplero, e dimostrata vera la proposizione di Pitagora. Se a questo fatto si congiunga l'altro comune a Pitagora e a Platone, ed è la istituzione della diatonica musica con lo stesso principio della formazione dell'anima del mondo. Se questi due fatti si congiungano con i testi qui assegnati, la reciproca loro prova della verità di questa scienza, e la illustrazione della di lei essenza, e natura arrivano al grado di sicurezza dimostrativa senz'aggiungervi nulla di più.

Passa finalm:te Platone al quinto, ed ultimo grado di questa scienza, in cui risiede la perfet:ima intelligenza, ch'egli chiama dialettica; e qui deve rigorosam:te esaminarsi, e stabilirsi qual cosa precisam:te s'intenda sotto questo nome. Ciò con tutta evidenza si ottiene dal genere della cosa, e dal premesso quarto grado della scienza. Perche per il testo di Platone il genere è il numero aritmetico: per lo stesso testo il premesso quarto grado è l'astrazione del numero aritm:co dalla generazione, o sia dal sensibile. Adunque null'altro deve considerarsi nel numero che la sua intima essenza in genere, la quale, se la scienza è vera, e se Platone non si contraddice, deve abbracciar in se stessa le nature dei tre principi di Platone, cioè dello stesso, del diverso, e della sostanza: i suoi rapporti che altro non sono, né ponno esser che le ragioni, e proporzioni: la sua universalità, ed estensione, che altro non è né può esser che un legame universale di ragioni, e proporzioni: la specifica sua natura rispetto all'esser, o non esser numero consonante, che altro non è, né può esser che una real distinzione di specie diverse da numeri. Assicurata dunque la divisione delle loro specie in questo rispetto ch'è il precisam:te indicato dal testo di Platone, restano determinate le specie a ragguaglio della natura del numero, che indipendentem:te dalla generazione, e dal sensibile è per propria intrinseca natura determinato in se stesso; e però quella sicurezza che si ha di qualunque numero sì nel suo individuo che ne' suoi rapporti, è la stessa che si ha di ciascuna specie di esso, e di tutte le specie insieme. Questa sicurezza è positiva, e reale nella natura intelligibile delle specie, quanto lo è nella natura sensibile de' corpi; né lascia luogo alla opposizione, o al dubbio che le specie siansi intellettualm:te astratte dai corpi cosicche siano unicam:te umane designazioni, perche si trovano di fatto realizzanti, e determinanti le tre nature dello stesso, del diverso, e della sostanza. Comecche questo è un fatto, e sul fatto non cade dubbio, né opposizione, così questo è il massimo argomento della verità di questa scienza, la quale portando l'intelletto fin a questo ultimo supremo grado in cui le tre suddette nature che

pur sono tre generi sommi, si trovano determinate in tre specie, si ascende linearmente al grado sopraeminente dell'ente supremo, che Platone chiama sopra essenza; ch'è l'unicam:te uno, e però necessariam:te primo in qualunque senso di ogni natura intelligibile, e sensibile, e necessariam:te per sé tale. Queste specie sono identificam:te le idee di Platone, e chiunque intende altrimenti, dopo queste prenozioni legga Platone, e si avvedrà del proprio errore. Che poi di queste specie vi siano diverse classi, è verissimo, ed è accennato da Platone che in molti luoghi dice doversi per le specie ascender all'ente supremo. Ma altrettanto è vero che queste diverse classi formano tra loro legame, e catena, per la quale ascendendo fin all'ultimo supremo anello che rispetto all'universo è il primo, in questo precisam:te si trovano le tre nature dello stesso, del diverso, e della sostanza, ma non mai quell'uno, a cui è attaccato il primo anello. È positivam:te fuori di questo: è fuori come uno assoluto, e lo è con quella stessa sicurezza di fatto, che si ha delle tre nature dello stesso, del diverso e della sostanza, realizzate, e determinate dalle tre specie del numero. Bastrebbe dunque assegnar questo fatto, ch'è la chiave principale della scienza; ma per arrivare appunto alla intelligenza del fatto, sono previam:te necessarie queste nozioni, questi gradi, questa ascesa lineare, e quanto di più si premetterà in seguito, senza di che si può bensì arrivare al fatto, ma spoglio d'intelligenza come fatto materiale, e sensibile. Fin qui si è trattato questo punto per rilevare ciò che Platone intende per il quinto grado ch'egli chiama dialettica. Si intenda dunque in precisione che quanto si è discorso fin qui sù questo punto, sia pura logica che comunem:te s'intende co'l nome di dialettica. Quanto poi si discorrerà su'l fatto, e sulla di lui intelligenza, sia quella dialettica, che comunem:te s'intende meglio co'l nome di metafisica, e sia quella unica, e vera metafisica, mezzana tra la fisica, e la teologia, che congiunge il fatto [p. 8] co'l Fattore nella verità delle cose come sono, e non come appaiono.

Queste sono le prenozioni necessarie al bisogno, fedelm:te estratte da i testi di Platone. Di queste è forza premunirsi con sicuro possesso prima d'inoltrarsi a quanto in seguito si dovrà esporre. Sono esposte senza ordine, non essendo possibile di ordinarle co'l metodo proprio e ben rigoroso della scienza se non che nell'atto stesso della esposizione della scienza; né questa si può esporre se non che dopo aver premessa una prova, ed un fatto. La prova si è il confronto di questa scienza con tutte le fin qui note scienze dimostrative sopra un punto il più luminoso delle suddette scienze. Questo punto è la quadratura del cerchio cercata, e tentata invano dai matem:ci più insigni sì antichi che moderni. Ecco la necessità di questa prova a confronto. Se l'armonica scienza è fondata su'l cerchio; se tutte le altre scienze dimostrative sono veram:te ministre di questa, dev'esser assolutam:te vero che uncam:te dall'armonica scienza si avrà in questo confronto quella tal intelligenza della natura del cerchio, che in niun modo può aversi dalle scienze sue ministre; e qui torni a memoria l'esempio dell'orologiaio. Se in fatto così succeda, sarà deciso l'important:mo punto della superiorità di questa scienza sopra qualunque altra, ed è necessario che questa decisione preceda sì per toglier previam:te i pregiudicj delle moderne presunzioni su le comuni scienze dimostrative: sì per spianar previam:te con un tal esempio la via al retto intendimento dell'efficacia, e dello spirito di questa scienza prima di esporla: sì finalm:te per assegnar dopo una tal prova quel fatto, che come puro fatto, è il fondamento materiale di questa scienza; ma come inseparabile da produzione di vera intelligenza, ha bisogno di una sì fatta prova che lo preceda. Si venga dunque alla prova.

Qual sia stato sempre, e qual sia attualm:te l'impegno de' i matematici più insigni per la quadratura del cerchio, si rilevi dalla breve succos:ma operetta del Sign:r Don Giuseppe Marzucco stampata in Napoli del 1757 per Valentino Azzolini. Sono state, e sono indicibili le loro fatiche, e quante mai sono le scienze dimostrative: geometria comune, e sublime: calcoli differenziali, integrali, d'infinit:mi, di decimali etc., tutte a questo effetto si sono adoperate. Pure non si è mai ottenuto l'intento, e quel ch'è più, non si è mai finora arrivato ad accertare, se sia, o

no, possibile questa quadratura. Ciò dà chiaram:te a divedere che non si è mai conosciuta, né si conosce la natura del cerchio, e che a tanto non sono sufficienti le scienze dimostrative finora note. Qui omettendo interam:te le fatiche fatte su questo problema co'l mezzo delle scienze fin'ora note da Leibniz, Newton, Bernulli, Eulero, Gregori, etc. etc., basta al bisogno la prima fatica di Archimede fatta su'l puro piano geom:co co'l mezzo de poligoni inscritti, e circoscritti al cerchio, con i quali esso dimostra che il diametro alla circonferenza è come 7 a quasi 22. Questa dimostrazione si risolve ne'i quattro termini di proporzione geom:ca discreta $497 : 1561 : 1562 : 4906$. Perche $497 : 1562 = 7 : 22$ è più; $497 : 1561 = 71 : 223$ è meno della vera quantità. Ma intanto si riceve comunem:te la ragione di 7 a 22 piucché di 71 a 223, perche quella è molto [p. 9] più prossima di questa alla ragione dimostrata da Mezio tra 113 diametro, 355 circonferenza; la quale in pochi numeri più di tutte si avvicina alla vera quantità. Queste nozioni sono comuni a qualunque geometra e possono dirsi de' primi rudimenti della Geometria a paragone di quanto si sono avanzate su questo Problema da sunnominati matem:ci insigni. Pure queste sole bastano, e avanzano al bisogno materiale che sù questo Problema ha l'armonica scienza della Geometria come sua ministra. Né importa che la ragione di Archimede sia più imperfetta della ragione di Mezio, e che anzi sia imperfettissima se si paragoni alla ragione avanzata da Ludolfo a Ceulen sullo stesso piano de' poligoni inscritti, e circoscritti fino a cifre 36 con l'ultima cifra in differenza della unità; che vuol dire avanzata fin a quel tal grado minimo di differenza della vera quantità, che come dice il Jacques, la particella differenziale che si trova nell'ultima cifra, e ch'è la unità, ha minor proporzione al diametro di un solo grano di sabbia a tutta la terra. Ciò nulla importa all'arm:ca scienza, a cui basta che in qualsivoglia modo siano dimostrati i due termini che formano la ragione: siano razionali, o irrazionali: siano nel punto matem:co della vera quantità, o vi siano per approssimazione. La scienza poi ha le sue prove particolari (proprie di questa sola scienza) per assicurarsi dimostrativam:te se il grado della imperfezione arrivi ad alterar la ragione nel suo principio primo sempre cognito a questa scienza ch'è precisam:te, e essenzialm:te scienza di ragioni, e proporzioni.

Avendo in se stessa il loro principio originale, e formale, rileva a prima vista la intrinseca natura della ragione; e comparando la ragione materialm:te dedotta dalle altre scienze alla propria formal ragione come simulacro alla idea, come cosa fatta alla legge con cui deve farsi, conosce il grado della imperfezione, ne assegna la causa, e con ciò dal difetto materiale delle altre scienze deduce, e produce quella vera intelligenza ch'è fondata nella natura di ciò ch'è sempre lo stesso. Alla prova di si fatta proposizione pare che si richiegga nulla meno che la intiera esposizione della scienza; ma non è vero. Bastano le cose superficiali di questa scienza, fin' alle quali possano condursi le comuni scienze dimostrative, acciò vi sia reciproca intelligenza delle cose necessarie alla prova, e nulla più vi bisogna.

Proposizione I

La figura circolare è della natura dell'uno, e dello stesso. Se il diametro è misura comune del cerchio in qualunque punto della circonferenza, e se per tal cagione il cerchio in qualunque punto puo aver principio, mezzo, e fine. Adunque è uno nello stesso, ed è lo stesso nell'uno. Ma questo è fatto più che proposizione da provarsi, perche in fatto tra tutte le figure lineari il solo cerchio dal centro alla circonferenza ha la stessa unità per sua misura.

Istanza I

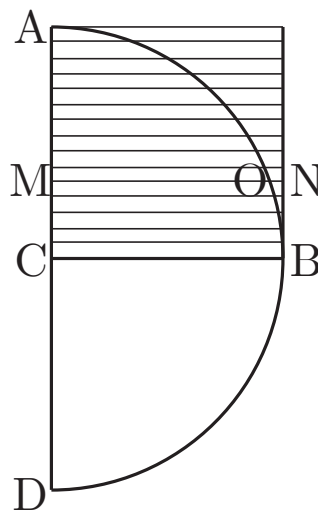
Per qual principio, legge, o cagione il cerchio è, e deve esser necessariam:te uno in se stesso?

Propos: II

Per il principio, legge, o cagione dell'armonica proporzione, da cui è costruito. Qui non si dimostra, perche dall'autore si è pubblicam:te dimostrato nel capitolo secondo del di lui Trattato di Musica. Ivi si vegga la di lui dimostrazione, a cui il dotto matemat:co mondo non ha avuto finora che opporre, né lo avrà mai. A suo luogo si proseguiranno le istanze, e le proposizioni; ma presentem:te per comodo di chi non ha il suddetto libro alla ma-



[p. 10]

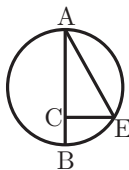
no per previa necessaria intelligenza dell'argomento che qui si tratta, e per facile intelligenza della suddetta dimostrazione si supponga il quadrato AB pieno di linee parallele a CB; e fatto centro in C, punto in A, si descriva il quadrato CAB per A in B. La linea circolare AB da ciascuna retta linea uguale a CB sottra quella tal porzione, in forza di cui il quadrato della linea inclusa, e determinata dal quadrante è sempre mezzo armonico: il quadrato di tutta la linea stessa ch'è sempre uguale al semidiametro, è sempre mezzo aritm:co di quella ragione, in cui la stessa linea ha diviso il diametro AD: ridotta la ragione a proporzione geom:ca discreta costituita, e determinata da i due mezzi armonico, e aritmetico. Per esempio: il diametro AD sia diviso in tre parti uguali, delle quali AM sia 1: MD sia 2; e con ciò sia diviso nella ragion dupla 1 : 2, ch'è nel suo principio affatto primo. Ridotta questa ragione a proporzione geom:ca discreta determinata da i due mezzi, arm:co, aritm:co, sarà egualm:te nel suo principio affatto primo di tal sorta di proporzione delle quali si tratterà a carte 28, 6 : 8 : 9 : 12, di cui 8 è mezzo



armonico: 9 aritmetico. Il quadrato del diametro AD è 9, perche si è diviso in tre parti uguali. Adunque il quadrato del semidiametro CB è $2 : \frac{1}{4}$. Ma il quadrato del seno MO è 2, perch'è il prodotto di AM1 per MD2 = 2; il quadrato del seno protratto MN è $2 : \frac{1}{4}$, perche MN è uguale al semidiametro CB. Adunque i due quadrati $2 : 2 : \frac{1}{4}$ sono tra loro nella stessa ragione, in cui sono i due mezzi 8 : 9 : della dupla 6 : 12. Ma il quadrato 2 è del seno MO, ed è l'eguale a 8 mezzo armonico: il quadrato $2 : \frac{1}{4}$ è del seno protratto MN, ed è l'eguale al mezzo aritmetico 9; il seno MO come armonico, è determinato dal cerchio: il seno protratto MN, come aritmetico, è determinato dal quadrato, e ciò si verifica, e dimostra in proposizione universale di qualsivoglia data ragione, in cui sia diviso il diametro. Adunque il cerchio essenzialm:te è armonico, il quadrato essenzialm:te aritmetico, il che doveva dimostrarsi. Molto di più vi è nel Trattato di Musica, ma tanto qui basta al bisogno, a cui null'altro si aggiunge che una riflessione, ed un fatto. La riflessione si è, che la dimostrazione di Archimede, e la incomparabilm:te più esatta di Ceulen sono egualm:te fondate ne' poligoni inscritti, e circoscritti al cerchio. Questi, come geometricam:te dimostrabili, sono confinati a brev:mi termini, poiche delle rette regolari figure inscritte, e circoscritte al cerchio quattro, e non più sono le geom:che dimostrabili: il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, e l'esagono. Tutte le rimanenti che non dipendono da queste, e che sono di numero illimitato, sono incapaci di geom:ca dimostrazione, ed unicam:te sono capaci di meccanica costruzione, e misura. Per il contrario di quante divisioni in parti eguali è capace il diametro, egualm:te è capace di tante ragioni, ed a ragguaglio di tanti seni che condu-


cono al cerchio; e per conseguenza di tante corde, e sottese. Una tal capacità è illimitata, la qual essendo senza determinato confine, a questo non è certamente da paragonarsi il ristretto confine de' quattro soli poligoni come geometricamente dimostrabili, quando a confronto sono dimostrabili tutt' i seni come mezzi armonici delle indefinite ragioni, nelle quali è capace di esser diviso il diametro, e per conseguenza dimostrabili egualmente corde, e sottese, come relative a ciascun seno, ed a ciascuna ragione, ridotta dal cerchio ad arca proporzione, e natura. È fatto che le indefinite corde del cerchio comprendono sì i quattro poligoni geometricamente dimostrabili: sì [p. 11] tutt' i possibili ad inscrivarsi, e circoscrivarsi al cerchio, ma non geometricamente dimostrabili. Ma è dimostrativamente certo, che ciascuna corda ha il suo seno; è dimostrativamente certo, che il quadrato di ciascun seno rispetto al cerchio è mezzo armonico della ragione, in cui si è diviso il diametro; è dimostrativamente certo, che sia diviso il diametro in parti razionali, o irrazionali, la suddetta proposizione è sempre vera, essendo ben facile il dimostrarla sopra un diametro (per esempio) composto da un lato del quadrato e dalla sua diagonale. Adunque rispetto alle rette regolari figure inscritte, e circoscritte al cerchio non vi è confronto, e proporzione tra la scienza che si ha dal breve confine, a cui è ristretta la Geometria e quella che può aversi dall'illimitato confine dell'arca scienza fondata sul cerchio. Questa è la necessaria riflessione da farsi nel caso presente, e consiste in ristretto nel riflettere che da due mill'anni e più la Geometria si è fondata ne' seni come puramente mezzi geometrici della ragione, in cui si divide il diametro; ma fin'ora niuno si è avveduto mai, che i medesimi seni rispetto al cerchio sono mezzi arca della stessa ragione ridotta a proporzione geometrica discreta. Il fondamento della geometria è dimostrativamente vero, e tale si riconosce a prima vista; ma perciò appunto perché subito si rileva, è fondamento di superficie, non di sostanza di cosa: è materiale, non formale. È ben facile l'avvedersene se si rifletta, che se non si suppone il cerchio, non può supporre il diametro se non come una semplice retta linea, la quale da se sola è affatto priva, e incapace della proprietà, ed affezione de' seni. Se dunque è forza supporre il diametro di cerchio, è forza supporre tale a priori, cioè innanzi che sia divisa in qualunque ragione. Questa prima e necessaria sua determinazione a priori è quella, che porta seco di assoluto principio primo la relazione al cerchio prima, e anteriore che al diametro, della ragione in cui il diametro si è diviso per il seno. Di ciò n'è prova dimostrativa il quadrato del semidiametro in piano CB, che come seno protratto è sempre semidiametro, ed è sempre mezzo aritmetico della proporzione geometrica discreta, a cui si è ridotta la ragione del diametro diviso, e di cui è sempre mezzo armonico il quadrato del seno determinato dal cerchio. Questa proprietà è di assoluto intrinseco principio primo delle due figure congiunte, cerchio e quadrato, e però non solamente inseparabile dalla seconda estrinseca proprietà ch'è la divisione del diametro, ma anzi riducente, e risolvente la estrinseca geometrica proprietà del seno come relativo al diametro, alla intrinseca arca proprietà dello stesso seno come relativo al cerchio. Questa è la prima originale relazione, ed è necessaria: quella è seconda, originata, e rispetto alla ragione in cui si vuol dividere il diametro, è puramente arbitraria. Ma questa seconda relazione essendo la manifesta, perché è di superficie: quella prima occulta, perché di centro, n'è seguito che la occulta non si è mai scoperta, perché non sapendosi che vi fosse, non si è mai cercata. Ma intanto Platone ha detto il vero, quando ha detto che nella Geometria vi è ben:mo la traccia della scienza suprema, cioè dell'arca scienza; ma che i Geometri ne parlano di essa come operarij etc.: Passando [p. 12] dalla riflessione al fatto, questo aiuta infinitamente la riflessione ed è il seguente. Sia per sé la circonferenza circolare; sarà \bigcirc . Vi si aggiunga il diametro AB: sarà \bigcirc con A sopra e B sotto, e la circonferenza sarà divisa in due parti uguali, ma poi il solo diametro non basta alla formazione di una retta figura regolare. Sia dunque divisa per serie la circonferenza in tre parti uguali: sarà AC \bigcirc con A sopra e C a destra.

lato del triangolo equilatero, e questa sarà la prima retta figura regolare che può inscrivere nel cerchio. Si divida per serie la circonferenza in quattro parti uguali: sarà AD  lato del quadrato inscritto, seconda possibile figura regolare. Alle brevi: si divida la circonferenza in cinque parti uguali: sarà lato di pentagono. Si divida in sei: sarà lato di esagono, terza, e quarta figura regolare etc. Qui si domanda: per la formazione ordinata di tutte queste rette figure regolari con qual serie si è in necessità di fatto di divider la circonferenza? Se il diametro la divide in due parti uguali, il triangolo equilatero in tre, il quadrato in quattro, il pentagono in cinque, l'esagono in sei; e se la determinazione della figura dipende dal dato primo lato, è manifesto che la determinazione dipende per serie da $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$ della circonferenza. Ma questa serie è di fatto l'armonica. Dunque di fatto per costruire nel suo principio primo la serie delle rette regolari figure deve divider la circonferenza per l'armonica serie continua. Questo è spettacolo di fatto: era innanzi gli occhi di tutto il geom:co mondo; e pure non si è mai avvertito, perche si sarebbe conosciuta co'l fatto l'armonica natura della circonferenza nel suo principio affatto primo qual è la sola circonferenza circolare. Può darsi che la massima semplicità della cosa abbia impedita la osservazione del fatto. Ma qualunque ne sia stata la cagione, il fatto è tale, e co'l fatto sempre più si conferma la verità di quanto ha detto Platone de' Geometri. La scienza poi ch'è indicata dal fatto, è piucch'evidente, perche di fatto è determinata la prima retta figura regolare ch'è il triangolo equilatero, dalla ragion tripla: egualm:te razionale nel suo principio affatto primo della circonferenza  in AE $\frac{1}{3}$ rispetto alla circonferenza intiera: egualm:te razionale nel suo effetto ch'è il diametro AB diviso dal seno CE in quattro parti uguali, delle quali CB = 1 : CA = 3, ch'è la ragion tripla.



E si noti la natura delle due triple: armonica nella circonferenza, perch'è per divisione: aritmetica nel diametro, perch'è per somma. Né qui osta la razionalità della circonferenza incompatibile con la razionalità del diametro, cosicche se si voglia l'una razionale, l'altra in rapporto diventa irrazionale. Questo è il nodo da sciogliersi in forza della scienza del cerchio e non della geometria, o delle altre note scienze dimostrative, le quali non vagliono a tanto. A suo luogo si troverà sciolto. Se poi si considerino in se stesse le due rette AB diametro: AE lato del triangolo equilatero, queste sono tra loro in radice sesquiterza, perche il quadrato di AB = 4: il quadrato AE = 3. Omessa la dimostrazione come superflua (è de' primi geom:ci rudimenti) ne viene di conseguenza dimostrativa e di necessità di fatto che l'esame della ragione tra il diametro, e la circonferenza debba trasportarsi dal fondamento materiale del meccanismo de' poligoni al fondamento formale della scienza inseparabile dalla nozione dimostrativa, e di fatto, che si ha dell'arm:ca natura del cerchio, e della tripla, come principio primo delle rette regolari figure determinate dal cerchio, e come prima, ed unica proporzione per sé inseparabile dall'arm:ca natura del cerchio, il che si dimostra. [p. 13]

Se il primo poligono (il triangolo equilatero) è determinato dal cerchio armonicam:te diviso nella tripla. Se dal primo poligono si risolve il diametro nella ragion tripla. Se i due quadrati del diametro, e del lato del primo poligono si risolvono nella ragion sesquiterza; è dimostrativam:te certo che tutto ciò si risolve, e rinchiude, come in suo principio primo, nella tripla geom:ca discreta 2 : 3 : 4 : 6, i di cui estremi 2 : 6 sono tripli, e i di cui mezzi 3 : 4

formanti il centro della proporzione sono tra loro in ragion sesquiterza, cioè 3 mezzo armonico: 4 mezzo aritmetico. Indi rispetto al diametro AB diviso nella ragione tripla dal seno CE, per la stessa tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 6$ si dimostra il quadrato di CE = 3 mezzo armonico, il quadrato del seno protratto ch'è il semidiametro = 4, mezzo aritmetico di questa proporzione. Perche se il quadrato di AB ch'è diviso dal seno in quattro parti uguali, dev'esser = 16, sarà = 4 il quadrato del semidiametro ch'è = 2. Ma il quadrato di CE è = 3, e 3 è il mezzo armonico: 4 il mezzo aritmetico della tripla $2 : 3 : 4 : 6$. Adunque si è dimostrato etc.; ed oltre la principal proposizione qui dimostrata si noti la precisa dimostrazione della natura delle due triple, qui sopr'accennata, cioè arm:ca nella circonferenza per divisione: aritm:ca nel diametro per somma. Come che in questo principio si vuol proceder con brevità, e ristrettezza, così si omette per ora quanto vi è da notare in questa precisione veram:te piena di scienza. Si omette parim:ti la material indicazione della tripla che si ha dal diametro 7, e dalla circonferenza quasi 22; essendo vero di fatto che il diametro alla circonferenza è come 1 a 3: più la ragione di 21 a quasi 22, incognita di quantità, e di principio. Si omette finalm:te la formal indicazione che si ha dalla corda AE uguale al semidiametro , ed altre molte che possono aversi dalla Geometria comune. Una sola avvertenza non deve ommettersi perche necessaria. Tra poco dovendo assegnarsi per diametro 7, somma di $3 : 4$, centro della tripla geom:ca dis: , questo termine si assume come aritm:co, perche vero mezzo aritm:co tra $3 : 4$ duplicati in $6 : 8$, e però = $3 : \frac{1}{2}$. Il vero mezzo aritm:co della proporzione essendo il termine 4, non facciano confusione questi due mezzi in aritm:ca natura finche non si arrivi al vero tempo, e luogo di assegnar la dottrina, e la spiegazione.

Qui al bisogno basta per ora la suddetta dimostrazione, e nulla più, per conchiuder di conseguenza dimostrativa, e manca di necessità di fatto, che per aver vera scienza del cerchio deve abbandonarsi la material figura de' i poligoni, e assumersi la tripla geom:ca discreta costituita da i due mezzi determinati, armonico, e aritmetico in $2 : 3 : 4 : 6$. Né qui ha luogo la solita cantilena che si apporta in opposizione, co'l dire che le ragioni, e proporzioni sono puram:te disegnazioni umane, per venir poi a conchiudere che la scienza del cerchio dedotta dalla suddetta proporzione, o da qual altra si voglia, non può esser scienza di realtà di cosa, ma di semplice umana disegnazione. A questa opposizione qui non vi è luogo, perch'è distrutta dal fatto.

Se di fatto la sopra rilevata proprietà, e affezione si trova inseparabilm:te annessa alla figura circolare, e intrinsecam:te dipendente dalla sua costruzione, bisognerebbe arrivar a provare che la figura circolare è una semplice umana disegnazione per conchiuder rettam:te che la scienza dedotta dal cerchio è dell'indole stessa. Ma in faccia dell'universo tutto in genere, dell'astronomia in specie, chi sarà sì temerario, che ardisca asserire la figura sferica una semplice umana disegnazione? E se in solido la figura è reale, ed affatto indipendente dall'arbitriom e disegnazione umana; e se in piano la figura circolare è radice, e legge della sferica figura, non dovrà quella ch'è legge, e radice, esser anzi più reale a priori, com'è la radice del prodotto, la cagione dell'effetto? E se di questa figura circolare, come cosa fatta, si trova legge, principio, e cagione facitrice, non dovrà qui trovarsi la massima realtà? Ma qui appunto sta la scienza del cerchio. Adunque etc. [p. 14]

Ritornando al fondamento formale della tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 6$, se pur è vero quanto fin qui si è dimostrato, per necessaria inevitabile conseguenza deve trovarsi in questa proporzione la estrinseca misura circolare che consiste nella ragione del diametro alla circonferenza. Non basta: deve avverarsi l'arm:ca estrinseca natura del cerchio relativa alla tripla, come armonica nel cerchio, deve avverarsi l'aritm:ca estrinseca natura del diametro relativa alla tripla, come aritmetica nel diametro. Non basta ancora: se il diametro è necessariam:te relativo

al centro della circonferenza (dal centro alla circonferenza il semidiametro è misura di unità, e questo è il centro che nel suo giro formando necessariamente il semidiametro, si risolve, e ritorna in se stesso) necessariamente nel centro della proporzione deve trovarsi il diametro. Ma il centro della tripla geometrica discreta $2 : 3 : 4 : 6$: è la sesquiterza $3 : 4$, e il diametro dev'esser di aritmetica estrinseca natura. Adunque non può esser che $3 : \frac{1}{2}$. Ma la circonferenza è dimostrativamente indicata nel suo principio primo dalla tripla armonica. Adunque non può esser che la somma di $6 : 3 : 2$, ch'è 11: tripla in aritmetica proporzione, da cui resta necessariamente escluso il mezzo aritmetico 4. Ma $3 : \frac{1}{2}$ a 11 è come 7 a 22, ch'è la ragione dimostrata con i poligoni da Archimede. Adunque tutto vero da principio a fine. Qui si compari la intelligenza materiale che si ha dalla misura dei poligoni con la formale che si ha dalla misura della suddetta proporzione, e s'incomincerà a capire col fatto alla mano la specifica differenza che vi è tra le comuni scienze dimostrative, e l'aritmetica scienza.

Ma qui nasce un rovescio d'idea, perche da tutte le note scienze dimostrative si assume il diametro come quantità cognita, e razionale: la circonferenza come quantità incognita, e irrazionale. Indi appunto è provenuta la ricerca della quadratura del cerchio col ridurre a linea retta, come nota, la linea curva (la linea circolare è la massima delle curve) come ignota; ed indi nelle scienze suddette si prosiegue attualmente lo studio indefesso della rettificazione delle curve di ogni genere. Per il contrario dall'aritmetica scienza si determina di primo lancio nella tripla geometrica discreta la quantità della circonferenza, come cognita, razionale, e inalterabile, nella somma 11 dei tre termini $6 : 3 : 2$ formanti la tripla armonica. Per necessaria conseguenza il diametro, che appresso i geometri si suppone di quantità nota, e razionale, qui deve supporre di quantità incognita, e irrazionale; e però nella geometria trovandosi l'eccesso d'incognita quantità nel termine 22 della circonferenza, qui si trova il difetto d'incognita quantità nel termine 7 del diametro. Questo è un rovescio totale d'idea, perche da questa scienza si determina la linea curva circolare come nota: la retta del diametro come ignota, quando appresso tutte le note scienze dimostrative si suppone la retta linea come nota, la curva come ignota. Dove dunque il torto, dove la ragione? Come compatibili tra loro le due contrarie idee? Niente più facile di questo. Il calcolo delle comuni scienze dimostrative istituito per la misura del diametro, e della circonferenza, è intrinsecamente aritmetico, perche nel suo principio primo si risolve nella divisione del diametro [p. 15] in parti uguali, alle quali si tenta di ridurre la circonferenza divisa nelle stesse parti con sempre maggior approssimazione alla egualità della minima particella che nel diametro rappresenta, ed è realmente l'aritmetica unità come misura comune delle parti del diametro, e della circonferenza. Il calcolo dell'armonica scienza è intrinsecamente armonico, perche nel suo principio primo è fondato nella divisione della circonferenza non già nell'aritmetica serie delle parti eguali, ma nell'armonica serie delle ragioni espresse dalla serie delle frazioni $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ etc. , come si è dimostrato col fatto nella formazione delle rette regolari figure. È chiaro che le frazioni $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ etc. non sono parti uguali né per il loro denominatore, né per il loro numeratore. È chiaro che nel primo loro concetto non possono intendersi se non che forme di ragioni, perche non vi è tra loro egualità di termini. È chiaro che trasportando le ragioni dell'armonico sistema delle frazioni all'aritmetico sistema del numero, le ragioni cambiano luogo, quantità, e natura. Luogo, perche data la unità principio comune, qualunque armonica ragione è dentro la unità, e però intrinseca: qualunque aritmetica ragione è fuori della unità, e però estrinseca. Quantità, perché sommando (per esempio) i due termini della dupla armonica $1 : \frac{1}{2}$, la somma è $1 : \frac{1}{2}$: sommando i due termini della subdupla aritmetica $1 : 2$, la somma è 3. Natura, perche l'armonica serie procede dal più al meno per differenze ineguali: l'aritmetica serie dal meno al più per differenze eguali, e però natura opposta (ma sulla loro intrinseca diversità a suo tempo e luogo).

A ragguglio se fondandosi il calcolo aritmetico sul diametro si trova la irrazionalità nella

circonferenza, è ben chiaro che dovendosi fondare il calcolo armonico sulla circonferenza, deve trovarsi la irrazionalità nel diametro. Oltre di che si sa comunemente che secondo il rispetto di maggior, e minor inegualità si convertono nel loro rapporto i termini di qualunque data ragione, cosicché come per rapporto di maggior inegualità si ha 2 a Rg 3; così per rapporto di minor inegualità si ha Rg 3 a 2. Perciò la difficoltà non consiste altrimenti nella conversione della irrazionalità della circonferenza nella irrazionalità del diametro; consiste bensì nella retta intelligenza della natura delle ragioni, di cui nelle comuni scienze dimostrative si è affatto all'oscuro. Dalla sola musica si ha la retta loro intelligenza: non tanto in genere per quella sì dilettevole armonia che procede dalla loro applicazione ai corpi sonori, e che ha la facoltà di arrivar a dominare sugli animi umani; quanto in specie; e precisione per quel terzo suono che risulta da ciascuna ragione applicata ai corpi sonori. Il fenomeno è questo. Applicata la ragione dupla $1 : \frac{1}{2}$: a due corpi sonori, dai loro due suoni simultanei risulta un terzo suono unisono al suono 1. Applicata la sesquialtera $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, risulta lo stesso terzo suono unisono al suono 1. Applicata la sesquiterza $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, succede lo stesso. Insomma applicata qualunque ragione per differenza 1, e per differenza 2 tra i denominatori dell'armonica serie: per esempio $\frac{1}{100} : \frac{1}{101} : \frac{1}{253} : \frac{1}{255}$ etc.; costantemente da tutte le ragioni sì separate, che congiunte in proporzione, e serie risulta lo stesso terzo suono unisono al suono 1, ch'è il tutto dell'armonica proporzione, e serie.

La sua formola si ha unicamente dal numero comune aritmetico, ed è la moltiplica fra loro de i due numeri della ragione, in cui sono i due dati suoni, e il prodotto è il terzo suono. Siano i suoni in dupla $2 : 1$: sarà il terzo suono = 2, perchè $1 \times 2 = 2$. Siano in sesquialtera $3 : 2$: sarà il terzo suono = 6, perchè $2 \times 3 = 6$ etc: Per poi ridurre i diversi prodotti alla unità, in cui fisicamente è il terzo suono, si riducano le diverse ragioni a denominazione comune. Date le due ragioni $1 \times 2 = 2 : 2 \times 3 = 6$, è chiaro che i due terzi suoni $2 : 6$ non sono nella unità. Ma ridotte le due ragioni a denominazione comune in $6 : 3$ dupla; $3 : 2$ sesquialtera, è fisicamente certo che di $6 : 3$: il terzo suono è 6, di $3 : 2$, il terzo suono è 6, e ciò perchè dimostrativamente $6 : 3 : 2 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$.

Questa formola che nel terzo suono risolve tutte le indefinite ragioni della serie nell'armonica matematica unità, ch'è il principio, e il tutto della serie, si verifica nella sola armonica proporzione, e serie: non si verifica in qual'altra si voglia, perchè in qualunque che non sia l'armonica, la unità del terzo suono si moltiplica, e diversifica in più unità tra loro diverse, che vuol dire in [p. 16] più principj, che non hanno, né possono avere un principio comune. L'adeguata idea di questo fatto si ha precisamente nelle geometriche figure. Dato il cerchio, dal centro alla circonferenza è completamente misurato dal raggio come unità di misura. Dato il triangolo equilatero, dal centro agli angoli si trova la unità misura comune: non si trova nella perpendicolare del centro. Dato il quadrato, succede la stessa diversità di misura, e così succede in tutte affatto le assegnabili figure fuorché nel solo cerchio. Questa proprietà ch'è unica del cerchio, poteva ben:mo scoprir l'armonica natura del cerchio, se fosse stata nota la vera natura delle ragioni. Ma questa (si confessa) non poteva esser nota, se non si scopriva il fenomeno del terzo suono, il quale essendo di scoperta assai recente (fu scoperto dall'autore nel 1714 in Ancona) ed appartenendo immediatamente alla musica, perchè questo terzo suono è il basso fondamentale dell'armonia, benché pubblicato dall'autore nel suo Trattato di Musica, e diffuso per tutta Europa da' suoi scolari, non si è mai seriamente considerato da i fisico matematici, benché efficacemente eccitati dall'autore. (Sono tutti viventi: Eulero in Berlino, D'Alembert in Parigi, Lesseur e Pachier in Roma; essi uomini sommi: l'autore un suonator di violino: troppa lontananza a dispetto del vero). Ma ciò che allora non si è fatto volontariamente da tali soggetti, è da farsi presentemente per forza; e si voglia, o no, conviene rispondere al suonator di violino sù quanto qui propone e dimostra: fondato sù'l fenomeno del terzo suono, che vuol dire sù fisico fondamento.

Primieram:te tornino qui a memoria le parole sotto segnate a carte 6 del testo di Platone che dice: Fra questo spazio di suoni dicono udirsi ancora qualche altro suono; ma non è d'ascoltarsi chi lo dice, perche non passa poi a considerare quai siano numeri consonanti, e per qual cagione siano tali. Se dunque Platone non nega udirsi qualche altro suono tra lo spazio de' i dati suoni, ma non ascolta chi lo dice, perche da questo fatto non deduce i numeri consonanti, e la cagione, per cui sono tali, è chiaro che Platone non solam:te ammette il fatto di questo qualche altro suono, ma di più intende (e principalm:te) che di questo fatto vi sia la scienza, perche intende che dal medesimo si deducano i numeri consonanti, e la cagione, per cui sono tali. Se così è, questa è patentem:te scienza di armonia indicata, e dedotta dal terzo suono. Si vegga a prova.

La consonante armonia è la congiunzione delle parti nella unità del loro tutto. È fatto, perche più le parti sono congiunte nella unità del loro tutto, più l'armonia è consonante nel suo effetto, ch'è il piacere dell'udito; e però la perfet:ma consonante armonia è la perfet:ma congiunzione delle parti nella unità del loro tutto. Perciò dati (per esempio) in simultanea consonante armonia tre suoni in ragione di $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$, quest'armonia non sarà così perfetta, come sarà coll'interporvi tra $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$: il mezzo armonico $\frac{1}{3}$, perche da $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ si ha il terzo suono = $\frac{1}{2}$ che non è la unità dell'arm:ca serie. Si ha bensì da $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ il terzo suono = 1; ma perche si hanno due terzi suoni $1 : \frac{1}{2}$, e non il solo della unità, perciò appunto l'armonia non può esser la più perfetta. Per il contrario interpostovi $\frac{1}{3}$, da $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ si avrà il terzo suono = 1, da $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ il terzo suono = 1, da $\frac{1}{4} : \frac{1}{5}$ il terzo suono = 1; e però l'armonia sarà più perfetta e lo è di fatto nel maggior piacere dell'udito. Egualm:te dati tre suoni in ragione di $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$, l'armonia non sarà così perfetta, come sarà trasportando la dupla $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ al suo vero luogo in $1 : \frac{1}{2}$ ch'è la prima ragione dell'arm:ca serie; e ciò perche da $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ si avrà il terzo suono = $\frac{1}{3}$, che non è la unità dell'arm:ca serie. Ma da $1 : \frac{1}{2}$ avendosi il terzo suono = 1, come si ha da $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, è certo di fisica certezza che la consonante armonia $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ è più perfetta della consonante armonia $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$; il che viene fisicam:te comprovato dall'effetto, ch'è l'evident:mo maggior piacere dell'udito che risulta da quell'armonia, il di cui terzo suono è sempre = 1, a confronto di qualunque armonia, il di cui terzo suono non sia = 1, o da cui risultino più terzi suoni che il solo = 1. È dunque forza conchiudere che dal terzo suono si ha scienza positiva, e reale della consonante armonia, della di cui natura nulla si è fin qui saputo; essendosi da i musici, e da i moderni filosofi sempre definita dall'effetto con dire che la consonanza è quella che piace all'udito: la dissonanza quella che dispiace all'udito. Ma nella unità del terzo suono ritrovandosi la cagione della consonante natura, e la notizia della cagione formando vera scienza, con ciò si verifica precisam:te il testo di Platone in quella parte che afferma esservi la cagione, per cui i numeri consonanti siano tali.

Rimane a verificare l'altra parte, ed è quai siano i numeri consonanti. Nella musica attuale cinque sono le ragioni consonanti: dupla, sesquialtera, sesquiterza, sesquiquarta, e sesquiquinta. Due sono le serie di questa consonante armonia in genere: l'arm:ca espressa dalle frazioni in arm:ca proporzione, e serie $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$, e dal numero $60 : 30 : 20 : 15 : 12 : 10 = 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$; e questa praticam:te si chiama del modo maggiore: l'aritm:ca espressa dal numero in aritm:ca proporzione, e serie $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$, e questa praticam:te si chiama del modo minore.

Questi due modi estendendosi fin alla sestupla: il maggiore da 1 fin ad $\frac{1}{6}$: il minore da 1 fin a 6, è chiaro che i numeri consonanti devono esser sei: non più, né meno. Ma qui appunto s'incontra la massima difficoltà della consonante armonia: difficoltà finora insuperabile, che ha ridotto, e mantiene i musici, e i fisico-mat:ci nella disperazione di scioglierla. Questa consiste in due punti. Primo: la consonante armonia è determinata con tal rigore al sestuplo confine, che oltrepasandolo di qualsivoglia ragione che non sia delle replicate della sestupla, ma diversa, il

consonante sistema inevitabilmente si cambia nel suo contrario, ch'è il dissonante sistema. Dopo $\frac{1}{6}$ armonico succede immediatamente $\frac{1}{7}$: dopo 6 aritmico succede 7. La ragione formata da $\frac{1}{6} : \frac{1}{7}$, o da $6 : 7$ è dissonante, e così è di qualunque aggiunta ragione diversa dalle cinque costituenti la sestupla. Qual è dunque la cagione di questo cambiamento totale di natura tra $\frac{1}{6} : \frac{1}{7}$, o tra $6 : 7$, o tra qual ragione si assegni? Dopo infinite, ma vane ricerche la cagione non si sa, e si confessa di non sapersi. Secondo punto: il modo maggior consonante ch'è l'armonico (praticamente di terza maggiore) è determinato fisicamente tale cioè consonante, del terzo suono = 1, come qui sopra si è spiegato. Il modo minor consonante ch'è l'aritmico (praticamente di terza minore) non solo non è, né può esser determinato consonante dal terzo suono = 1, come lo è il modo maggiore, ma dal sistema del modo minore risultando non uno, ma quattro terzi suoni tra loro diversi, ne viene che se questi fossero sensibili egualmente che i dati suoni, dai quali risultano, la consonante armonia del modo minore diverrebbe dissonante, né in guisa veruna potrebbe aver luogo nella musica attuale. [p. 18]

Ecco, in prime ragioni, e termini espressi musicalmente i quattro terzi suoni che risultano dall'aritmica sestupla serie $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$, il di cui ultimo termine 6 sia musicalmente Csolfaut.  Gli estremi di questi quattro terzi suoni sono tra loro in settima maggiore, la quale tra tutte le diatoniche dissonanze è di tutte la più aspra, e ingrata all'udito. Che la consonante armonia del modo maggiore sia molto più perfetta della consonante armonia del modo minore, si accorda, e confessa dal sentimento universale della Musical Professione, e si conferma col fatto dalle regole attuali del contrappunto. Ma ciò non diversifica i due modi come consonanti, perché il più, e il meno non costituisce specifica differenza; e però l'uno, e l'altro modo resta nel genere della consonante armonia, anzi l'uno, e l'altro insieme costituiscono il genere universale della consonante armonia, la quale poi si divide nelle due specie de' suddetti due modi, maggiore, e minore. Ma che il modo maggiore consonante dipenda da una cagione ch'è la fisica del terzo suono; e che il modo minor consonante dipenda certamente da una cagione diversa dal terzo suono, e certamente di genere diverso dal fisico, questa è la massima difficoltà del secondo punto. Questa è impossibile a sciogliersi quando non si assegni, e dimostri un principio primo, e universale della consonante armonia, il quale contenga in se stesso i due diversi principj, come due specie diverse, della consonante armonia dei due suddetti modi, e questi due principj diversi si risolvano nell'assegnato, e dimostrato principio primo, e universale, il quale contenga in se stesso eminentemente l'essenza e natura dell'armonica unità estesa a più di un genere, perché se positivamente sia di genere fisico, non può comprender la consonante armonia del modo minore; se negativamente sia di genere non fisico, non può comprender la consonante armonia del modo maggiore. Da ciò si rileva che nel vero universale principio della consonante armonia deve infallibilmente trovarsi la cagione del sestuplo consonante confine: devono trovarsi i due diversi principj consonanti de' due modi, maggiore, e minore. Ma la consonante armonia è la principale parte dell'armonica scienza, e questa è fondata nel cerchio, ch'è il suo vero, ed unico soggetto. Adunque nel cerchio deve infallibilmente trovarsi la cagione del sestuplo consonante confine: devono trovarsi i due diversi consonanti principj de' due modi, maggior, e minore. Ma tanto si trova nel cerchio. e si verifica col fatto, e con la dimostrazione, come si esporrà a suo luogo. È dunque vera, e reale l'armonica scienza fondata nel cerchio; e per conseguenza sono veri tutti i testi di Platone relativi a questa scienza.

Tutto ciò è stato previamente necessario dopo la risposta che si è data nella seconda proposizione alla istanza per qual principio, legge, o cagione il cerchio sia, e deva esser necessariamente uno in se stesso. Si è risposto esser tale per il principio, legge, o cagione dell'aritmica proporzione, da cui è costruito. Ivi si è proseguito a dimostrare, e si è dimostrato che realmente è costituito dal-

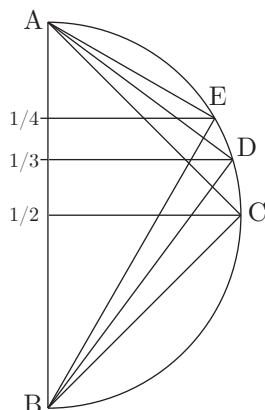
l'arm:ca proporzione; ma poi proseguendo la istanza: come si verifichi che l'arm:ca proporzione produca, e costituisca eminentem:te la unità nel suo principio primo, e a questa necessariam:te riduca qualunque soggetto, a cui sia intrinsecam:te congiunta, e di cui sia prima legge, a questa [p. 19] istanza non si poteva rispondere se non che premettendo, e spiegando il fatto del terzo suono, per verificare fisicam:te con risposta di fatto la metafisica facoltà, e natura dell'armonica proporzione. Ma qui s'insisterà co'l dire che alla intima intelligenza dell'arm:ca unità non basta il fatto del terzo suono, anzi vi si oppone, perche il suo fisico soggetto essendo una tesa corda sonora che rappresenta una semplice retta linea, questa non ha rapporto veruno al cerchio; e però vi saranno due principj di arm:ca natura: uno rappresentato dalla linea retta, l'altro dalla circolare, e saranno egualm:te nel continuo che non può non esser uno in se stesso, come sono le due linee, retta, e circolare. Se sono due gli armonici principj, è intrinsecam:te distrutto il principio fondamentale di quell'armonica unità che qui si asserisce una di unicità assoluta. Ma come ciò si pretende, se della unità vi sono idee sì diverse? Vi è la unità di termine, com'è 1 aritm:co che compete a ciascun corpo, e individuo: la unità indivisa, come l'istante, la monade: la unità astratta, come una città, un'armata: la unità esclusiva, come un Dio, una fede: la unità convenzionale, come uno scudo per il valore, un piede per la misura etc. etc. Vi è anche l'arm:ca unità, ma in senso proprio, e comune questa s' intende un' accordo, un' ordine di parti musicali, secondo il quale si dice metaforicam:te una ben regolata famiglia, una ben ordinata società, unità di un poema, di una fabbrica etc. Queste, ed altre idee di unità sono tutte tra loro diverse, e perciò è contro la ragione, e il fatto la pretesa unicità della unità arm:ca. E poi da una parte è fatto, che questa unità è unicam:te fondata sul quanto; dall'altra è fatto che la idea più involuta di tutte le idee si è la unità metafisica, di che n'è prova il Parmenide di Platone. Come dunque l'arm:ca scienza, di cui qui si pretende Platone maestro, e possessore, puo aver per suo fondamento l'arm:ca unità che unicam:te appartiene al quanto, e nello stesso tempo puo esser scienza universale del quanto, del quale, e di tutte quelle idee di unità, nelle quali si trova involuta la unità metafisica, che nel Parmenide si tratta da Platone in genere dubitativo, e si lascia affatto indecisa?

Se più oltre potesse avanzarsi la insistenza, qui si farebbe dall'autore senza timor, e soggezione della risposta che decisivam:te incontra e questa, e quante insistenze, e opposizioni possano apportarsi contro la sua arm:ca unità. La risposta è questa. Né l'arm:ca unità secondo il senso, e concetto comune qui sopra esposto, né le altre qui sopr'assegnate, o che possano assegnarsi, significano in modo veruno la fisico-arm:a unità del terzo suono, perche in questa vi è fisica realtà, mentre dati due termini fisici nei due suoni, si ha il terzo termine fisico nel terzo suono: si ha indipendente da disegnazione, e arbitrio umano: si ha costante in quella unità ch'è il tutto armonico; e si ha in forza di un astratto principio originalm:te armonico, quali sono le ragioni costituenti l'armonica proporzione, e serie, e realm:te attivo, e produttore, quando sia applicato a i corpi come loro forma. Fin'ora non si è mai avuta idea di tal unità, né può negarsi la sua realtà, perch'è fatto. Come fatto, l'apporta qui l'autore contro tutte le insistenze, e opposizioni che qui non hanno più luogo, e lo assume come un fisico dato sicuro per passar dal fatto alla massima scienza che qui si rinchiude, ed è la seguente.

È assioma più che proposizione, in cui si concorda, che quando la stessa formola si verifica [p. 20] in due soggetti diversi, questi sono necessariam:te della stessa natura, e dipendono dallo stesso principio. Date in serie le forme delle ragioni: dupla 2 : 1, sesquialtera 3 : 2, sesquiterza 4 : 3 etc., ed applicate con la stessa serie a due suoni, per la formola del terzo suono saranno:

	terzi suoni
$1 \times 2 =$	2
$2 \times 3 =$	6
$3 \times 4 =$	12 etc.

Questa è formola fondata nel fisico genere, perche ha per fondamento i due dati suoni, da i quali si ha il terzo suono ch'è il terzo termine fisicam:te posto, e voluto dalla fisico-arm:ca natura, la quale con questo terzo termine fa passare i due dati suoni ch'erano in semplice ragione, all'armonica proporzione, e serie. La formola della dupla $1 \times 2 = 2$ è in semplice ragione, perche non vi sono che due termini ineguali. La formola della sesquialtera $2 \times 3 = 6$ è in arm:ca proporzione, perche per le differenze $2:3:6$. La formola della sesquiterza $3 \times 4 = 12$ è in arm:ca serie, perche tra $12 : 4$: interposto il mezzo arm:co 6, che si è avuto in dupla dalla sesquialtera tra $3 : 6$, e che deve sempre congiungersi in serie, si hanno i quattro termini $12 : 6 : 4 : 3$: in arm:ca proporzione, e serie continua etc.



Le stesse forme delle ragioni, dupla, sesquialtera, sesquiterza etc: siano ora applicate al diametro AB in $A\frac{1}{2}$, con cui AB è in dupla: in $A\frac{1}{3}$ con cui $A\frac{1}{2}$ è in sesquialtera: in $A\frac{1}{4}$ con cui $A\frac{1}{3}$ è in sesquiterza etc.: Si deducano i seni, corde, e sottese relative a ciascuna ragione, cioè $\frac{1}{2}C$ seno, AC corda, CB sottesa della dupla: $\frac{1}{3}D$ seno, AD corda, DB sottesa della sesquialtera: $\frac{1}{4}E$ seno, AE corda, EB sottesa della sesquiterza etc.: Indi si assegnino i quadrati dei seni, corde, e sottese di ciascuna ragione. Saranno

dupla:	di $\frac{1}{2}C$ quadr: 1:	di AC quadr: 2:	di CB quadr: 2:
sesquialtera:	di $\frac{1}{3}D$ quadr: 2:	di AD quadr: 3:	di DB quadr: 6.
sesquiterza:	di $\frac{1}{4}E$ quadr: 3:	di AE quadr: 4:	di EB quadr: 12 etc.

Ma questa è formola di puro fondamento dimostrativo, ed è la stessa del terzo suono ch'è di genere fisico, perche

quadrati de' seni	corde	sottese	del terzo suono
1 :	2 :	2 :	= $1 \times 2 = 2$
2 :	3 :	6 :	= $2 \times 3 = 6$.
3 :	4 :	12 :	= $3 \times 4 = 12$.

Adunque il soggetto fisico ch'è il terzo suono: il soggetto dimostrativo ch'è il cerchio, hanno natura, e principio comune. Qui nasce il secondo rovescio d'idea, e maggior del primo, perche secondo il comune concetto al fondamento dimostrativo non si vuol attribuire altra realtà, se non quella che risiede nell'umano intelletto. Ma qui si trova evidentem:te falso questo concetto, perche se il soggetto fisico è reale indipendentem:te dall'umano intelletto, e il soggetto dimostrativo è della stessa natura, e principio del fisico soggetto, è forza che il soggetto dimostrativo sia egualm:te reale che il fisico, ed egualm:te indipendente dall'umano intelletto. Qui non vi è mezzo, e si è in necessità di cambiar idea. Questa è la massima scienza che proviene da un tal punto di vista, ma non è tutta. Il suo compimento si è, che la formola del cerchio è dedotta da i

quadrati, de' quali sono radici le linee de seni, corde, e suttese. Ma la formola del terzo suono [p. 21] è di quantità razionale nel prodotto delle ragioni, cioè $1 \times 2=2$ etc. , la formola delle linee del $2 \times 3=6$

cerchio è di quantità irrazionale nelle radici delle stesse ragioni, cioè Rq $1 \times Rq 1 = 2 : Rq 2 \times Rq 3 = Rq 6$ etc.¹ Adunque la massima realtà è nella formola del cerchio fondata nelle radici: non nella formola del terzo suono espressa nel diametro, la quale è fondata ne' i prodotti; essendo fuor di controversia che la radice sia fondamento del prodotto, com'è la cagione dell'effetto.

Qui si torni alla sopra esposta insistenza, e opposizione su' i due diversi principj dell'arm:ca unità come opposti tra loro, cioè del terzo suono, la di cui unità risulta da due dati suoni fondati sopra una retta linea fisico-sonora, e del cerchio, la di cui unità non può aver rapporto alcuno con una retta linea. La insistenza, e opposizione va in nulla, perche il rapporto del terzo suono al cerchio è tale qual è la loro formola. Ma questa è la stessa nell'uno, e nell'altro, ed è dedotta dalle stesse ragioni fisicam:te costituenti l'arm:ca unità del terzo suono: dimostrativam:te costituenti l'arm:ca unità del cerchio. Adunque la loro arm:ca unità è la stessa di natura, e di principio.

In oltre questa insistenza è fondata in un falso supposto, perche suppone la retta linea per sé, e indipendente dalla linea circolare. Il supposto è fisicam:te, e dimostrativam:te falso. Fisicam:te, perche se la idea delle due linee, retta, e circolare, si desume dai moti de' corpi costituenti l'universo, è chiaro che nell'universo i due moti, retto, e circolare sono congiunti tra loro in perpetua azione, e reazione. Se dunque si suppone o l'uno, o l'altro per se, e indipendente, quando per il contrario si trovano di fatto tra loro congiunti, è chiaro che si suppone fisicam:te il falso. Ma più: il massimo di tutt'i moti è nella luce, la di cui espansione è di natura di linea circolare, e la di cui direzione è di linea retta. È dunque assurdo il suppor fisicam:te per se, e indipendente ciò che fisicam:te si trova congiunto nella natura di quel massimo soggetto dell'universo ch'è la luce, in cui sì per il moto, sì per la sua estensione, sì per la sua azione si trovano eminentem:te impresse le principali fisiche leggi dell'universo. E qui si consideri seriam:te il rapporto della luce alla figura circolare per incominciar una volta a disimbarazzarsi da i falsi fisici principj dominanti, e per formar giusta idea di ciò che rettam:te conduce a i veri principj delle cose. È falso dimostrativam:te, perche dell'infinito è certo da una parte che non vi è scienza, ed è certo dall'altra che una retta linea, la quale sia per se, e indipendente da qualunque relazione, non ha, né può aver confine nel suo progresso di potenza infinito, ed è vero simbolo, e vero simulacro di cosa infinita. È dunque per se incapace di scienza, com'è incapace l'infinito, di cui è simbolo, e simulacro. Non così la linea circolare, la quale necessariam:te tornando in se stessa, non solam:te non ha, né può aver progresso infinito, ma in oltre alla retta linea ch'è per se di [p. 22] progresso potenzialm:te infinito, determina il confine sì nel diametro, che nel raggio. In questa, perche determinata, può aversi scienza, e si ha di fatto; ma poi si rifletta che questa scienza si ha in grazia del cerchio determinante, il che si tocca con mano specialm:te nella Geometria, da cui se si escluda la figura circolare, qual scienza rimane mai nella sola retta linea? La più miserabile, e mendica, che a confronto possa immaginarsi. Se dunque di fatto la somma scienza della retta linea è nel cerchio, e per il cerchio, e la ragione di esservi è l'unica di esser diametro, o raggio di cerchio, è assurdo manifesto il separarla dal cerchio per poi opporla a quella precisa scienza che ha in fatto, quando come diametro, o raggio s'intenda inseparabile dal cerchio. Qui egualm:te con posatezza si rilevi il peso, e il significato di quanto si è qui esposto sulla sopra citata insistenza, e opposizione. Gioverà molto alla intelligenza di quanto si esporrà in seguito, ed alla formazione delle vere idee de' i principj dimostrativi, di che vi è il sommo preciso bisogno. Fa veram:te maraviglia che tutti in genere i principj dimostrativi si vogliano creder da i dotti moderni pure umane designazioni senza realtà veruna fuorché nell'intelletto. Che così lo

¹Probabilmente intende invece $\sqrt{1} \times \sqrt{2} = \sqrt{2} : \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

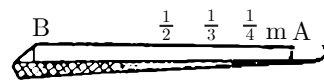
stesso Platone intenda de' geom: i principj come ipotetici, e supposti, va benissimo, ed è chiaro il di lui testo qui apportato a carte 5. Ma nello stesso testo divide poi Platone la intelligenza che proviene da que' principj che non sono in ipotesi, e in supposto ma reali, dal discorso che proviene da que' principj che unicam:te sono in ipotesi e in supposto; ponendo la intelligenza nel supremo grado, il discorso nel secondo. Qui dunque si venga al fatto, separando secondo la mente di Platone tra i principj dimostrativi gl' ipotetici da i reali. È certo (per il testo apportato a carte 6) che Platone suppone questi principj reali nell'Astronomia, e nella Musica, perche ivi conchiude che se di queste si toccasse la vicendevole loro comunicanza, e s'investigasse in che modo se ne stiano congiunte di compagnia, si penserebbe a ciò che si desidera, cioè a quella scienza suprema che produce intelligenza, e non discorso. e che però dev'esser necessariam:te fondata su' principj reali.

Rispetto all'Astronomia Platone nell'Epinomide cercando il soggetto in cui unicam:te risiede la sapienza, lo trova unicam:te nel numero, mancando il quale il genere umano sarebbe insipido, e pazzo, e però lo chiama dono puram:te divino. Indi proseguendo a considerar il numero nella varietà, e giri delle stelle, e delle stagioni con riflessioni tutte importanti, né ommettendo la necessità ch'egualm:te ha la musica del numero, e del moto, perviene finalm:te alla considerazione del modo con cui si ha imparato ad annoverare. Il di lui testo (a carte 323) è lungo: qui si abbrevia nella sua sostanza; ed è, che volente, nolente, tutto il genere umano è costretto ad imparar il numero da i giorni, e dalle notti, cosicche sia costretto ad impararlo anche il tardissimo ad apprendere tra tutti gli uomini. Benche in seguito Platone avanzi molto più il numero in altri rispetti astronomici, qui nulla più abbisogna di questa sola palpabile verità per comparar fondatam:te i due concetti di principio, cioè il concetto del punto, linea, e superficie: fondamento della Geometria; il concetto del giorno, e della notte fondamento del numero comune. È qui più ch'evidente la specifica diversità de' due concetti, perche il primo della Geometria dipende puram:te dall'arbitrio, e designazione umana come ipotesi; e perciò [p. 23] è concetto sì fattam:te particolare, che la massima parte del genere umano nulla sa di punto, linea, e superficie, perche la idea non essendo di cosa reale, non obbliga l'intelletto a doverla necessariam:te assumer, e concepire. Per il contrario il secondo concetto del numero dipende da soggetto fisico, e reale, che vuol dire da vera tesi; e però è concetto sì fattam:te universale, che l'uman genere non solam:te sa il numero, ma voglia, o non voglia, è costretto a doverlo sapere, perche la idea essendo di cosa reale, e necessariam:te, ed universalm:te nota, obbliga l'intelletto a doverla necessariam:te, e universalm:te assumer, e concepire. Qui constando ad evidenza la specifica diversità de' due concetti, si chiede a' i dotti moderni ch'essi dicano, e rispondano in che precisam:te consista questa specifica differenza. Quanto è costretto il genere umano a dover sapere il numero, tanto sono essi costretti a dover rispondere; che la specifica differenza precisam:te consiste nell'esser l'uno de' i concetti positivo, e reale: l'altro ipotetico, immaginario, e di umana designazione; e qui si compari il falso pensar de Filosofi moderni co'l vero pensar di Pitagora, e Platone sù questo punto il più essenziale di tutti, che decide di cosa somma qual è la realtà del genere dimostrativo fondato su'l numero comune insegnato dalle cose, e riferito alle cose come realm:te sono.

Dall'Astronomia passando alla musica per veder se - ancor questa - porti, e obblighi necessariam:te alla nozione del numero, a questo bisogno crede l'autore di esser più forte di Platone: sì perche l'autor è professore di musica, e no'l fù Platone: sì perche da due secoli si sono scoperti molti fenomeni fisico-sonori che giovano al bisogno, certam:te ignoti a Platone. Omettendo per brevità quanto di più somministra la musica ad una tal prova, si vuol qui proporre non altro che un solo fatto. Questo è nel fisico genere, ed è di uno strumento musicale, i cui suoni si hanno puram:te dalla fisica natura che ivi li ha determina-

ti affatto indipendenti dall'arbitrio, e dalla umana disegno. Lo strumento è la tromba marina, sulla cui unica corda non possono aversi altri suoni, che i determinati dall'arm:ca proporzione. e serie: $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ etc.: La tesa corda è AB che posa sù due fulcri stabili AB.

Si suona con l'arco prossimam:te in m verso l'estremo A, e per passar di suono in suono non si comprime co'l dito perpendicolar:te fin



al piano dello strumento come si fa su'l violino, viola etc: , ma si appoggia lateral:te il dito come un fulcro, che non impedisca il corso, e ricorso delle rispettive vibrazioni di quella porzione di corda che vi è dal fulcro fin' all'estremo A. Questi fulcri sono fisicam:te determinati in $\frac{1}{2}$ metà della corda AB, in $\frac{1}{3}$ sua terza parte, in $\frac{1}{4}$ sua quarta parte etc: , e lo sono con tal fisico rigore, che nello spazio di corda tra $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$: non vi è suono: nello spazio tra $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$: non vi è suono etc.: e però co'l dito lateral:te appoggiato passando per il continuo della corda da $\frac{1}{2}$ fin ad $\frac{1}{3}$, non si trova suono finche il dito non sia arrivato al punto fisico di $\frac{1}{3}$, e così da $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{4}$ etc.; e questa medesima legge si trova fisicam:te impressa ne'i corni da caccia, e nelle trombe da fiato. Spiegata questa fisica legge, si supponga un suonatore affatto ignaro del numero, il quale null'altro sapendo che il solo meccanismo di porre l'arco in m , e di appoggiar lateral:te il dito sulla corda della tromba marina, e lo sappia per aver veduto un' altro suonatore, che così faceva, voglia poi da se stesso trovar i suoni di quella corda, e trovati, segnarli con qualche segno per esser pronto a porvi il dito senza bisogno di cercarli, come [p. 24] appunto si fa sù questo strumento, sù cui tutt'i i punti fisici de'i suoni si segnano con lettere musicali, si domanda cosa debba seguire da questa ricerca nel suonatore ignaro del numero? Il fatto risponde che necessariam:te il suonatore deve imparar il numero non nel suo nome, ma nella sua essenza, perche in qualunque modo esso faccia questa ricerca, ne deve seguire che si avvegga esser $\frac{1}{2}A$ la metà della corda AB, e stante la idea di egualità (idea di universal prenozione) esser $\frac{1}{2}A$ eguale a $\frac{1}{2}B$. Si avvegga esser $\frac{1}{3}A$ la terza parte della corda AB, e l'avanzo $\frac{1}{3}B$ esser due terze parti: ciascuna eguale a $\frac{1}{3}A$. Si avvegga esser $\frac{1}{4}A$ la quarta parte della corda AB, e l'avanzo $\frac{1}{4}B$ esser tre parti: ciascuna uguale a $\frac{1}{4}A$ etc.: Questo solo fatto basta, e avanza per prova della facoltà che vi è ne i suoni musicali, di condur necessariam:te qualunque intelletto alla nozione del numero nella sua essenza. Ma in questo fatto vi è molto di più in solo fisico rispetto.

La cagione per cui in questo strumento non possono aversi i suoni se non che in que' soli fulcri, si è la necessaria egualità delle vibrazioni di progresso, e regresso, che scorrono per tutta la corda AB, determinate da quella porzione di corda suonata, a cui si forma fulcro co'l dito lateral:te appoggiato.

Sia AB determinato alla sua metà dal fulcro $\frac{1}{2}$: saranno uguali le vibrazioni di $\frac{1}{2}A$, e di $\frac{1}{2}B$, perche le due parti della corda sono uguali; e però in $A\frac{1}{2}$ si avrà suono egual:te che in $\frac{1}{2}B$. Sia AB determinato a tre parti uguali dal fulcro $\frac{1}{3}$: saranno uguali le vibrazioni di $\frac{1}{3} : A$, di $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}A$, e di $B : \frac{2}{3}$, perche le tre parti sono uguali, e però in $\frac{1}{3}A$ si avrà suono.



Ma due cose necessariam:te succedono. Prima, che determinato dal dito il fulcro $\frac{1}{3}$, la fisica natura delle vibrazioni da se stessa determina il secondo fulcro in $\frac{2}{3}$ senza bisogno di appoggiarvi il dito. Seconda, che passando con l'arco sopra la porzione di corda $B\frac{1}{3}$ ch'è di due terzi, non suona altrimenti questa porzione, ma chiaram:te si sente il suono di $\frac{1}{3}A$ benchè non tocco dall'arco del suonatore; e ciò perche, 1 è misura uguale di 2, non 2 di 1. In somma se la porzione di cui si vuol suono, sia di unità come misura uguale del residuo, si ha sempre suono, e la fisica natura da se stessa forma i fulcri delle vibrazioni in tutte le parti uguali del residuo. Se

non è di unità, né si ha suono, né la fisica natura può formar i fulcri, perché le vibrazioni non arrivando uguali fin all'estremo della corda B, ivi s'interrompono, e ritornano disuguali verso l'estremo A, distruggendo i fulcri del progresso con i fulcri del regresso, e con ciò egualmente distruggendo qualunque suono. Ora qui si domanda a i dotti moderni, se del numero aritmetico si possa aver idea più precisa, e nello stesso tempo più positiva, e reale di questa? Non può aversi. Se puramente fisica, e affatto indipendente da umana designazione? Convien confessarlo. Che se si opponga tutto ciò dipendente dal primo fulcro postovi dal suonatore, quasi che posto dal di lui arbitrio, e designazione, si tocca con mano tutto il rovescio, perché se il suonatore vuol aver suono, è costretto a dipender totalmente dalla fisica natura, adottando necessariamente il fulcro al punto determinato dalla medesima, ed escludendo necessariamente qualunque punto che volesse determinare col suo arbitrio, e designazione. Adunque si conchiude che qui oltre la serie aritmetica nelle unità uguali de i residui s'impara necessariamente la serie aritmetica nella prima unità di ciascuna divisione di AB in $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ etc.

Proseguendo la musicale ricerca, si vuol omettere la nozione del numero che necessariamente risulta dalla misura del tempo (volgarmente battuta) relativa al moto, ed allo stato delle voci, e de' suoni in regolata simultanea armonia. Ma non deve poi omettersi la nozione di quel numero prosodico che nasce dagli accenti lunghi, e brevi delle sillabe, i quali nell'umano discorso dipendono dal puro arbitrio, e designazione de nomi imposti alle cose, nella musica dipendono da un principio necessario. Si verifica col fatto che se una sillaba voluta breve o dalle regole della Prosodia, o dal comune linguaggio, si sottoponga ad una nota musicale che sia principio, o mezzo di quella tal misura di tempo che si chiama ordinario, è fisicamente impossibile il pronunciarla breve: diventa necessariamente lunga, e tale necessariamente si pronuncia ad onta di qualunque prova in contrario che pur dipende dall'arbitrio, forza, e volontà umana. Questo fenomeno musicale quanto è per se strano, e di affatto ignota cagione, altrettanto è fisicamente vero, e comunemente noto, ed è fenomeno di quantità. È certo che di un'effetto positivo, e reale, positiva, e reale dev'esser la cagione. Adunque per mezzo di questo fenomeno musicale si scopre che nel quanto vi è del quanto una cagione (qualunque sia) positiva, e reale. Tanto basta per provar in genere contro i dotti moderni esservi ne' i principj del quanto una cosa positiva, e reale, per convincerli non esser tutto immaginario, e di designazione, e poterven' esser molte se ve n'è una. Altro è che siano: altro è che siano ignote. Lo saranno sempre a medesimi finché le suppongono immaginarie. Chiaro è che in tal supposto non le cercaranno mai, e per conseguenza non le trovaranno, né sapranno mai. Non così nell'armonica scienza, perché la sua facoltà si estende a scoprirle, a farle sapere, ed a poterle assegnare. Ma i dotti moderni qui prenderanno l'autore in parola chiedendogli la cagione fin'ora ignota di questo fenomeno particolare. No'l ricusa l'autore, ma vuole ch'essi prima lo apprendano qual è, perché superficialmente appare puerile; ma intrinsecamente è tal, e tanto, che vi si perde l'umana ragione, in di cui assoluto arbitrio d'intelletto, e di volontà essendo la pronuncia, fisicamente gli è tolto da questa ignota cagione. Vi s'interna l'uomo dotto, e troverà il fenomeno di un peso sterminato. Poi l'autore viene alla cagione, ma per assegnarla deve premettere le seguenti musicali nozioni: comunemente intesi come prodotti della loro rispettiva radice. Va ben:mo, ma un Pitagorico, ed un platonico dice che questa è nozione materiale di superficie: non è formale di centro, ossia d'intima essenza del numero, e delle ragioni, e lo dimostra apportando la nozione formale de i numeri quadrati non nella radice, ma nella ragione; cioè della tripla $1 : 3$: sommati i due termini $\frac{1}{4}$ quad: della dupla $3 : 6$: sommati i due termini $\frac{3}{9}$ quad: della super 2 parz $3za, 6 : 10$. sommati i due termini $\frac{6}{16}$ etc: Siegue poi a dimostrare che questa, e non altra è la vera scienza

delle ragioni, e proporzioni, perche realm:te in tutte le proporzioni geom:che discrete di prima origine, le quali siano costituite da i due mezzi determinati, arm:co, e aritm:co si verifica che della tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 6$: il numero quadrato 4 somma de'i termini della tripla $1 : 3 : \frac{1}{4}$, è il mezzo aritm:co della stessa ragione; della dupla geom:ca discreta $6 : 8 : 9 : 12$: il numero quadrato 9 somma de'i termini della dupla $3 : 6 : \frac{3}{9}$, è il mezzo aritm:co della stessa ragione; della super 2 parz: 3za geom:ca discreta $12 : 15 : 16 : 20$: il numero quadrato 16 somma de'i termini della super 2 parz: 3za $6 : 10 : \frac{6}{16}$ è il mezzo aritm:co della stessa ragione etc: etc:. E se dal dotto moderno si opponesse, ch'ecceutata la tripla $1 : 3$: le altre ragioni, cioè la dupla $3 : 6$; la super 2 parz: 3za $6 : 10$ etc: sono fuori della loro prima forma, che della dupla è $1 : 2$; della super 2 parz: 3za è $3 : 5$ etc: , risponderà il Pitagorico, ed il Platonico che gli estremi delle suddette proporzioni geom:che discrete sono in serie indefinita

$2 : 3 : 4 : 6 : 8 : 9 : 12 : 15 : 16 : 20 : 24 : 25 : 30 : 35 : 36 : 42$ etc: , e però sono $2 : 6 : 12 : 20 : 30 : 42$, i quali divisi per 2 formano precisam:te la serie $1 : 3 : 6 : 10 : 15 : 21$, e questa per somma de'i termini forma precisam:te la serie de'i numeri quadrati $1 : 3 : 6 : 10 : 15 : 21$. Risponderà di più, che la serie $1 : 3 : 6 : 10 : 15$ etc: è la inversa dell'arm:ca proporzione, e serie espressa nei numeri $60 : 30 : 20 : 15 : 12 : 6$ e ricorderà al dotto moderno che dalle differenze si desume

differenza	$30 : 10 : 5 : 3 : 2$
inversamente uguali	$1 : 3 : 6 : 10 : 15$

la definizione delle proporzioni. Comeche al Pitagorico, e Platonico è dimostrativam:te noto che il dotto moderno a ciò nulla può rispondere, ed unicam:te ha luogo ad istanze ulteriori per intender nel suo tutto questa vera scienza delle ragioni, e proporzioni; così non essendo questo né il luogo, né il tempo di produrla, passa l'autore dopo questa necessaria premessa ad assegnar la cagione del suddetto fenomeno musicale.

Ciò che nella musica si chiama basso fondamentale, ossia prima base dell'armonia, consiste nelle due ragioni: dupla (musicalm:te ottava): sesquialtera (musicalm: quinta). Assegnando in numero le forme, sono della dupla $1 : 2$, della sesquialtera $2 : 3$, della tripla ch'è la loro somma, $1 : 2 : 3$; quadrati i tre termini, saranno $1 : 4 : 9$, e si noti per il bisogno. Ciò che nella musica si chiama misura, o sia battuta, consiste originalm:te nelle due misure determinate dal numero 2, e dal numero 3. Dal numero 2 si ha la misura uguale, o sia di numero pari, da cui si ha in origine il tempo di dupla chiamato alla breve, ch'è di due tempi uguali, e per deduzione si ha il tempo ordinario ch'è di quattro tempi uguali. Dal numero 3 si ha la misura ineguale, o sia di numero impari, da cui si ha in origine il tempo di tripla (corrottam:te chiamato tripola) ch'è misura di tre tempi uguali, da cui si deducono altre diverse specie di tripla etc:. Come fuori della dupla, e sesquialtera è impossibile il darsi basso fondamentale di prima base in qualunque diversa ragione; così fuori de'i due numeri 2, 3, è impossibile il darsi altra misura di tempo che sia ragionevole. Si è fatta bensì la prova di ridurla a cinque tempi uguali, componendoli delle due misure 2, 3, che fanno cinque, ma inutilmente, perche succede in pratica quella tal ripugnanza di natura, che ributta e i professori che la eseguiscano, e il popolo che l'ascolta. Comeche il numero 2 determina la forma dupla in $1 : 2$; il numero 3 determina la forma sesquialtera in $2 : 3$; e le due forme dupla, e sesquialtera determinano la tripla $1 : 2 : 3$; così fin qui si rileva co'l fatto che nella tripla come composta dalle due semplici ragioni, dupla, e sesquialtera, consiste ugualm:te la origine dell'armonia ch'è il basso fondamentale, e la origine della misura del tempo ch'è la battuta. È dimostrativam:te certo che dati i tre termini $1 : 2 : 3$, il primo termine 1 non costituisce per se relazione: il secondo termine 2 costituisce la prima ragione: il terzo termine 3 costituisce la prima

proporzione, e però 2, e 3 sono termini determinanti due cose diverse, delle quali sono principj primi. Sono dunque nel genere dimostrativo ciò che nel genere fisico sono i fulcri delle vibrazioni, perche dato in AB il fulcro $A\frac{1}{2}$, è determinante la dupla: dato il fulcro $A\frac{1}{3}$, è determinante la sesquialtera etc: È fisicam:te certo che le relative vibrazioni si compiono, e congiungono fisicam:te tra loro nel punto del fulcro, in cui ha fine l'una, e principio l'altra; e però è punto fisico di principio, e fine, che in sostanza vuol dire di determinazione, e riposo, cosicche riportandolo all'analogia degli accenti, necessariam:te dev'esser di accento lungo. Né puo negarsi, perche fisicam:te è vero che sopra ciascun fulcro sovrappostavi la piccola carta, ivi sta ferma né si muove al moto della vibrazione rispettiva; ed i fulcri mobili di $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ etc: essendo necessariam:te relativi a i fulcri stabili della corda in A, e in B, non mai agli archi delle vibrazioni tra un fulcro, e l'altro, è fisicam:te certo che risolvendosi finalm:te ne' i fulcri stabili AB, si risolvono in determinazione, e riposo. Ma così precisam:te succede nel genere dimostrativo rispetto all'accento lungo che necessariam:te si trova nella misura di 2, e di 3, perche quadrato il numero $2 \times 2 = 4$, si trova l'accento lungo nel primo punto di ciascun termine, cioè $\ddot{2} : \ddot{2} : \ddot{4}$; egualm:e quadrato il numero $3 \times 3 = 9$, si trova l'accento lungo nel primo punto di ciascun termine, cioè $\ddot{3} : \ddot{3} : \ddot{9}$; e però realm:te, e positivam:te ciascun' accento lungo del tempo di 2, 3, corrisponde a ciascun fulcro dello spazio di $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$. Adunque rispetto alla musica realm:te, e positivam:te si trova nella tripla un principio comune a' i due generi fisico, e dimostrativo, che determina l'armonia nel basso fondamentale, la misura del tempo nella battuta, l'accento lungo in ciascuna prima nota musicale determinata dalle due misure di tempo 2, e 3. L'uomo dotto, e sincero ha qui un'ottima occasione di liberarsi dal pregiudicio comune, se lo ha, purché profundam:te s'interni sù questo punto ch'è di ben poca apparenza, ma d'infinita sostanza. È vero che necessariam:te vi si richiede cognizione di musica, ma questa è appunto la massima prova della verità del testo di Platone. Se poi l'arm:ca scienza è astrusa, e difficile su qualche punto molto più di quello si vorrebbe, la colpa non è di Platone, e molto meno dell'autore. Il debito di chi vuol sapere si è di studiarla, e di ringraziar la Provvidenza che vi sia, e che presentem:te si torni a scoprire dopo tanti secoli, ne' quali è stata nascosta.

Intanto dopo il giro di molte nozioni, e proposizioni assolutam:te necessarie al bisogno si è qui finalm:te ritornato a quella ragion tripla, in cui dall'arm:ca scienza si è trovata, ed assegnata la ragione del diametro al cerchio di 7 : 22: nella somma 11 de' i termini della tripla arm:ca 6 : 3 : 2 per la circonferenza: nel mezzo aritmetico 3 : $\frac{1}{2}$ per il diametro, dedotto dal mezzo arm:co 3, dal mezzo aritm:co 4 della stessa tripla geom:ca discreta 2 : 3 : 4 : 6, da cui si è dedotta la circonferenza in 6 : 3 : 2: tripla in arm:ca proporzione. Duplicando 3 : $\frac{1}{2}$ in 7, 11 in 22, si è trovata, ed assegnata per scienza formale quella ragione tra il diametro, e il cerchio, che da Archimede il primo con la misura materiale de' poligoni iscritti, e circoscritti fù assegnata, e dimostrata. Qui dunque si ha debito di consumar in forza di questa scienza il di più che si trova in 22 di Archimede, ch'è di quantità incognita, e irrazionale; il che nel supposto di questa scienza che assegna in 11 della circonferenza una quantità nota, e razionale, si converte nella quantità incognita, ed irrazionale del diametro nello stesso modo, e senso, in cui trasportando una ragione dall'aritm:ca all'arm:ca natura, i termini s'invertono tra loro: cosa comunem:te nota nella scienza delle ragioni, e proporzioni, e però di consenso comune.

Pure per evitar qualunque intoppo sù questo punto tra l'arm:ca scienza, e le comuni scienze dimostrative, nelle ipotesi delle quali si troverà di poter dimostrare necessariam:te irrazionale [p. 28] la circonferenza, razionale il diametro, si previene in tesi l'intoppo con un fatto, a cui non vi è risposta, e che ad onta di quanto si può dimostrare dalle note scienze attuali obbliga, i loro

Professori a dubitar di qualche loro ipotesi, e a pensar seriam:te sù questa tesi. Per rilevar il fatto qual è, l'arm:ca scienza aggiunge una sola nozione come necessaria; ed è del mezzo contrarm:co aggiunto a'i due mezzi, armonico, aritmetico, di ciascuna proporzione geom:ca discreta. Questa è nozione comune della scienza delle proporzioni; sapendosi da chiunque la professa che vi è questo mezzo, e che si chiama contrarm:co, perche la sua definizione importa le stesse differenze del mezzo armonico, ma inverse; cioè dati gli estremi 2 : 6, sarà mezzo arm:co 3, perche tra 2 : 3: differenza 1: tra 3 : 6: differenza 3. Ma 1 : 3 = 2 : 6. Adunque etc.:

Le stesse differenze si hanno dal mezzo contrarm:co; ma dove nell'arm:ca proporzione si ha differenza 1, nella contrarm:ca si ha 3: dove nell'arm:ca si ha 3, nella contrarm:ca si ha 1. Indi $2:3:6$ tripla armonica: $2:5:6$ tripla contrarm:ca. Ciò si è premesso differenze 1: 3 differenze 3: 1 più per comodo di lettura, che per bisogno d'istruzione, noto essendo il mezzo contrarm:co, e per conseguenza la sua proporzione; ma non è così della natura di questo mezzo, di cui niun uso si fa nelle comuni scienze dimostrative. Sommo, e necessario è l'uso che ne fa l'arm:ca scienza, e tra poco si rileverà a prova la sua reale importanza. Perciò non è da stupire se le scienze comuni che ne sono prive, non arrivano a superar quelle difficoltà, che arrestano il loro progresso. Mancando totalm:te alle medesime la nozione della natura di questo mezzo, necessariam:te deve mancarne l'uso; mancando l'uso, necessariam:te devono incontrarsi difficoltà insuperabili. Qui si toccherà con mano la intima nozione che aveva Platone di questa natura descritta da esso, e definita con l'ultimo della precisione, e qui si rileverà la sua necessità, e importanza. Siano dunque esposte in serie le cinque proporzioni geom:che discrete formanti l'armonico sistema determinato al sestuplo confine da i numeri aritm:ci delle forme $1:2:3:4:5:6$, le quali determinano i cinque intervalli consonanti del sistema, come già si è qui spiegato. Acciò poi le proporzioni siano costituite con i tre mezzi, armonico, aritmetico, e contrarmonico, si assegna qui il modo di costruirle. Le loro forme sono

- 1 : 2 : 3 : della tripla
- 2 : 3 : 4 : della dupla
- 3 : 4 : 5 : della super 2 parz: 3za
- 4 : 5 : 6 : della sesquialtera
- 5 : 6 : 7 : della super 2 parz: 5ta

La formola di queste forme si è la multiplica tra loro de'i tre termini nel modo seguente $\frac{1 \times 2}{2 \times 3} \times \frac{2 \times 3}{3 \times 4} \times \frac{3 \times 4}{4 \times 5} \times \frac{4 \times 5}{5 \times 6}$, cioè $1 \times 2 = 2; 1 \times 3 = 3; 2 \times 2 = 4; 2 \times 3 = 6$; ed il mezzo contrarm:co si ha $\frac{2}{3}$. Se la forma è per differenza 1, come le qui assegnate, la formola è identifica. Se la forma è per differenza 2, come $1 : 3 : 5$, si duplichi il terzo termine della forma; se per differenza 3, come $1 : 4 : 7$, si triplichi il terzo termine della forma etc.:

Saranno adunque le cinque proporzioni geom:che discrete; e se si chiegga la cagione di dover ridurre le prime semplici ragioni $1 : 2, 2 : 3, 3 : 4$ etc: a tal sorta di proporzioni, si risponde che in questa unica specie di proporzioni si trova il genere, ed il legame universale delle ragioni costituite da i numeri pari, e da impari, cioè $1 : 3 : 5$ etc: , e $2 : 4 : 6$ etc.: e ciò rispetto al materiale della scienza. Rispetto al formale della med:ma, in questa unica specie di proporzioni trovandosi i tre mezzi specificati alla loro natura, il che non puo aversi nelle prime semplici ragioni, e nella cagione della natura de'i mezzi consistendo la essenza formale della scienza, è chiara la necessità

	mezzi			
	arm ^{ci}	aritm ^{ci}	contrarm ^{ci}	
2 :	3 :	4 :	5 :	6 = tripla
6 :	8 :	9 :	10 :	12 = dupla
12 :	15 :	16 :	17 :	20 = super 2 parz 3
20 :	24 :	25 :	26 :	30 = sesquialtera
30 :	35 :	36 :	37 :	42 = super 2 parz 5

di dover ridurre le semplici ragioni a tal sorte di proporzioni. Perciò qui unicam:te risiede il fon-
 damento dell'armonica scienza, ma alla sua total spiegazione richiedendosi un trattato intiero, [p. 29]
 qui basti osservare che gli estremi di queste cinque proporzioni sono i due termini 2; 42: in
 numeri primi 1 : 21; e che la somma de i sei termini delle prime semplici forme 1 : 2 : 3 : 4 : 5
 : 6 : è 21; e però 1 primo termine alla somma 21 = 2 : 42.

Ora si venga al fatto. Primieram:te sommando i termini delle due colonne degli estremi
 delle suddette proporzioni, la somma de i minori è 70: de i maggiori 110. Se dunque tra 11 : 7:
 si ha la ragione del cerchio circoscritto al quadrato inscritto, ch'è la dimostrata da Archimede,
 questa è una prova di fatto della verità dell'arm:ca scienza come avente per proprio soggetto il
 cerchio, la di cui arm:ca natura dimostrandosi in forza di queste med:me proporzioni, è chiaro che
 in queste consiste l'essenzial fondamento dell'arm:ca scienza. Pure una tal prova non si apporta
 qui come principale: sì perche non spiega la intrinseca natura de i due termini 7 : 11: sì perche
 questa è la ragione più imperfetta di tutte tra quadrato, e cerchio. Si assuma dunque la ragione
 di Mezio ch'è del diametro = 113 alla circonferenza = 355. Questa in poche cifre è la meno
 imperfetta di tutte, perche comparata alla più perfetta di tutte ch'è quella di Ludolfo a Ceulen,
 si trova la minima differenza di due parti in circa 10 million:me del diametro: differenza che puo
 trascurarsi, perche il cubo di 113 non arriva a pareggiarla. Sarà dunque il cerchio inscritto =
 355: il quadrato inscritto = 452. Ora cambiando ordine delle colonne delle proporzioni, si faccia
 colonna di ciascuna proporzione separata, lasciando fuori il mezzo contrarm:co di ciascuna, e
 sommando i termini di ciascuna colonna:

2	6	12	20	30
3	8	15	24	35
4	9	16	25	36
6	12	20	30	42
15 :	35 :	63 :	99 :	143

Indi si sommino tutte le somme

15	.
35	
63	Somme di 3 =
99	15
143	35
355	63
	113

Si formi una colonna separata de' i soli mezzi contrarm:ci, e si sommino i termini. Sarà

2
5
10
17
26
37
97

sommi 97 con la somma 355: sarà $\frac{355}{97}$. Ecco dunque in fatto il cerchio inscritto 355: il quadrato
 circoscritto 452.

Qui è chiaro che nulla vi è da opporre se non che l'aggiunzione del termine 2 primo della
 colonna de' i mezzi contrarmonici, il quale si trova bensì come primo estremo delle assegnate
 proporzioni, ma non come mezzo contrarm:co di qualche ragione, come sono tutti gli altri della
 colonna. Alla soluzione di questa opposizione che appare un fatto, vi si attenda con tutta la
 serietà, e l'impegno. Il fatto vero, e non apparente si è che ciascun mezzo aritm:co di queste pro-
 porzioni è un numero quadrato, e che ciascun mezzo contrarm:co è più 1 del numero quadrato.
 Ma 1 è numero quadrato. Adunque 2 ch'è più 1, è numero contrarmonico. Adunque necessa-
 riam:te primo, e necessariam:te assegnabile. Ma innanzi. Le differenze di questi mezzi sono le
 stesse per i numeri impari 1 : 3 : 5 : 7 etc.: È fatto che le differenze retrograde della serie de' i
 mezzi contrarmo:ci si risolvono necessariam:te nel termine 2, perche

37: 26: 17: 10: 5: 2,
differenze 11: 9: 7: 5: 3

né si può proseguire al termine 1, perch'è numero quadrato, e però resta in 2, ch'è più 1.

È fatto che le differenze retrograde della serie de' i mezzi aritmetici si risolvono necessa-
 riam:te nel termine 1, perche

36: 25: 16: 9: 4: 1.
differenze 11: 9: 7: 5: 3

retrograde della serie de' mezzi armonici si risolvono necessariamente nel zero, o sia meno 1, perche
 35: 24: 15: 8: 3: 0. Né può negarsi questa operazione per le differenze: si perche
 differenze 11: 9: 7: 5: 3
 in se stesse sono i minimi componenti: sì perche sono misura comune delle tre serie de' mezzi:
 sì perche la somma delle cinque differenze è 35 mezzo armonico della ultima proporzione, in cui
 ha confine il sistema delle cinque proporzioni. E poi è proprietà de' numeri impari il formare
 con la loro somma i mezzi armonici. Data la impari serie 3 : 5 : 7 : 9 etc. , è fatto che la
 somma di 3 : 5, ch'è 8, forma il mezzo arm:co della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 12; la
 somma di 3, 5, 7, ch'è 15, forma il mezzo arm:co della super 2 parz: 3za geom:ca discreta 12 : [p. 30]
 15 : 16 : 20; la somma di 3, 5, 7, 9, ch'è 24, forma il mezzo arm:co della sesquialtera geom:ca
 discreta 20 : 24 : 25 : 30 etc.. Ora si domanda: il primo numero impari 3 mezzo arm:co della
 tripla geom:ca discreta 2 : 3 : 4 : 6 da quale somma di numeri impari è formato? Non mai da 1,
 3, perche la somma è 4, ch'è mezzo aritm:co della stessa proporzione. Adunque necessariamente
 da 0, 3, la cui somma è 3. Così essendo di fatto, ecco le immediate necessarie conseguenze.
 La unità armonica di assoluto principio primo non può non esser positiva, e reale, perche se le
 posteriori armoniche ragioni sono producenti (dimostrato dal terzo suono) sono attive; se attive,
 sono positive, e reali; se positive, e reali, lo sono eminentemente nel loro assoluto principio primo.
 Ma questo si trova di fatto nel meno 1 dell'aritm:ca unità. Vi è dunque un assoluto principio
 primo, o positivo, e reale, necessariamente anteriore all'aritm:ca unità. Ma questo principio è
 puramente di termine astratto, perche il primo termine concreto adattabile al fisico genere de' i
 corpi è l'aritm:ca unità. Adunque l'arm:co termine astratto, anteriore all'aritm:ca unità, è neces-
 sariamente di genere metafisico, unicamente adattabile alle ragioni astratte da' corpi, ed unicam:te
 concepibile dall'intelletto. Ma queste ragioni astratte da' corpi essendo intrinsecamente congiunte
 tra loro, e co'l loro principio in perfetta unità formano necessariamente un genere affatto di-
 stinto da qualunque altro genere fin'ora reso noto dalle scienze comuni, e questo loro principio è
 metafisico, ed è positivo, e reale. Adunque nelle ragioni astratte da' corpi, e congiunte tra loro,
 e co'l principio primo vi è un genere metafisico, ch'è positivo, e reale, ed è puramente intelligibile.

Qui finalmente si è incominciato a scoprire la realtà, e profondità dell'arm:ca scienza, e la
 incontrastabile verità de' i testi relativi di Platone. A questo punto di vista si richiamano tutte
 le moderne, e antiche scienze da questa diverse; acciò pongano a paragone la loro facoltà con
 la facoltà della presente, e veggano co'l fatto di quanto mai rimangano addietro su'l punto di
 tutti l'importante, qual è la metafisica realtà del genere intelligibile, e il soggetto preciso, in
 cui risiede. Vi è forse scienza tra le comunemente note, che per propria facoltà sia mai arrivata a
 dimostrarlo? Non vi è, né vi sarà mai fuorché questa unica, e sola, senza di cui tutte affatto le
 altre scienze sono rimaste, e rimangono attualmente nel buio della opinione, e del discorso, senza
 esser mai arrivate, né poter arrivare alla intelligenza di questo punto che non solamente decide
 di tutto il scibile per l'intelletto, ma come divinamente osserva, ed afferma Platone, determina
 nella volontà la morale virtù per tutta la vita in chi possiede questa scienza. Ci vuol poco a
 rilevare che stabilita dimostrativamente la realtà della intelligibile natura separata, e distinta
 dalla natura sensibile: quella attiva, questa passiva: quella anteriore, questa posteriore: quella
 della natura dello stesso ch'è l'arm:ca unità delle ragioni, questa della natura del diverso ch'è
 l'aritm:ca unità de' corpi, è necessariamente portata la mente umana nell'ultimo grado retrogrado
 della intelligibile natura all'ente supremo come assolutamente per se uno, e come sopra essenza
 qual lo chiama Platone. Stabilita in questo uno la ragion eterna, ci vuol anche meno a rileva-
 re la necessaria dipendenza del genere intelligibile da questo uno, e la legge di ragione, di cui
 dev'esser necessariamente impressa la intelligibile natura a norma della ragion eterna. Qui non

si vogliono avanzar le conseguenze fino a quell'alto grado, a cui linearmente ascendono: queste bastano all'intento per con vincer chiunque della essenzial realtà, e suprema facoltà di questa scienza, e della sua identità con la scienza di Platone, da lui occultata, e qui spiegata, e svelata con i di lui testi. Fino qui i dotti moderni possono bensì avanzar molte istanze per maggior spiegazione delle cose; ma non possono avanzar opposizione benché minima alle cose, perché sono tutte di fatto. Si replica: vi attendano, e riflettano con tutta la serietà, e l'impegno per ravvedersi una volta del fatal inganno in cui sono, chiamando, e stimando scienze sublimi quelle che in modo niuno possono condurli a quel vero che risiede in tutt'altri principj, che i da loro pretesi, e ricevuti. Qui si conferma: le loro scienze pretese sublimi sono serve, e ministre dell'arm:ca scienza; e per farglielo confessare con quella forza, a cui non vi è resistenza, si torni alla ragione del quadrato circoscritto = 452 al cerchio inscritto = 355: da Mezio dimostrata con la Geometria: dall'arm:ca scienza dimostrata con quelle ragioni, e proporzioni che sono leggi universali del genere dimostrativo, e fondamento di questa scienza. Qui si vedrà la verità di fatto a lume di meriggio. [p. 31]

Torni a memoria che questa scienza assegna al cerchio quantità razionale, al diametro irrazionale; e ciò perché il cerchio essendo essenzialmente costruito dalle arm:che determinate ragioni, la indeterminazione non può trovarsi nel cerchio, ma deve trovarsi nel diametro. Torni egualmente a memoria ciò che nel principio di questa dissertazione si è detto della natura della sostanza col testo di Platone, cioè che questa s'intende in modo adulterino composto di scienza, e di opinione. Ivi in seguito si è spiegato che la sostanza estesa, e attualmente determinata è capace di scienza, ed ha il suo numero concreto, e reale che rettam:te può chiamarsi numero fisico, e realmente forma scienza di quantità. Che la sostanza estensibile, e potenzialmente indeterminata non è capace che di scienza mista di opinione; e ciò perché ha bensì il proprio numero egualmente concreto, e reale, come numero che non può esser tale se non è quanto, ma non è poi, né può esser numero di cosa quanta: bensì della cosa, ch'è in potenza al quanto. Di questa forma scienza di cosa che realmente esiste: di quella non può formar che opinione, perché non ancora esiste. Riassumendo l'esempio di Platone ivi apportato nell'unguento privo di qualunque odore, ma capace di tutti gli odori, il numero della cosa ch'è in potenza al quanto, è il numero dell'unguento: il numero della cosa attualmente quanta è il numero degli odori. Il primo forma bensì scienza della cosa che realmente esiste, com'è l'unguento privo di qualunque odore, ma non può formar che opinione dell'unguento odorato, perché a ciò necessariamente si richiede un secondo numero di altra natura, che determinatamente segni quell'odore che si è dato all'unguento. È stato necessario il ripetere la spiegazione, e rinovar l'esempio per condurre a poco a poco l'intelletto con la nozione della natura della sostanza alla nozione della contrarmonica natura ch'è identificamente la stessa, e di cui non si sa che il solo nome. Qui s'incominci a formarne la idea finché si pervenga al fatto che fisicamente assegnando, e spiegando la cosa, formi allora la vera, e completa idea relativa. Per ora si supponga il mezzo contrarmonico segno necessario della natura della sostanza nello stesso senso, in cui effettivamente si è fin qui dimostrato, e spiegato il mezzo armonico segno necessario della natura dello stesso. In tal supposto è chiaro che nel mezzo contrarmonico deve trovarsi quella stessa indeterminazione che si trova a priori nella sostanza innanzi che sia determinata. Egualmente è chiaro che questa indeterminazione cadendo precisamente sulla estensione: proprietà della sostanza di grado principale, se il mezzo contrarmonico è segno necessario della sostanza, dev'esser necessariamente segno di quella natura di estensione, a cui è in potenza la sostanza. Ma questa potenza della sostanza alla estensione non può esser che di retta linea, perché la potenza essendo per se indefinita, se fosse potenza di linea circolare, sarebbe potenza finita, essendo (come si è spiegato altrove) la linea circolare necessariamente finita, perché torna in se stessa, e la retta necessariamente infinita, se non trova determinazione. Adunque come il [p. 32]

mezzo arm:co è segno necessario della linea circolare ch'è della natura dello stesso; così il mezzo contrarm:co dev'esser segno necessario della linea retta ch'è della natura della sostanza. E qui si capisce ad evidenza quanto si è accennato altrove, cioè che la retta linea, segno per se dell'infinito, è determinata dal cerchio nel suo diametro; e si capisce come nel diametro, e non nel cerchio, resti il segno necessario di quella indeterminazione che ha intrinseca in se stesso, e nel suo principio primo, come semplice retta linea separata dal cerchio. Queste metafisiche ragioni a priori dovendosi a suo luogo trovar comprovate fisicam:te a posteriori da quel tal fatto, a cui non vi sarà mai risposta, si assumano pur francam:te con preventiva sicurezza, acciò quella verità di fatto che risulta dal diametro = 113 al cerchio = 355 si vegga nel vero lume dell'arm:ca scienza Replicando qui per comodo le figure in colonna, sono:

	tripla	dupla	super 2 parz. 3	sesquialt.	super 2 parz. 5	
	2	6	12	20	30	
	3	8	15	24	35	
	4	9	16	25	36	
	6	12	20	30	42	
	15	35	63	99	143	
Somma dei mezzi contrarm:ci separati			2 5 10 17 26 37 97			Somma delle somme
						143 99 63 35 15 cerchio inscritto 355
			sommata a	355		
			quadrato circons:	97		
				452		

Qui è fatto che il diametro (da cui il quadrato) nasce dalla somma de i mezzi contrarmonici, aggiunta alla somma 355, la quale si ha dalla somma de' termini delle cinque assegnate proporzioni geom:che discrete, determinate da i due mezzi rispettivi, arm:co, aritm:co, escluso da ciascuna il mezzo contrarm:co rispettivo, e dedotte dalla sestupla serie delle forme, da cui è costruito, e determinato il sistema universale della consonante armonia. Sicche rispetto al diametro il fatto è talm:te chiaro, e reale, che sarebbe temerità, e pazzia non l'opporci, ma il creder solam:te possibile la opposizione. Non così rispetto alla circonferenza, perche nella somma de' termini delle cinque proporzioni entrandovi il mezzo aritmetico egualm:te che l'armonico, non si vede certam:te come il cerchio possa dirsi armonico di propria intrinseca natura, e costruzione, se alla sua misura egualm:te concorrono i due mezzi, armonico, e aritmetico. La opposizione è patentissima, ed è opposizione di fatto. Ma qui appunto, dove in apparenza non vi è risposta, l'autore invita, e provoca tutt'i Dotti moderni all'esame della cosa in sostanza, acciò si chiariscano una volta di quanto mai ad essi manca della vera scienza delle ragioni, e proporzioni ch'è precisam:te l'armonica scienza; e volenti, nolenti, siano costretti a dover confessare la somma disparità che vi è tra le scienze dimostrative comunem:te note (da essi pretese sublimi), e l'armonica scienza a loro ignota. Si venga alla prova; e primieram:te si marchi ciascuna delle cinque somme.

- La prima è 15: è il mezzo arm:co della super 2 parz: 3 geom:ca disc: 12 : 15 : 16 : 20.
- La seconda è 35: è il mezzo arm:co della super 2 parz: 5 geom:ca disc: 30 : 35 : 36 : 42.
- La terza è 63: è il mezzo arm:co della super 2 parz: 7 geom:ca disc: 56 : 63 : 64 : 72.
- La quarta è 99: è il mezzo arm:co della super 2 parz: 9 geom:ca disc: 90 : 99 : 100 : 110.
- La quinta è 143: è il mezzo arm:co della super 2 parz: 11 geom:ca disc: 132 : 143 : 144 : 156.

Adunque la somma delle cinque somme che costituisce il cerchio = 355, è somma di mezzi tutti armonici, e questo sia il primo spettacolo. Poi si perche in ciascuna somma vi entra

il mezzo aritmetico, e con ciò torna in pristino la prima difficoltà; sì perche ciascuna somma [p. 33] risultata è bensì un mezzo armonico ma di tutt'altre proporzioni geom:che discrete, che delle cinque assegnate per fondamento principale della principal dimostrazione, si cerchi quali siano le proporzioni geom:che discrete dimostrate da i mezzi armonici risultati dalle somme.

Gli estremi di ciascuna proporzione sono:

					numeri primi	
prima	12 :	20	-	Adunque	=	3 : 5
seconda	30 :	42	-	Adunque	=	5 : 7
terza	56 :	72	-	Adunque	=	7 : 9
quarta	90 :	110	-	Adunque	=	9 : 11
quinta	132 :	156	-	Adunque	=	11 : 13

Sono dunque le ragioni formate per serie da' i numeri impari 3 : 5 : 7 etc.:. Ma qui poco innanzi si è dimostrato che questa serie forma per somma i precisi mezzi arm:ci, cioè 0 : 3; somma 3 mezzo arm:co della tripla: 3 : 5, somma 8 mezzo arm:co della dupla: 3 : 5 : 7; somma 15 mezzo arm:co della super 2 parz: 3 etc.:. Adunque le ragioni dimostrate da' i mezzi armonici risultati dalle somme dimostrano i mezzi arm:ci precisi delle cinque proporzioni assegnate per fondamento principale della principal dimostrazione, e questo sia il secondo spettacolo. Ma vi è molto di più nella seguente proposizione.

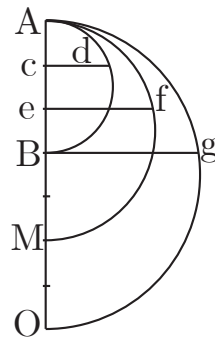
- 3 : 5: sono le radici della forma 1 : 2 : 3: della tripla geom:ca discreta 2 : 3 : 4 : 6.
- 5 : 7: sono le radici della forma 2 : 3 : 4: della dupla geom:ca disc: 6 : 8 : 9 : 12.
- 7 : 9: sono le radici della forma 3 : 4 : 5: della super 2 parz: 3 geom:ca disc: 12 : 15 : 16 : 20.
- 9 : 11: sono le radici della forma 4 : 5 : 6: della sesquialtera geom:ca disc: 20 : 24 : 25 : 30.
- 11 : 13: sono le radici della forma 5 : 6 : 7: della super 2 parz: 5 geom:ca disc: 30 : 35 : 36 : 42.

Si dimostra. Si ha la tripla dalla somma delle due ragioni $\frac{1 : 2}{2 : 3}$ ^{dupla} ^{sesquial.}, e dalla somma de i termini $\frac{1 : 2}{3 : 5}$ si ha 3 : 5.

Si ha la dupla dalla somma delle due ragioni $\frac{2 : 3}{3 : 4}$ ^{sesquial.} ^{sesqui3za}, e dalla somma de i termini $\frac{2 : 3}{5 : 7}$ si ha 5 : 7.

Si ha la super 2 parz: 3 dalla somma delle due ragioni $\frac{3 : 4}{4 : 5}$ ^{sesqui3za} ^{sesqui4ta}, e dalla somma de i termini $\frac{3 : 4}{7 : 9}$ si ha 7 : 9 etc:.

La tripla, somma delle due ragioni 1 : 2, 2 : 3, sia espressa per le sue forme nel diametro di un cerchio. Sia prima la dupla in Ac = 1, in cB = 2. Sarà 3 il diametro AB, e il seno c,d, sarà mezzo prop:le della ragione 1 : 2. Il diametro AB si prolunghi di due parti uguali in AM, formando il nuovo semicerchio AfM. Sarà 5 il diametro AM, e diviso 5 nella forma 2 : 3, si deduca il seno e,f. Sarà Ae = 2; eM = 3, e il seno e,f, sarà mezzo prop:le della ragione 2 : 3. Saranno dunque c,d : e,f radici geom:che della tripla, perche $1 \times 2 = 2 : 2 \times 3 = 6$. Ma 3, 5, sono i diametri AB, AM, come somme aritmetiche de' i termini delle ragioni, nelle quali si sono divisi i due diametri. Adunque in 3, 5, vi sono realm:te le dimostrative radici della tripla, le quali formano, e includono in se stesse nel loro centro, e punto di ragione, ch'è c,e, le geom:che radici della tripla; essendo dimostrativam:te impossibile che non siano anteriori le due ragioni di 1 : 2, e di 2 : 3, e per conseguenza il diametro = 3, e il diametro = 5, di c,d, $\sqrt{2}$, e di e,f, $\sqrt{6}$. Ma date le due forme semplici 1 : 2, e 2 : 3, necessariam:te risulta la forma



composta $1 : 2 : 3$, da cui si ha la formola $\frac{1 \times 2}{2 : 3 : 4 : 6}$, tripla geom:ca discreta. Si è dunque

dimostrato etc.: Proseguendo alla dupla somma delle due ragioni $2 : 3; 3 : 4$, la forma $2 : 3$: si trova già espressa nel diametro AM 5, diviso in Ae = 2: in eM3. Per la forma $3 : 4$: il diametro AM si prolunghi di due parti uguali in AO, formando il nuovo semicerchio AgO. Sarà 7 il diametro AO, e diviso 7 nella forma $3 : 4$, si deduca il seno Bg. Sarà AB = 3 : BO = 4, e il seno Bg sarà mezzo prop:le della ragione $3 : 4$. Saranno dunque ef : Bg radici geom:che della dupla, perche $2 \times 3 = 6 : 3 \times 4 = 12$. Ma 5, 7, sono i diametri AM, AO, come somme aritmetiche de'i termini delle ragioni, nelle quali si sono divisi i due diametri. Adunque in 5, [p. 34] 7, vi sono realm:te le dimostrative radici della dupla, le quali formano, e includono in se stesse nel loro centro, e punto di ragione che si trova in e,B, le geom:che radici della dupla. Ma date le due forme semplici $2 : 3, 3 : 4$, necessariam:te risulta la forma composta $2 : 3 : 4$, da cui

si ha la formola $\frac{2 \times 3}{6 : 8 : 9 : 12}$, dupla geom:ca discreta. Si è dunque dimostrato etc: etc.: Sia

questo il terzo spettacolo, in cui chiunque dotto, purché profondo, e sincero, può incominciare a vedere il vero principio del legame dell'universo nel legame delle ragioni, e proporzioni in sempre nuovo cerchio, unica figura dell'universo secondo la mente, e il testo di Platone. Questo fatto, e confronto sul diametro, e il cerchio fa toccar con mano che dove finiscono le altre scienze dimostrative, incomincia l'armonica scienza, perche qual è mai delle note scienze comuni, che abbia la facoltà di analizzare una geom:ca dimostrazione fin' al principio astratto delle ragioni, e proporzioni, e al principio concreto della sostanza estesa? Non si ha nemmeno la idea di questa facoltà, non ché la facoltà stessa; e però ad onta di qualunque ripugnanza, e per forza di ragione, di fatto, e di confronto convien conchiudere che tra l'armonica scienza, e tutte le comunem:te note scienze vi è diversità specifica, e sostanziale. Convien' egualm:te conchiudere, ch'esposte, e condotte le cose di questa scienza fin' al segno presente, sia impossibile di trovar più luogo a opposizioni, ed unicam:te resti luogo a sole istanze per ben capirla. In questa ultima prova vi sono tali, e tante precisioni di fatto, che con tutta ragione l'autore le ha chiamate spettacoli: lo sono, e lo sono di mondo nuovo al mondo moderno del scibile. Chiunque professa scienze dimostrative, si degni pure di occuparsi nella intelligenza, e comprensione delle cose qui esposte. A misura del grado maggiore della intelligenza, e comprensione si avvedrà da se stesso della impossibilità, e dell'assurdo di opporsi a quelle verità, che anzi per il contrario co'l loro lume sgombrano l'intelletto dalle prevenzioni, e da'i falsi supposti.

Dando dunque luogo alle istanze, si chiederà nella prima istanza dove, e come nel termine del cerchio 355 si trovi la somma 11 de'i termini $2 : 3 : 6$ della tripla armonica, la qual somma si è rilevata nel termine 22 di Archimede. La istanza è ragionevole: deve perciò incontrarsi, e soddisfarsi completamente.

Si osservi dunque, in primo luogo, che la ragione di Archimede nel più della circonferenza è tra $7 : 22$; nel meno della circonferenza è tra $71 : 223$; e però la dimostrazione è fondata in due diametri 7, 71, i quali approssimati in differenza di unità con l'aggiunta di un zero a 7, sono $70 : 71$. Indi per formar il diametro comune alle due diverse circonferenze convien moltiplicare $7 \times 71 = 497$ diametro comune alle due circonferenze $1561 : 1562$, le quali differenti tra loro della unità costituiscono con l'estremo 4906 la proporzione geom:ca discreta $497 : 1561 : 1562 : 4906$. Tanto ha dimostrato Archimede con la operazione de' poligoni inscritti, e circoscritti al cerchio, e tanto con la facoltà dell'arm:ca scienza si risolve, come in suo principio primo, nella ultima delle cinque proporzioni geom:che discrete $30 : 35 : 36 : 42$. Si dimostra.

Si riducano a diametro comune le due ragioni: di Archimede $7 : 22$: di Mezio $113 : 355$. Risulterà la proporzione geom:ca discreta con la differenza della unità tra le due circonferenze, come nella sopr'assegnata di Archimede; e sarà $791 : 2485 : 2486 : 7810$, perche $791 : 2485 = 113 : 355$; $791 : 2486 = 7 : 22$. Parim:ti $2486 : 7810 = 113 : 355$; $2485 : 7810 = 7 : 22$. Adunque etc.: Si analizzino tutt'i termini della proporzione, riducendoli a' i primi termini producenti. Di 791 sono producenti $7 \times 113 = 791$, e sono numeri primi. Di 2485 sono producenti $35 \times 71 = 2485$, e 71 è numero primo: 35 è prodotto da $5 \times 7 = 35$.

Di 2486 sono producenti $11 \times 113 = 1243$, il di cui duplo è 2486, e $11 : 113$ sono numeri primi; indi duplicato 11 in $22 \times 113 = 2486$. Di 7810 sono producenti $110 \times 71 = 7810$, e 71 è numero primo: 110 è prodotto da $10 \times 11 = 110$. Ma 10 dividendosi per 2 in 5 numero primo, la produzione originale è di $5 \times 11 = 55$ duplicato in 110. Qui dunque si trovano producenti $5 : 7 : 11 : 71 : 113$: tutti numeri impari, e primi. Nel cerchio prolungato si è avuta la dimostrazione della intrinseca natura degl' impari numeri (da' Pitagorici chiamati numeri maschi) ch'è di [p. 35] somma de' termini delle forme, cioè della forma dupla $1 : 2$, somma de' termini 3; della forma sesquialtera $2 : 3$, somma de' termini 5 etc.: Adunque gl'impari tre primi $5 : 7 : 11$: risultati dall'analisi come termini producenti, si risolvono nelle loro forme, cioè 5 in $2 : 3$; 7 in $3 : 4$; 11 in $5 : 6$. Ma posti in serie i termini delle forme, sono $2 : 3 : 4 : 5 : 6$. Adunque si risolvono precisam:te nella tripla geom:ca discreta costituita da' i tre mezzi; arm:co $3 : aritm:co 4 : contrarm:co 5$ degli estremi tripli $2 : 6$ in $2 : 3 : 4 : 5 : 6$. Ma questa proporzione è il preciso fondamento principale della prima dimostrazione, da cui si è dedotta l'armonica somma 11. Adunque l'analisi instituita co'l mezzo della facoltà dell'arm:ca scienza avendo ridotto i numeri prodotti, e composti della proporzione costituita dalle due ragioni di Archimede, e di Mezio a numeri primi, e producenti, nella sua risoluzione è pervenuta necessariam:te, e dimostrativam:te al suo principio primo fondamentale, ch'è la tripla geom:ca discreta, su' cui si è dimostrata la somma 11 nella tripla arm:ca $2 : 3 : 6$: esclusi i due mezzi: 4 aritm:co, 5 contrarm:co. Ma qui non deve ommettersi un fatto significant:mo dell'arm:ca scienza. È fatto che date le forme per serie: $1 : 2$ dupla; $2 : 3$ sesquialtera; $3 : 4$ sesqui3za; $4 : 5$ sesqui4ta; $5 : 6$ sesqui5ta; sommati i loro termini, necessariam:te risulta la serie degl'impari: 3 dalla somma di $1 : 2$; 5 dalla somma di $2 : 3$; 7 dalla somma di $3 : 4$; 9 dalla somma di $4 : 5$; 11 dalla somma di $5 : 6$. È fatto che nell'analisi non si trova né il termine 3, né il termine 9. Che non si trovi il termine 3, è chiara la cagione, perche la tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 5 : 6$ incominciando dal termine 2, è impossibile che si trovi il termine 3, che deve nascer dalla somma di $1 : 2$; non essendovi il termine 1. Ma che nella suddetta proporzione essendovi i due termini $4 : 5$, la di cui somma è 9, non si trovi ne' termini primi, e producenti il termine 9, la cosa appare strana, e contro il principio della serie degl'impari. Ciò è tanto lontano dal vero, quanto che per il contrario questo fatto è pieno di scienza. Se per l'arm:ca somma di 11 è di assoluta necessità di principio che siano esclusi i due mezzi: aritm:co 4 : contrarm:co 5, la somma de quali è 9, è di assoluta necessità di conseguenza, che per la dimostrazione dell'arm:ca somma 11 non si trovi il termine 9 ne numeri primi, e producenti, con i quali si dimostra l'arm:ca somma 11. E qui è impossibile all'autore di trattarsi da una preghiera a i dotti quanto vuota di vanità per la gloria, altrettanto piena di cordialità per il vero, di considerar con tutta l'attenzione una tal analisi, ed un tal fatto; e poi di decidere con filosofica ingenuità se rispetto alle comunem:te note scienze dimostrative sia questo realm:te un mondo nuovo. Ma innanzi all'esame de i due termini 71, 113. Questi ugualm:te impari devono dividersi: 71 in $35 : 36$; 113 in $56 : 57$, e deve rendersi conto delle due risultate ragioni $35 : 36$, e $56 : 57$. La prima ragione $35 : 36$ è affatto manifesta, perche la ultima delle cinque fondamentali ragioni geom:che discrete essendo la dedotta dalla forma $5 : 6$

$$: 7 \text{ in } \frac{5 \sum_{6}^{7} 6}{30 : 35 : 36 : 42}$$
 , si trova di fatto che la ragione di 35 : 36 è formata dal mezzo arm:co 35, e dal mezzo aritm:co 36 degli estremi 30 : 42 = 5 : 7. Indi si trova di fatto, che sommati i due mezzi 35 : 36 in 71, e moltiplicato 35 × 71, il prodotto è = 2485 termine della circonferenza di Mezio.

Qui dove il fatto è manifesto, si esamini la natura della ragione 5 : 7, nel di cui centro formato da' i due mezzi arm:co, aritm:co, si trovano i termini producenti la circonferenza di Mezio 2485 = 355. La natura di questa ragione si è intrinsecam:te di radici duple, perche risolvendo i due termini impari: 5 in 2 : 3; 7 in 3 : 4, è dimostrativam:te certo che 2 × 3 = 6 : 3 × 4 = 12, come si è dimostrato nel cerchio. Ma questa ch'è l'ultima delle cinque fondamentali proporzioni geom:che discrete, necessariam:te determina il confine delle medesime. Questo confine identificam:te è lo stesso della sestupla, ch'è il confine della universale consonante armonia. La sestupla essenzialm:te consiste nella serie delle semplici forme $\overbrace{1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6}$. Queste necessariam:te incominciano dalla forma duple 1 : 2, di cui 5 : 7: sono le dimostrative radici nel cerchio. Quando dunque si dimostri il cerchio rivolgentesi in se stesso dentro il sestuplo [p. 36] confine, resta dimostrata la cagione, per cui necessariam:te dentro la sestupla si rivolge in se stesso; ed è, perche il suo fine è nelle radici di quella ragione, ch'è il suo principio; ed il suo fine essendo nelle radici, le quali sono principio necessario de' loro prodotti, è necessariam:te principio nello stesso punto ch'è fine.

Per tal dimostrazione due cose sono necessarie: l'una per se intrinseca alla proposizione che deve dimostrarsi; ed è che per dimostrare il cerchio rivolgentesi in se stesso dentro la sestupla, convien dimostrare nel sestuplo confine il regresso del cerchio al suo principio, ed il progresso del suo principio fin' al sestuplo confine. Perciò la sostanza della dimostrazione si riduce al regresso, e progresso del cerchio determinato dagli estremi della sestupla 1 : 6. L'altra per se intrinseca all'arm:ca scienza è la nozione di quella tal specie di proporzioni geom:che discrete, che nell'aritm:ca serie del numero è avanti gli occhi di tutto il dotto mondo. Si sono osservate molt:me affezioni, e proprietà del numero, ma ne pur una di quelle essenziali che realm:te producono scienza. Si sa ben:mo che data (per esempio) la tripla geom:ca discreta 2 : 3 : 4 : 5 : 6, 3 è il mezzo arm:co, 4 l'aritm:co: 5 il contrarmo:co degli estremi tripli 2 : 6. Ma poi non si è osservata la indefinita catena di queste proporzioni che vi è nel numero comune, ed è sotto gli occhi in $\overbrace{2 : 3 : 4 : 5 : 6 : 8 : 9 : 10 : 12 : 15 : 16 : 17 : 20}$ etc.: A ragguaglio non vi è numero di quelle proprietà essenziali del numero non osservate, nelle quali unicam:te, e realm:te consistendo la vera scienza delle ragioni, e proporzioni, non è maraviglia se tra tutte le parti delle mat:che discipline la più mendica, e imperfetta di tutte (a confessione de' stessi Professori) sia precisam:te la scienza comune delle ragioni, e proporzioni. E pure questa per il contrario dovrebbe esser la più assoluta, e perfetta di tutte, perche quanto vi è, e vi sarà mai di genere dimostrativo: si rappresenti con linee, con lettere, con che si vuole, tutto finalm:te si risolve nelle ragioni, e proporzioni come in principio primo, e universale. In questo principio primo, e universale delle ragioni, e proporzioni precisam:te consiste l'arm:ca scienza di cui qui si tratta, e ch'è la scienza di Platone. Alla sua esposizione totale si richiede un volume, non una dissertazione; ma qui non si espone, e si spiega che il puram:te necessario all'intento, e così fa l'autore della seguente proporzione geom:ca discreta necessaria alla di lui proposta dimostrazione.

Data la serie de' numeri quadrati 1 : 4 : 9 : 16 etc.; data la serie delle proporzioni geom:che discrete formate da' i due mezzi arm:co, aritm:co, $\overbrace{2 : 3 : 4 : 6 : 8 : 9 : 12}$ etc. , si troveranno gli estremi di queste proporzioni mezzi geom:ci de' numeri quadrati

$$\begin{array}{l} \text{Prima } \overbrace{1 : 2 : 4 : 6 : 9 : 12 : 16 : 20 : 25 : 30 : 36} \text{ etc.} \\ \text{Seconda } 2 : 3 : 4 : 6 : 8 : 9 : 12 : 15 : 16 : 20 : 24 : 25 : 30 \text{ etc.} \end{array}$$

Da queste due serie congiunte procede una specie di proporzione geom:ca discreta, in cui è sempre primo termine un numero quadrato: ultimo termine è sempre lo stesso della proporzione geom:ca discreta sottoposta a' i numeri quadrati: mezzi sono sempre il primo termine, e il mezzo armonico della sottoposta proporzione, ma indeterminati a qualunque natura, perche rispetto a i loro estremi non sono né armonici, né aritm:ci, né contrarmonici etc: , se si eccettui uncam:te la sola tripla, che in questa serie è la seconda proporzione. Questa è uncam:te la privilegiata [p. 37] tra tutte della indefinita serie con i mezzi determinati, perche 4 : 6 : 8 : 12 essendo in numeri primi 2 : 3 : 4 : 6, è chiaro che 3 è mezzo arm:co, 4 aritm:co degli estremi 2 : 6. Si noti questo privilegio, e si applichi a ciò che sù questa proporzione si è fin qui dimostrato del cerchio, e si dimostrerà in appresso. La serie di questa specie di proporzioni è la seguente.

$$\underbrace{1 : 2 : 3 : 6} \quad \underbrace{4 : 6 : 8 : 12} \quad \underbrace{9 : 12 : 15 : 20} \quad \underbrace{16 : 20 : 24 : 30} \quad \underbrace{25 : 30 : 35 : 42} \quad \text{etc.}$$

La forma di questa proporzione è composta dalle due semplici forme prime delle due proporzioni, aritm:ca, e arm:ca nel modo seguente. Data la prima proporzione composta 1 : 2 : 3 : 6, la forma tripla aritmetica 1 : 2 : 3: la forma tripla armonica 6 : 3 : 2: la compongono, e risultano gli estremi sestupli. Data la seconda proporzione composta 4 : 6 : 8 : 12, la forma dupla aritm:ca 2 : 3 : 4 duplicata in 4 : 6 : 8: la forma dupla arm:ca 6 : 4 : 3 duplicata in 12 : 8 : 6: la compongono, e risultano gli estremi tripli etc.:. La congiunzione dunque degli estremi di questa tal proporzione è intrinsecam:te circolare rispetto a' i mezzi che congiungono gli estremi. Perche (per esempio) il mezzo 2 aritmetico della forma tripla aritm:ca 1 : 2 : 3, si converte nell'estremo 2 della tripla armonica 6 : 3 : 2; ed egualm:te il mezzo 3 armonico della tripla arm:ca 6 : 3 : 2, si converte nell'estremo 3 della tripla aritm:ca 1 : 2 : 3; e così si dica, e intenda della indefinita serie di tali proporzioni. Omettendosi qui le osservazioni, molte, e significanti di questa proporzione, qui null'altro si osservi, che il necessario rapporto, e legame di queste proporzioni, il di cui primo termine è sempre un numero quadrato, con le proporzioni geom:che discrete formate da' i due mezzi, arm:co, aritm:co, il di cui primo termine è sempre un numero mezzo geom:co tra due quadrati. Se il primo termine delle proporzioni di questa seconda serie è sempre mezzo geom:co tra due numeri quadrati, e il primo termine delle proporzioni della prima serie è precisam:te il primo de' due numeri quadrati, in relazione de' quali il primo termine delle proporzioni della seconda serie è mezzo geometrico.

Se l'estremo delle due proporzioni tra loro relative per i gradi della serie, primo, secondo, terzo etc: , è sempre comune. Adunque hanno tra loro necessario rapporto, e legame. Altre prove possono addursi; ma per brevità si omettono giacché questa basta al bisogno. Congiunte dunque le due proporzioni in una sola che l'autore chiamerà congiunta, la serie sarà la seguente

$$\begin{array}{l} \text{serie prima:} \quad 1:2:3:6. \quad 4:6:8:12. \quad 9:12:15:20. \quad 16:20:24:30. \quad 25:30:35:42. \\ \text{serie seconda:} \quad 2:3:4:6. \quad 6:8:9:12. \quad 12:15:16:20. \quad 20:24:25:30. \quad 30:35:36:42. \\ \text{serie congiunta:} \quad 1:2:3:4:6. \quad 4:6:8:9:12. \quad 9:12:15:16:20. \quad 16:20:24:25:30. \quad 25:30:35:36:42. \end{array}$$

Che poi questa proporzione sia necessariam:te una parte integrale della scienza di Platone, il fatto è patente nel Timeo, dove con le ragioni, e proporzioni Platone forma l'anima del mondo. Il testo dice: ora fattosi gli intervalli sesquialteri, sesquiterzi, e sesquiottavi, con questi legami ne' primi spazi si adempivano tutt'i sesquiterzi co'l sesquiottavo intervallo, lasciatane una particella, la quale ha i termini del numero al numero come 256 a 243. Che il musicale sistema di

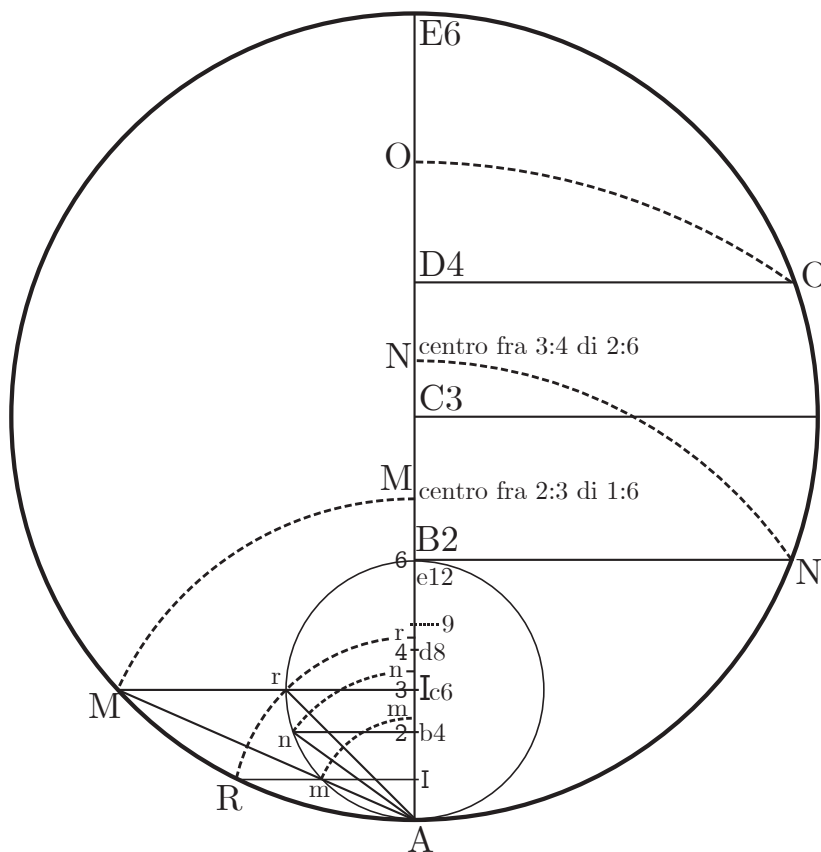
Pitagora, e di Platone sia fondato ne' tetracordi (in sesquiterza degli estremi), ciascun de quali è costituito da due tuoni maggiori (da due sesquiottave continue), e l'avanzo per il compimento del tetracordo sia la ragione $243 : 256$, che musicalm:te si chiama semituono, è fatto fuori di controversia. Ma che Calcidio, Aulisio, ed altri per spiegar il testo suddetto abbiano prese, e intese le ragioni, e proporzioni di Platone in senso preciso di musica attuale, oltrecche la cosa è puerile, e indegna di Filosofo, lo stesso testo di Platone parla in seguito di tutt'altro, che della musica attuale: parla chiamam:te della formazione del cerchio. Ecco il testo: ora tutto quest'ordine avendo partito per lungo in due parti, e accomodando il mezzo del mezzo nella forma del X, la torcè in cerchio congiungendo i capi in se stessi etc. . Più chiaro non puo parlarsi. Va ben:m: che la musica essendo un ramo di quest'albero, debba aver la stessa radice, ma Platone parla della formazione della radice, e non della produzione del ramo; e però a norma della di lui mente deve trovarsi, ed assegnarsi in forza dell'arm:ca scienza la radice della radice, non il prodotto della radice. Deve assegnarsi nelle precise ragioni di Platone. Devono queste precisam:te costituire una delle proporzioni congiunte. Deve in questa trovarsi precisam:te la natura circolare: tal', e tanto è l'obbligo di chiunque pretende diciferare il testo di Platone. Pur troppo i vari commenti, e le sciocche spiegazioni hanno cagionato la imputazione data a questo sommo Filosofo di fanatico, e visionario. Ma la colpa non è di lui: è della presunzione di chi si è arrischiato, e si arrischia a voler comentar, e spiegare ciò che non intende. Ecco il vero comento, e la vera spiegazione del testo, ben lontana da quante fin'ora si sono più sognate, che assegnate. Data la seconda proporzione congiunta $4 : 6 : 8 : 9 : 12$, che in fatto è dell'arm:ca scienza, in questa sono incluse tutte le ragioni del testo: sesquialtera $4 : 6$: sesquiterza $9 : 12$: sesquiottava $8 : 9$. Ordinate, e congiunte queste a norma dell'arm:ca scienza come si è spiegato qui sopra, necessariam:te formano la suddetta proporzione. Che da questa risulti la particella che si trova in ragione di 243 a 256 , si dimostra. A norma de' segni si moltiplichino tra loro i termini $\overbrace{4 : 6 : 8 : 9 : 12}$ $4 \times 12 = 48$; $6 \times 9 = 54$; $8 \times 8 = 64$. I prodotti $48 : 54 : 64$, che in numeri primi sono $24 : 27 : 32$, con la stessa regola si moltiplichino tra loro: $\overbrace{24 : 27 : 32}$. Saranno $24 \times 32 = 768$; $27 \times 27 = 729$. Ma divisi i prodotti per $^3 : \frac{729}{243}$; $^3 : \frac{768}{256}$. Adunque è dimostrato etc.:

Ma perche tal operazione di moltiplica (proprietà intrinseca di tali proporzioni) quanto è feconda, altrettanto è significativa, si operi con i segni diversam:te applicati: $\overbrace{4 : 6 : 8 : 9 : 12}$. Sarà $4 \times 8 = 32$; $6 \times 9 = 54$; $8 \times 12 = 96$. I prodotti $32 : 54 : 96$: in numeri primi: $\overbrace{16 : 27 : 48}$ siano moltiplicati: $16 \times 48 = 768$; $27 \times 27 = 729$. Adunque come i primi divisi per 3 etc.: Non basta. Conservando la posizione della dupla geom:ca discreta $6 : 8 : 9 : 12$, il termine 4 primo estremo triplo a 12 si trasporti in 18 ultimo estremo triplo a 6. Sarà la proporzione congiunta $\overbrace{6 : 8 : 9 : 12 : 18}$. Si operi secondo i segni: $6 \times 18 = 108$; $8 \times 12 = 96$; $9 \times 9 = 81$. I prodotti $81 : 96 : 108$ divisi per 3 saranno $\overbrace{27 : 32 : 36}$. Indi $27 \times 36 = 972$; $32 \times 32 = 1024$. Ma divisi per 4: $\frac{972}{243}$; $4 : \frac{1024}{256}$; Adunque etc.: Egualm:te operando con i segni diversam:te applicati $\overbrace{6 : 8 : 9 : 12 : 18}$; $6 \times 9 = 54$; $8 \times 12 = 96$; $9 \times 18 = 162$. I prodotti $54 : 96 : 162$ divisi per 6 saranno $\overbrace{9 : 16 : 27}$. Ma $9 \times 27 = 243$; $16 \times 16 = 256$. Adunque etc.: La natura circolare che qui si rileva nel risultato sempre lo stesso in $243 : 256$, benche sia diversa la operazione di legame, e la posizione degli estremi tripli, si tocca con mano ponendo perpendicolarm:te a confronto le due proporzioni $\frac{4 : 6 : 8 : 9 : 12}{6 : 8 : 9 : 12 : 18}$. I tre mezzi $6 : 8 : 9$: della superiore essendo inversam:te uguali di proporzione a' i tre mezzi $8 : 9 : 12$: della inferiore; e gli estremi tripli comuni formando con i propri mezzi le due proporzioni inversam:te uguali, per necessità della loro forma ne viene, che moltiplicando tra loro i termini della superiore, e della inferiore co'l segno **X** di Platone fin' a' i due perpendicolari di linea, ne' quali si trova il mezzo comune de' i cinque termini, il prodotto

Siano le somme de i termini delle proporzioni continue:

	dupla	1	sesquial.	4	sesquiterza	9	sesquiquinta	16	sesquisesta	25	
		2		6		12		20		30	etc.:
		4		9		16		25		36	etc.:
		7		19		37		61		91	etc.:
da ciascuna somma si sottri la unità		<u>6</u> :		<u>18</u> :		<u>36</u> :		<u>60</u> :		<u>90</u> :	etc.:
in numeri primi		1 :		<u>3</u> :		<u>6</u> :		<u>10</u> :		<u>15</u> :	etc.:
				<u>1</u>		<u>3</u>		<u>6</u>		<u>10</u>	
			somme	4.		9.		16.		25	etc.:

Ritornano dunque i quadrati al loro principio primo con la sottra delle unità, e ritornano in forza della ragione, a cui si è ridotta la proporzione continua con la sottra della unità, perche [p. 41] da 1 : 2 : 4 : sottratta la unità al terzo termine continuo, resta la subtrippla 1 : 3 = 6 : 18. Da 4 : 6 : 9 : sottratta la unità al terzo termine continuo, resta la subdupla 4 : 8 = 18 : 36 etc.. Questo giro, e legame circolare di ragioni, e proporzioni si combini con ciò, che altrove si è proposto, e spiegato della formazione de' quadrati non con le radici, ma con le ragioni in serie inversa delle arm:che differenze. Si combini con quanto in seguito è accorso fin qui di proporre, dimostrar, e spiegare delle ragioni, e proporzioni, e della loro applicazione al cerchio. Si vedrà ad evidenza quanto mai sia diversa la loro vera scienza dalla scienza comune. Intanto questa che nel suo principio primo è operazione di continuo in una data ragione, che senza limite di serie prosiegue, e si moltiplica in se stessa verso l'infinito se non trova impedimento, sarebbe mai la vera fisica idea di quel grado di moto, e di forza, da cui mosso un corpo percorrerebbe spazio retto infinito se non trovasse impedimento? Qui molto meno si troverà la migliore, o la eguale, poicche troppo è grande la precisione della cosa. Il quadrato è sempre mezzo aritm:co, il meno 1 del quadrato è sempre mezzo arm:co di tali proporzioni. La linea retta è intrinsecam:te di aritmetica, la circolare di armonica natura. È pieno l'universo del moto iniziale de' corpi per linea retta, costretto da legge universale alla linea circolare, ed alle sue derivazioni. Oh quanto mai vi è qui da pensar, e riflettere per chi è vero Filosofo. Ciò necessariam:te premesso, si viene alla dimostrazione del cerchio rivolgentesi in se stesso dentro la sestupla. S'incomincia dal regresso, e si fonda la dimostrazione su'l primo cerchio nella proporzione congiunta 1 : 2 : 3 : 4 : 6 espressa nel cerchio maggiore da AI = 1 : AB = 2 : AC = 3 : AD = 4 : AE = 6, e dalle supposte ipotenuse AM, AN, AO, i di cui quadrati formano la dupla continua dimostrata nel primo cerchio.



Se dunque in questo cerchio vi è regresso verso unità minore di AI, che qui esprime a rigore la minima unità 1 come numero quadrato, non può darsi questa unità minore se non che dentro AI come una di lui parte, e frazione; e non può esser dedotta, che con la stessa legge di AI; cioè se AI è la unità necessaria per la formazione del triangolo AMI, la cui ipotenusa AM è il mezzo geom:co di AB, AC, a ragguaglio la ricercata unità minore del regresso deve formare un triangolo, la di cui ipotenusa sia mezzo geom:co di AI, AB: proporzione per sé dimostrata, perché come AB, AC è la seconda ragione della proporzione congiunta 1 : 2 : 3 : 4 : 6, di cui AI, AB è la prima, così AI, AB nel regresso deve diventare la seconda ragione rispetto a quella, che con la suddetta legge deve assegnarsi per il regresso, e che però dev'esser necessariamente la prima. Ciò dimostrato, e premesso, due sono le linee assegnabili nel regresso, fondate nella stessa figura, e proporzione, dalle quali è deducibile il mezzo geom:co di AI, AB. A matematico rigore della stessa figura, e proporzione è deducibile da AI, ch'è $\frac{1}{18}$ di AE, il ricercato triangolo I, r, A, la di cui ipotenusa Ar sarà il mezzo geom:co di AI, AB. Ad eguale matematico rigore dedotto il cerchio da AB come diametro; dedotto il semidiametro in piano Ir, si ha da AI, Ir la diagonale Ar mezzo geom:co di AI, AB. Si dice ad eguale matematico rigore, perché AB ad AI è in ragione dupla, da cui necessariamente procede la diagonale del quadrato, ed in cui, come loro principio primo, convengono le due figure, quadrato, e cerchio nello stesso rispetto di corda, e diagonale, come l'autore ha dimostrato nel suo trattato di musica. Se dunque si considera la diagonale Ar dedotta da AI, resta AI prima unità nello stesso senso, e rispetto primo della proporzione congiunta 1 : 2 : 3 : 4 : 6 in AI, AB, AC, AD, AE; e in questo senso, e rispetto resta dimostrata la impossibilità del regresso verso qualunque unità minore di AI. Se poi si considera AI come unità minore di AI, e però unità di regresso, è fatto che da AI resta diviso AB in sei parti eguali, e però AI è $\frac{1}{6}$ di AB, come AI è $\frac{1}{6}$ di AE. È dimostrazione che dalla circonferenza BrA restando intersecato il seno 1r in m, la ipotenusa Am del triangolo ImA è il mezzo geom:co di Ab = 2, di

[p. 42]

$Ac = 3$. Si torna dunque in precisione al primo cerchio, e proporzione in AI, Ab, Ac, Ad, Ae = AI, AB, AC, AD, AE = 1 : 2 : 3 : 4 : 6.

Resta dunque dimostrato, che rispetto alla suddetta proporzione congiunta, i di cui estremi sono sestupli, il cerchio nel suo regresso si converte in se stesso. Nè a questa dimostrazione si oppone la dedotta dalla dupla AB, AI, in di cui forza si è conchiusa la impossibilità del regresso oltre la prima unità AI. Anzi per il contrario è prova, e conferma del sestuplo periodo, dentro cui si rivolge il cerchio in se stesso per regressione indefinita. Se la prima proporzione congiunta adattabile al cerchio è 1 : 2 : 3 : 4 : 6; la seconda congiunta è 4 : 6 : 8 : 9 : 12, come sopra si è veduto nel secondo cerchio, è forza che nel secondo regresso si trovi prima la proporzione 4 : 6 : 8 : 9 : 12; seconda la proporzione 1 : 2 : 3 : 4 : 6, il che per se è dimostrato. Così precisamente succede rispetto alla dupla AB, AI, perchè non potendosi intendere, né adattar la dupla geometrica discreta 6 : 8 : 9 : 12 : senza il numero quadrato 4 necessario all'assegnazione del mezzo geometrico di AI = 6, e di Ad = 8, è forza dedurlo da $\frac{1}{3}$ del diametro AB in Ab = 4, perchè nella dupla il diametro è = 12. È dunque forza tornare alla proporzione congiunta 4 : 6 : 8 : 9 : 12. Ma egualmente in questa proporzione ricercando il regresso, e però ricercando il termine, da cui si deduca il mezzo geometrico di Ab = 4, e di Ac = 6, è forza assegnare AI, da cui per il triangolo IAm si ha la ipotenusa Am mezzo geometrico di Ab, Ac. È dunque forza ritornare alla sestupla. È dunque forza che il cerchio nella sestupla si converta retrogradamente in se stesso. Qui si sono ommesse le rispettive geometriche dimostrazioni, come superflue per chiunque sa i primi rudimenti della Geometria.

Dimostrato il regresso, si dimostra il progresso sostanzialmente determinato nello stesso senso del regresso al sestuplo confine. Si spiega. La determinazione del regresso dipende sostanzialmente dal termine aggiunto alle proporzioni geometriche discrete della seconda serie: termine di numero quadrato che forma serie, 1 : 4 : 9 : etc., nella cui forza il regresso circolare ritorna al suo principio primo nella proporzione congiunta 1 : 2 : 3 : 4 : 6. La ragione in cui si trova il termine I aggiunto al primo termine 2 della tripla geometrica discreta 2 : 3 : 4 : 6, è di dupla, come in dupla è il vero dimostrato legame della stessa tripla $\overbrace{2 : 3 : 4 : 6}$, e come in dupla è il centro composto di tre mezzi della proporzione congiunta 1 : $\overbrace{2 : 3 : 4} : 6$. L'autore chiama centro semplice della proporzione la necessaria congiunzione de' due mezzi della proporzione geometrica discreta per l'effetto della moltiplicazione. Sia la tripla geometrica discreta 2 : 3 : 4 : 6. Moltiplicati gli estremi $2 \times 6 = 12$; moltiplicati i due mezzi $3 \times 4 = 12$; non può dunque non esser centro la congiunzione de' i due mezzi, cioè centro di proporzione. Chiamata poi centro composto la congiunzione de' i tre mezzi della proporzione congiunta 1 : $\overbrace{2 : 3 : 4} : 6$, perchè i mezzi 2 : 3 : avendo relazione agli estremi 1 : 6; i mezzi 3 : 4, agli estremi 2 : 6, è forza che il centro sia composto di due diverse relazioni, e però dev'esser in tre termini.

Per brevità si tralascia la loro significazione affatto diversa dalla comune; unicamente si osservi che dalla serie delle ragioni 1 : 2; 2 : 3; 3 : 4 etc: sono costituiti gli estremi de' i tre mezzi di queste proporzioni; $2 : 4 = 1 : 2$; $6 : 9 = 2 : 3$; $12 : 16 = 3 : 4$ etc:. Tanto basta per rilevare che le semplici prime ragioni, le quali per se formano gli estremi a guisa di superficie, in queste proporzioni formano i mezzi a guisa di centro, che qui si chiama composto, perchè formato da due ragioni. Tanto basta per rilevare in queste proporzioni la vera natura del cubo, perchè se [p. 43] dato 1 : 2 : 4 : 8, e dall'estremo 8 sottratta la ragione subsesquiterza col porvi estremo 6, e riportata al mezzo 4 nel termine 3, si forma la proporzione congiunta 1 : 2 : 3 : 4 : 6, e risultano i tre mezzi 2 : 3 : 4 in estremi dupli. Se dato 4 : 6 : 9 : 13 : $\frac{1}{2}$, e dall'estremo 13 : $\frac{1}{2}$ sottratta la ragione subsesquiquattava col porsi estremo 12, e riportata al mezzo 9 nel termine 8, si forma la proporzione congiunta 4 : 6 : 8 : 9 : 12, e risultano i tre mezzi 6 : 8 : 9 in estremi sesquialteri. Se 1 : 2 : 4 : 8 è proporzione di cubo duplo, 4 : 6 : 9 : 13 : $\frac{1}{2}$ di cubo sesquialtero, è chiaro

che questo centro composto è centro di cubo, e si fa chiaro ciò che Platone riporta all'oracolo di Delfo della natura, e dottrina del cubo. Ma di questo nulla più bisogna, perche tanto basta a rilevare la sostanza, la quale si riduce alla dupla come principio; alla tripla come centro, e mezzo; alla sestupla come fine, ed estremo; e ciò in forza de' numeri quadrati disposti per serie 1 : 4 : 9 etc.: In tal senso preciso è determinato il progresso circolare dalla dupla come principio, dalla tripla come centro, e mezzo, dalla sestupla come fine, ed estremo; e ciò in forza de' numeri quadrati disposti per serie 1 : 4 : 9 etc: si dimostra.

Sia la serie delle proporzioni congiunte fino al termine 6 come radice di numero quadrato non della prima, ma della seconda serie delle sopr'assegnate proporzioni geom:che discrete. Si spiega. Nella serie delle proporzioni congiunte 1 : 2 : 3 : 4 : 6; 4 : 6 : 8 : 9 : 12 etc: vi sono sempre due numeri quadrati, uno de quali è sempre primo termine della proporzione congiunta, ed è relativo alla prima serie delle proporzioni geom:che discrete 1 : 2 : 3 : 6; 4 : 6 : 8 : 12 etc.; e l'altro è sempre relativo e sempre mezzo aritm:co della seconda serie delle proporzioni geom:che discrete 2 : 3 : 4 : 6; 6 : 8 : 9 : 12 etc: quando dunque per l'assegnazione della serie delle proporzioni congiunte fin al termine 6 come radice quadrata si dice non della prima, ma della seconda serie, si vuol dire in sostanza, che dati i numeri dell'aritm:ca serie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6, e intesi tutti come radici quadrate, a ragguaglio si assegni la serie delle proporzioni congiunte, cosicche in queste siano rinchiusi, e consumati tutt' i numeri quadrati 1 : 4 : 9 : 16 : 25 : 36, prodotti da 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6; ed allora sia compita la serie, quando si trova 36 ultimo quadrato, il quale di propria natura appartiene alla seconda serie delle proporzioni geom:che discrete, perche si trova mezzo aritm:co della subsuper2 parz: 5 geom:ca discreta 30 : 35 : 36 : 42, li di cui estremi sono in numeri primi 5 : 7.

Sarà dunque la serie delle proporzioni congiunte la qui esposta, di cui si sommino le colonne, e si osservi null'altro che il fatto. È fatto che tutte le somme risultano divisibili per 5; il che non risultando né dalle somme di quattro proporzioni, ch'è verso il meno, né dalle somme di sei, ch'è verso il più de' suddetti numeri quadrati, nel numero 5 dev'esservi significazione particolare di

1 :	2 :	3 :	4 :	6
4 :	6 :	8 :	9 :	12
9 :	12 :	15 :	16 :	20
16 :	20 :	24 :	25 :	30
25 :	30 :	35 :	36 :	42
55 :	70 :	85 :	90 :	110

scienza e molto più, perche 5 è radice quadrata di 25 primo termine della ultima proporzione congiunta. Il numero 5 risulta dalla forma sesquialtera 2 : 3 in $\frac{2}{3}$, la quale costituisce il centro della prima proporzione 1 : $\sqrt{2} : \sqrt{3} : 6$, e della quale ridotta a proporzione geom:ca discreta in 20 : 24 : 25 : 30, è mezzo aritm:co il quadrato 25. Che poi rispetto a i numeri quadrati, come mezzi aritm:ci delle relative proporzioni geom:che discrete della seconda serie, debba intendersi che nella loro radice siano formati dalla somma de' termini costituenti la ragione di cui sono mezzi, è dimostrazione di fatto. Data la forma dupla di 1 : 2, la somma de'i due termini è 3: di 3 il numero quadrato 9 è mezzo aritm:co della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 12. Data la forma sesquialtera 2 : 3, la somma de'i due termini è 5: di 5 il numero quadrato 25 è mezzo aritm:co della sesquialtera geom:ca discreta 20 : 24 : 25 : 30 etc.: Qual sia poi la significazione di scienza del numero 5 (significazione affatto singolare) si spiegarà a suo luogo. Qui si noti distintamente; e comeche appartiene al mezzo, ossia centro sopra indicato della tripla; così [p. 44] dovendosene separatam:te trattar a lungo, di questo per ora qui non si fa parola. È fatto, che gli estremi della somma 55 : 110, risultano in dupla, il che non succede, né può succeder in infinito né sommando per regresso le quattro, tre, due proporzioni; né sommando per progresso le sei, sette, otto etc: oltre le cinque precise. È fatto, che ciò succede precisam:te nelle radici duple 5 : 7 (qui già dimostrate tali) ridotte a proporzione geom:ca discreta in 30 : 35 : 36 : 42, perche

questa è la ultima proporzione determinante il progresso, e la somma relativam:te al numero quadrato 36 ch'è l'ultimo, perch'è prodotto da 6. È fatto, che ridotte le somme 55 : 70 : 85 : 90 : 110 a numeri primi per 5 in 11 : 14 : 17 : 18 : 22, la somma totale di questi termini ch'è e 82, è il preciso mezzo contrarm:co del centro formato dai tre mezzi 8 : 9 : 10 : della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 10 : 12, ridotti a proporzione geom:ca discreta determinata dalli tre mezzi, arm:co, aritm:co, contrarm:co in 72 : 80 : 81 : 82 : 90. Adunque non solam:te rispetto alla somma si trova la dupla negli estremi 55 : 110; ma in oltre si trova il centro della dupla nella somma totale 82, e si trovano le radici della dupla nella ultima proporzione determinante le somme. Ma la progressione de' quadrati in questa ultima proporzione si trova in sestupla rispetto alle radici quadrate 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6, e il risultato è la ragion dupla non solam:te tra gli estremi delle somme, ma nelle radici, e nel centro duplo. Adunque il progresso è come il regresso, perch'è determinato dalla dupla come principio, in cui si risolve: dalla sestupla come fine a cui si estende; e ciò in forza de' numeri quadrati esposti per serie. Non vi è altra differenza se non che la dupla risulta ugualm:te negli estremi delle somme, come la sestupla negli estremi delle radici quadrate, e realm:te la dupla è fine nelle somme, come la sestupla è principio nelle proporzioni. Ma questa appunto è la massima dimostrazione del progresso, e regresso della natura circolare dentro la sestupla. Adunque etc.: Né può dubitarsi che in senso circolare non debba intendersi il progresso, come nell'attual figura circolare si è dimostrato il regresso. È fatto che il termine 55 somma della prima colonna al termine 70 somma della seconda colonna è in ragione di 11 a 14, ch'è la dimostrata da Archimede con i poligoni tra cerchio inscritto, e quadrato circoscritto: cosa impossibile a seguire in minor, o maggior serie della sestupla. Adunque vera natura circolare, la quale nel suo progresso ha il suo compimento nella sestupla a ragguaglio dell'estremo 110 = 22, che diventa cerchio circoscritto al quadrato inscritto 70 = 11, perche unicam:te nella sestupla si trova formata, e compita la ragione indicante la natura circolare si nel suo principio, che nel suo compimento. Essendo la ragione formata per somma, ciò evidentem:te dimostra né più, né meno della sestupla. Ma qui vi è luogo ad una istanza, ed è, che risolte per 5 le somme 55 : 70 : 85 : 90 : 110 : in 11 : 14 : 17 : 18 : 22, si vede ben:m: la natura circolare ne' tre termini 11 : 14 : 22; ma non si rileva poi questa natura nei due 17 : 18. A che dunque servono e che significano? Per brevità si ommette in risposta il molto, e si ristringe al poco. Si sommino 17 : 18: sarà la somma 35 prodotto da $5 \times 7 = 35$; e 5 : 7 è la forma della ultima proporzione geom:ca discreta della seconda serie, 30 : 35 : 36 : 42, i di cui estremi 30 : 42 = 5 : 7. Si sommino i due primi, 11 : 14: sarà la somma 25. Ma 25 : 30 : 35 : 36 : 42 è la ultima proporzione congiunta. Adunque etc.: Qui l'autore fa la sua istanza, chiedendo se di tal sorte di aritmetica si abbia né pur la idea. E pure questa è intieram:te fondata nel numero comune; e pure quanto fin qui si è di essa esposto, tutto è di proprietà, e di affezioni del numero comune; e pure quanto non si dimostrerà mai dalle mat:che scienze chiamate sublimi, qui effettivam:te si dimostra co'l numero comune. Adunque con tutta giustizia Platone ha chiamato il numero un dono divino, e con tutta verità ha detto esservi l'Aritmetica de' Filosofi ben diversa dalla volgare, al di cui ragguaglio, e confronto le altre scienze dimostrative non sono da stimarsi, né possono essere che sue ministre.

Tuttavia innanzi di determinare la verità, e facultà di questa scienza rimangono molte difficoltà da superarsi. Primieram:te si è fin qui fondata la scienza del cerchio sulla ragione di Archimede di 7 diametro a 22 circonferenza, la qual ragione di tutte le dimostrate per poligoni è la più imperfetta. Poi per prova maggiore si è assunta la ragione di Mezio di 113 diametro a 355 circonferenza, la quale non essendo completam:te misurata da 11 somma armonica di 6 : 3 : 2, con ciò dimostra il contrario di quanto si è qui voluto dimostrare dell'arm:ca natura della circonferenza con la somma della tripla armonica, che s'incontra con 22 circonferenza [p. 45]

di Archimede. Vi è infine la necessità di un requisito di questa scienza; ed è; che dalle altre scienze dimostrative non solam:te non essendosi mai potuta ottenere la quadratura del cerchio, ma nemmeno una legittima dimostrazione della possibilità, o impossibilità della quadratura, se questa è la scienza originale del cerchio, deve necessariam:te o dimostrar la quadratura, o la impossibilità della quadratura, e deve assegnar la cagione a priori della impossibilità. Queste sono le ragionevol:me difficoltà che devono incontrarsi, e diluirsi fin' al loro principio primo, da cui hanno la sorgente, e tanto in seguito s'intraprende.

Si ometta dunque la ragione di Archimede 7 : 22 : , bensì come la più imperfetta, ma non mai come falsa nel suo fondamento; e però quanto fin qui si è dimostrato sù questa ragione, s'intende dimostrato sù fondamento positivo, e reale, qual è il geom:co de' poligoni inscritti, e circoscritti. Assumendo la ragione di Mezio 113 : 355, più prossima al vero di quella d'Archimede, ma senza parità più lontana dal vero di quella di Ludolfo a Ceulen 100000000 etc: , 314159265 etc: , è certo che di 355 termine della circonferenza non è parte aliquota 11, e però non è misura completa di 355, come 11 è di 22 circonferenza di Archimede. Per ridurre l'esame di questa ragione alla sua prima sorgente comune de' poligoni, nella quale devono necessariam:te convenire tutte le ragioni del diametro al cerchio dedotte da questo principio, siano tra loro comparate le due ragioni di Mezio, e di Ceulen, giacche dalla loro comparazione deve necessariam:te succedere la loro risoluzione in due termini differenziali, i quali avendo la radice, e sorgente della loro differenza nel principio comune de' poligoni, necessariam:te sono termini di principio primo. Il metodo di questa scienza per la comparazione delle ragioni sostanzialm:te è lo stesso della scienza comune delle ragioni, e proporzioni. Ma la intenzione, e direzione di questa scienza è diversa, perche considera i due termini differenziali che risultano dalla comparazione, come una ragione positiva, e reale, ed anzi come una ragione di centro, che vuol dire di essenza della proporzione, di cui è centro. Si spiega con l'esempio. La ragione di Archimede o di 7 a 22 nel più, o di 71 a 223 nel meno si risolve nella proporzione geom:ca discreta 497 : 1561 : 1562 : 4906. Qui si chiama centro la congiunzione de i due mezzi 1561 : 1562, i quali moltiplicati tra loro producono quanto gli estremi moltiplicati tra loro. È chiaro che i suddetti due termini sono le differenze del più, e del meno delle due ragioni 7 a 22 : 71 a 223. È dunque chiaro che la sostanza della dimostrazione consiste nelle differenze le quali formano il centro della proporzione. Ma questo centro è composto da due estremi di ragione positiva, e reale. Non possono dunque non costituire tra loro ragione positiva, e reale, in cui consistendo il centro, consiste la essenza della proporzione. Tuttavia non volendosi qui questione di nomi, basta che si sappia, e s'intenda chiamarsi dall'autore ragione differenziale quella, che in due termini diversi risulta dalla comparazione di due ragioni. Comparando dunque la ragione di Mezio a quella di Ceulen, si operi per moltiplica nel modo seguente:

$$\begin{array}{r}
 100000000 : \\
 \underline{355 :} \\
 3055 : 35500000000 \\
 = 11620294 \text{ avanzo } 1830
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 314159265 \\
 \underline{113} \\
 3055 : 35499996945 \\
 = 11620293 \text{ avanzo } 1830
 \end{array}$$

Fin qui risulta in cifre 8 la differenza della unità, di cui la ragione di Mezio eccede quella di Ceulen; potendo intieram:te trascurarsi gli avanzi per quanto in seguito si deve operare. Proseguendo con lo stesso metodo la stessa operazione, aggiungendo alla ragione di Ceulen quantità di cifre sempre maggiore, la operazione finalm:te si risolve ne' due termini differenti per la unità: di Mezio 11776666 di Ceulen 11776665. In questi rimane per sempre determinata la ragione differenziale costituita da'i due termini suddetti; cosicche se si voglia fare la improba fatica di adoprare tutt'i trentasei termini della circonferenza di Ceulen, si altereranno bensì le frazioni degli avanzi, ma la suddetta ragione differenziale non si altererà mai, e resterà perpetuam:te

costante ne' i due termini suddetti. È dunque dimostrativam:te certo, che in questi due termini la ragione differenziale è ridotta al suo principio primo. Ma di 11776666 è parte aliquota il termine 11, e però è misura completa di 11776666, ch'è la circonferenza di Mezio. Adunque nel suo principio primo differenziale si trova realm:te il termine 11 come parte aliquota, e misura completa. La dimostrazione è legittima, se s'intenda cosa significhi il principio primo differenziale. Chi professa scienza di ragioni, e proporzioni, ha debito d'intenderlo, e però per brevità qui si ommette quella spiegazione, che non si crede necessaria. Tuttavia acciò si tocchi sempre [p. 46] più con mano quanto mai la scienza comune delle ragioni, e proporzioni sia indietro dalla vera scienza delle medesime, si sommino le cifre de' i due termini costituenti la ragione differenziale, in cui come in suo principio primo, si risolve la comparazione delle due ragioni di Mezio, e di Ceulen. Delle cifre 11776665 la somma è 39: delle cifre 11776666 è 40. A questi due termini 39 : 40 : si aggiunga in serie aritmetica il terzo termine impari 41, il di cui duplo 82 è quel mezzo contrarm:co qui sopra dimostrato somma de' i cinque termini 11 : 14 : 17 : 18 : 22, ne quali si sono risolte per 5 le somme delle colonne 55 : 70 : 85 : 90 : 110. I tre termini 39 : 40 : 41, come forma di ragione costituita dagli estremi 39 : 41, siano ridotti a proporzione geom:ca discreta per la formola

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 39 & \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} & 40 & & \\
 & & 40 & \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} & 41 & & \\
 \hline
 1560 : & 1599 : & 1600 : & 1601 : & 1640 & & \\
 & \text{mezzo} & \text{mezzo} & \text{mezzo} & & & \\
 & \text{arm:co} & \text{aritm:co} & \text{contr:} & & &
 \end{array}$$

Il centro della proporzione sarà formato dal mezzo arm:co 1599, e dal mezzo aritm:co 1600, i quali moltiplicati tra loro producono quanto gli estremi moltiplicati tra loro; e fin qui il mezzo contrarm:co 1601 non ha azione veruna nella proporzione. Sia questo da se solo mezzo geom:co relativo a quegli estremi, che per eguagliar il prodotto di questo mezzo dovranno dedursi dagli estremi della proporzione 1560 : 1640. Moltiplicato per se stesso $1601 \times 1601 = 2563201$. Per approssimarsi a questo prodotto dovranno dunque crescer egualm:te gli estremi di $1\frac{1}{2}$ in 1561 : $\frac{1}{2}$, e 1641 : $\frac{1}{2}$, perche $1561 : \frac{1}{2} \times 1641 : \frac{1}{2} = 2563202 : \frac{1}{4}$. Vi sarà nel prodotto la minima differenza di 2050561 : 2050562 in circa, e però da trascurarsi. Ma il centro della proporzione di Archimede dedotta da 7 : 22 nel più, da 71 : 223 nel meno è 1561 : 1562, perche la proporzione si è 497 : 1561 : 1562 : 4906; ed il qui risultato estremo minore 1561 : $\frac{1}{2}$ è precisam:te mezzo aritm:co tra 1561 : 1562 centro della suddetta proporzione. Adunque in questa sola dimostrazione si vede, e si tocca il giro della vera scienza delle ragioni, e proporzioni, la quale riduce tutte le diverse posizioni ad un principio primo di centro di ragione, in cui si trova congiunta la posizione di Archimede, di Mezio, e di Ceulen. È vero che le operazioni di questa scienza sono ben diverse dalle operazioni della scienza comune; ma è vero altrettanto che la facoltà di queste operazioni, ed i principj di questa facoltà sono cose affatto incognite alla scienza comune, come sempre più si anderà vedendo. Non si perda intanto di vista l'important:mo punto della ragione 39 : 41, su cui si dovrà tornare per condurla al suo principio primo, in di cui forza si dovrà per sempre risolvere la questione della possibilità, o impossibilità della quadratura del cerchio.

Perciò prevenendo il pregiudicio facile a seguire dall'assegnazione di una ragione, che da una parte deve decidere di un punto si importante, e dall'altra non si sa che significhi, perche nella scienza comune si ha per indifferente qualunque ragione, come ragione, perciò qui si noti distintam:te per ricordarsene a suo luogo, che la ragione 39 : 41 è formata da due numeri impari, la somma de quali è 80 mezzo arm:co di quella stessa proporzione, di cui 82 è mezzo contrarm:co; e la proporzione è formata da' i tre mezzi 8 : 9 : 10 : della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 10

: 12 per la formola $\frac{8 \sum_{9}^{10}}{72 : 80 : 81 : 82 : 90}$. Maneat alta mente repostum. Si vuole bensì ometter per

brevità quanto di più somministra la scienza presente di dottrina, e di prove, per venir finalm:te alla dottrina, e prova principale. Sulla ragione di Ceulen la più esatta di tutte. A questo effetto essendo precisam:te necessarie molte nozioni di fatto, e di dottrina, si anderanno esponendo, separando i fatti dalle dottrine.

Sia primo fatto. Nella ultima proporzione congiunta della prima serie 25 : 30 : 35 : 36 : 42 : vi sono i due numeri quadrati 25 : 36, e la proporzione geom:ca discreta ultima della seconda serie ha per estremi 30 : 42 = 5 : 7. Da questa ragione 5 : 7 : con l'aggiunto mezzo aritm:co 6 si

ha la suddetta proporzione per la formola $\frac{5 \sum_{6}^{7}}{30 : 35 : 36 : 42}$. La circonferenza di Ceulen 314159265

etc: si faccia mezzo de' due quadrati come estremi: cioè 25 : 35, aggiungendo a questi tanti zero, quante cifre di Ceulen si vogliono adoprare ad arbitrio. Indi si deducano le differenze tra il mezzo, e gli estremi. Sarà 25000000000 etc: 31415926535 etc: 36000000000 etc:

differenze	6415926535.	32088514255
comparate alla ragione	5 :	4584073465
per la differenza	<u>8881580 : 32079632675 :</u>	<u>7</u>

risulta la ragione differenziale $\frac{3611}{3612}$: avanzo 8247295. Questo primo fatto costringe i Matem:ci a pensar molto seriam:te sulla loro scienza delle ragioni, e proporzioni, perche qui non può negarsi [p. 47] la ragione 5 : 7 : realm:te formata dalle due differenze, benchè tra le due comparate ragioni si trovi il divario di $\frac{1}{5056}$ mo in circa. Se comparate le due ragioni di quadrato circoscritto, e di cerchio inscritto: di Mezio 452 : 355; e di Archimede 14 : 11, si trova il divario di $\frac{1}{3164}$ mo, né perciò può negarsi la identicità di principio, e di natura delle due comparate ragioni; molto meno può negarsi delle due qui sopra comparate: si perche gli estremi della proporzione formando la ragione fondamentale da compararsi, non soggetta al più, ed al meno come le due di Mezio, e di Archimede, ma inalterabile, e determinata nel punto matem:co della sua forma 5 : 7, il fondamento della comparazione è maggiore: si perche la ragione 5 : 7 : essendo formata da numeri minori, e però più semplici di 11 : 14, nondimeno la differenza di $\frac{1}{5056}$ mo in circa che risulta dalle differenze del mezzo comparate a 5 : 7 : , è minore di $\frac{1}{3164}$ mo che risulta dalla comparazione di 11 : 14 : a 355 : 452. Così essendo di fatto, e le dedotte differenze risultando in tal prossimità di ragione alla ragione degli estremi, questa in primo luogo è manifest:ma indicazione di fatto dell'arm:ca natura in genere del mezzo a cui sono dedotte, perche se dalla proporzione geom:ca discreta 30 : 35 : 36 : 42 si tolga il mezzo aritm:co 36 e rimanga il mezzo armonico 35, la proporzione è determinata arm:ca in 42 : 35 : 30 in forza del mezzo, che determina le due differenze $\frac{42:35:30}{differenze \quad 7: 5:}$ in ragione uguale agli estremi. Se dunque si

deducono le stesse differenze dalla circonferenza di Ceulen posta mezzo de'i due quadrati 25 : 36, bensì relativi alla proporzione congiunta 25 : 30 : 35 : 36 : 42, in cui si contiene la discreta 30 : 35 : 36 : 42; ma nella loro origine mezzi aritmetici: 25 della sesquialtera geom:ca discreta 20 : 24 : 25 : 30; e 36 della super2parz: 5 geom:ca disc: 30 : 35 : 36 : 42; deve conchiudersi armonica in grado eminente la natura di quel mezzo, che converte in armonica natura le differenze di due estremi originalm:te mezzi aritmetici. Ma in questo fatto vi è molto di più. Si osservi che le differenze dedotte da i due quadrati sono inverse nello stesso modo, e senso, in cui dati gli estremi 30 : 42, e interpostovi il mezzo contrarm:co 37, le differenze 30:37:42 sono inversam:te uguali alle armoniche dedotte da i stessi estremi co'l mezzo differenze 7: 5

armonico 35 in $30:35:42$; e però in questo fatto sono bensì costituite da un tal mezzo
 differenze $5:7$

le armoniche differenze in genere, ma poi si trovano convertite, e determinate in specie alla
 contrarm:ca natura. Si dimostra la cagione, e l'effetto. Dati per serie i numeri quadrati $1:4$
 $:9:16:25:36$ etc. , è fatto che sommando i due primi $1:4$, la somma 5 duplicata in 10 ,
 è mezzo contrarm:co della dupla geom:ca disc: $6:8:9:10:12$. Sommando i due $4:9$, la
 somma 13 duplicata in 26 è mezzo contrarm:co della sesquialtera geom:ca disc: $20:24:25:26$
 $:30$. Sommando i due $9:16$, la somma 25 duplicata in 50 è mezzo contrarm:co della sesqui3za
 geom:ca disc: $42:48:49:50:56$ etc.: Sommando dunque i due $25:36$, la somma 61 duplicata
 in 122 deve dare un mezzo contrarmonico. Di fatto è così, perché data la forma $10:11:12$,

per la formola $\frac{10 \times 11}{11 \times 12}$ si ha il mezzo contrarm:co 122 . Adunque la contrarm:ca
 $\frac{110:120:121:122:132}$

origine, e cagione è nella somma de' i due quadrati $25:36$ convertiti da mezzi in estremi. Ma
 la risoluzione dell'analisi si trova nella forma $10:11:12$, in cui l'azione principale è del mezzo
 11 ; e questo è il termine risultato dalla somma de' i termini della tripla armonica $6:3:2$, come
 si è già dimostrato molto prima. Adunque si trova in effetto la inseparabile original relazione di
 questo termine 11 nell'assegnazione della circonferenza di Ceulen come mezzo de' i due quadrati
 $25:36$, benché in niun modo appaia il termine suddetto, né positivo, né deduttivo. Questo è
 ciò che in secondo luogo si propone al riflesso de' Professori della scienza commune delle ragioni,
 e proporzioni, acciò tocchino con le loro mani la mancanza di nozioni essenziali, nella quale si
 trova la loro scienza, e la essenziale abbondanza dell'arm:ca scienza, ch'è quella di Platone. Ma
 qui da i Professori si farà la istanza, come vi entri la circonferenza di Ceulen, tra i due quadrati,
 $25:36$, la qual è termine inseparabil:te relativo o al diametro, o a' i due quadrati, inscritto,
 e circoscritto; e però fin qui non si vede che pur arbitrio di posizione. È ben tutt'altro [p. 48]
 che arbitrio, risponde l'autore: è fatto positivo, e reale, perché il termine relativo alla suddetta
 circonferenza è il primo 20 della sesquialtera geom:ca discreta $20:24:25:30$, di cui il quadrato
 25 è il mezzo aritmetico. Si aggiungano al termine 20 quanti zero si sono aggiunti a i quadrati
 $25:36$, e sarà il quadrato inscritto 20000000 etc: al cerchio circoscritto 31415926 etc.: Piu. La
 circonferenza di Ceulen come tripla al diametro 1000000 etc. , lo supera della ragione 3000000
 etc. , 3141592 etc.: Il termine 3000000 è il primo della super2 parz: 5 geom:ca discreta $30:35$
 $:36:42$. Più ancora. Al diametro di Ceulen è 1000000 etc.: Il primo termine della forma $10:$
 $11:12$, da cui si è dedotto il mezzo contrarm:co 122 , è 10 . Ciò eccede il bisogno.

Ma qui nuovam:te insisteranno i suddetti Professori sulla molteplicità de i diametri, non
 sapendosi ancora qual sia il determinato da questa scienza, da cui si è assunto nel principio
 quello di Archimede di 7 a 22 ; nel progresso quello di Mezio di 113 a 355 , ed ora quello di Ceulen
 di 100000 etc: a 314159 etc.: Da questa molteplicità, ed incostanza non può formarsi scienza
 veruna, bensì resta distrutta qualunque scienza. In oltre l'assunto principale proposto da questa
 scienza, diametralm:te opposto alle dimostrazioni, e nozioni comuni, si è la circonferenza somma
 della tripla armonica $6:3:2$, e però di quantità razionale specificata dal termine 11 . Questo
 termine, che come parte aliquota si trova reale in 22 circonferenza di Archimede, non si trova
 reale in 355 circonferenza di Mezio, non si vede in 314159 etc: circonferenza di Ceulen, e se anche
 vi fosse, il diametro relativo determinato da 10 non ha né misura, né relazione alcuna, che sia
 comune al diametro 7 di Archimede. Alla prova di un tal assunto che rispetto alle nozioni comuni
 è un'assurdo, troppo più si richiede sì di forza di dimostrazioni, che di chiarezza di nozioni.

È giust:ma la insistenza, ed anzi se si riflette alla novità è difficoltà dell'argomento, non vi

è insistenza che basti. Perciò appunto si premettono i fatti, i quali non ammettendo risposta in contrario, pongono in diffidenza le impressioni ricevute da studj, e principi diversi. Sia dunque secondo fatto il seguente.

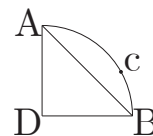
L'autore leggendo le riflessioni intorno alla quadratura del cerchio dell'erudit:mo Sig:re Giuseppe Marzucco, trovò a carte 164, il riscontro della dimostrazione di Newton con quella di Ceulen, e rilevò con maraviglia, e sorpresa che accordandosi le due dimostrazioni fin' alla cifra ossia nota quindicesima, nella sedicesima, e diecisettesima cominciano, e prosiegono a discordare. Due vere dimostrazioni della stessa proposizione per qualunque diverso metodo instituite devono incontrarsi in punto matematico, e al più dove si tratta d'incommensurabilità che non può consumarsi, discorderanno tra loro nella ultima cifra della risoluzione. Ma le cifre di Ceulen arrivano fin' a trenta sei, cosicché le due suddette sedicesima, e diecisettesima non arrivano nemmeno alla metà, che si ha dunque da conchiudere? Se a ciò si aggiunga quanto in fine dell'opera espone il suddetto erudit:mo Autore, ed è che il vivente dott:mo Eulero non si mostra vivam:te persuaso della dimostrazione di Newton; non accordandosi tra loro su questo punto i due più insigni soggetti del secolo, in buona coscienza qual partito è da prendersi da chi rispetto al proprio sistema non ha verun bisogno di esporsi alla quanto improba, altrettanto inutile fatica di cercare qual delle due dimostrazioni sia la vera, quale la falsa? Si conchiudano dunque due cose di fatto unicam:te vere nel caso presente. Prima: che si troverà verità di fatto il niun bisogno dell'autore di accertarsi qual delle due suddette dimostrazioni sia la vera, e ciò rispetto all'autore. Seconda: ch'è verità di fatto la discordanza su questo punto di tali soggetti, e ciò rispetto alle altrui prevenzioni di scienza, di studio, e di nomi luminosi. Ragion di fatto costringe chiunque di sana mente a sospender il giudizio, e a dover diffidare di ciò che supponeva dimostrativam:te sicuro. La domanda è giusta, e Platone è pieno di testi che affermano necessaria una tal disposizione, e che ributtano chi non la possiede per natura, e chi non vuole averla per impegno. Adunque per soprassedere al giudizio di prevenzione dell' assurdo che appare nel proporsi razionale la linea circolare, irrazionale la linea retta, basti per ora la storia del fatto suddetto finché a suo luogo si torni al fatto, ed alla vera scienza del fatto. Presentem:te giova incontrare la proposta difficoltà su i diametri denominati da termini diversi; e a questo effetto si prendono i due diametri come estremi: 7 di Archimede della massima imperfezione: di Ceulen della massima perfezione; supponendosi che al termine 10 si aggiungano nella operazione quanti zero si vogliano ad arbitrio. Né si creda licenza dell'autore l'uso di questo termine nel suo principio decimale: si troverà a suo luogo non uso di arbitrio, ma necessità di capo di scienza.

Tre sono nella scienza delle proporzioni i mezzi contrarmonici tra sé relativi di principio, e di natura; 5 della tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 5 : 6$, e questo è principio, perché il suo duplo è 10 primo termine decimale; 10 della dupla geom:ca discreta $6 : 8 : 9 : 10 : 12$, la quale si congiunge con la tripla geom:ca disc: 3; nella proporzione congiunta $4 : 6 : 8 : 9 : 12$, e di questa il termine 10 è mezzo contrarm:co comune; 50 della sesquiterza geom:ca discreta $42 : 48 : 49 : 50 : 56$. Indi è che 5 mezzo contrarm:co della tripla moltiplicato per 10 mezzo contrarm:co della dupla produce 50 mezzo contrarm:co della sesquiterza, e che sommati i tre termini $5 : 10 : 50$, il risultato 65 è mezzo contrarm:co della super2parz: 7 geom:ca discreta $56 : 63 : 64 : 65 : 72$, la qual porzione ha la sua forma in $7 : 8 : 9$ per la formola $\frac{7 \times 8}{8 \times 9}$. Vi sono altri mezzi

contrarm:ci divisibili per 5, ma questo non è l'oggetto principale dell'assegnazione de' i suddetti: si assegnano come tra loro necessariam:te relativi, e congiunti nella essenza della proporzione $4 : 6 : 8 : 9 : 10 : 12$, in cui i due mezzi contrarm:ci originali 5 della tripla, 10 della dupla

si congiungono in 10 mezzo contrarm:co comune, e di cui rimanendo centro di proporzione la sesquiterza 6 : 8, perche $6 \times 8 = 48 = 4 \times 12 = 48$, della sesquiterza è mezzo contrarm:co 50 in 42 : 48 : 49 : 50 : 56. Questo è ciò che si propone come sostanza ed essenza de' mezzi contrarm:ci fondati in quella stessa proporzione, da cui (si noti distintam:te) si è dimostrativam:te dedotta a carte 38 la particella del testo di Platone, la quale ha i termini del numero al numero come 256 a 243. Ora si vuol dimostrare che i due diametri: 7 di Archimede, 10 come origine decimale del diametro di Ceulen 1000000 etc: sono essenzialm:te congiunti nella suddetta proporzione, e lo sono in forza de' i due mezzi originali contrarm:ci, 5 della tripla: 10 della dupla. La dimostrazione è patente ne' i due numeri impari 5 : 7 : già dimostrati radici duple nella loro divisione: di 5 in $2 \times 3 = 6$: di 7 in $3 \times 4 = 12$; e dalla loro divisione avendosi i tre termini formali 2 : 3 : 4, da questi si ha per la solita formola la dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 10 : 12, di cui 10 è il mezzo contrarm:co comune alla proporzione congiunta 4 : 6 : 8 : 9 : 10 : 12, la quale rispetto agli estremi tripli è in origine 2 : 3 : 4 : 5 : 6, di cui 5 è il mezzo contrarm:co subduplo a 10. Se dunque nelle radici dedotte dalle forme delle ragioni si trova 7 radice dupla tra 5 : 10 : estremi dupli, è patente la essenzial congiunzione di 7 mezzo con 5 : 10 estremi. Ma nella vera scienza delle ragioni, e proporzioni si trovano mezzi contrarmonici 5 : 10. Adunque 7, ch'è il loro mezzo duplo radicale di ragione, non può non esser della stessa contrarm:ca natura. Ma 7 è diametro di Archimede: 10 è diametro decimale di Ceulen. Adunque sono tra loro essenzialm:te congiunti: in genere nella contrarm:ca natura: in specie, e precisione in ragion dupla radicale di ragione; che vuol dire: nel principio primo a priori di tutte le possibili semplici ragioni radicali, da cui è proceduto il ver:mo assioma dell' antich:ma sana Filosofia: natura in duplo consistita. Indi è che nel quadrante AcB ch'è $\frac{1}{4}$ del cerchio, e nel triangolo ADB ch'è $\frac{1}{4}$ del quadrato inscritto, si trovano comuni i punti ADB delle radici duple AB, AD.

Indi è che delle stesse radici duple 5 : 7 formando il progresso fin' al quarto grado, e alle med:me sommando, o sottraendo la ragione 9 : 10 : formata da i due mezzi, aritm:co 9, contrarm:co 10 della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 10 : 12, s'incontri precisam:te la ragione di Archimede tra il cerchio, e il quadrato. Si spiega. Quanto è dimostrativam:te vero che nella scienza delle ragioni, e proporzioni la sesquialtera 2 : 3, la sesquiterza 3 : 4 formano la dupla con la loro somma $\frac{2}{3} : \frac{3}{4}$, e però è dimostrativam:te vero che, applicate le due forme al diametro del cerchio nel modo altrove spiegato si dimostrano le radici duple lineari con i due diametri denominati da 5 : 7; altrettanto è dimostrativam:te vero, che nella material quantità de' i due numeri 5 : 7 : non vi sono le radici duple se non che per approssimazione. Moltiplicando $5 \times 5 = 25$; $7 \times 7 = 49$, gli estremi 25, 49, non sono dupli, e però moltiplicati gli estremi dupli $5 \times 10 = 50$; moltiplicato il mezzo $7 \times 7 = 49$, manca 49 di $\frac{1}{50}$. Ma poi queste radici, che nel loro primo grado, ossia posizione, sono 5 : 7 : 10, per gradi indefiniti si vanno approssimando sempre più alla vera quantità con la seguente operazione per somma.



I :	5 :	7 :	10	
		5 :	7 :	
II :		12 :	17 :	24
		12 :	17 :	
III :		29 :	41 :	58
		29 :	41 :	58
IV :		70 :	99 :	140 etc:

Applicate queste radici ad una retta linea: A—CD—B

Supposto AB 10 :	AC 5 :	AD 7,	manca il mezzo AD di $\frac{1}{50}$
Supposto AB 24 :	AC 12 :	AD 17,	eccede il mezzo AD di $\frac{1}{280}$
Supposto AB 58 :	AC 29 :	AD 41,	manca il mezzo AD di $\frac{1}{1682}$
Supposto AB 140 :	AC 70 :	AD 99,	eccede il mezzo AD di $\frac{1}{9600}$

Queste radici co'l loro uso dall'autore sono state proposte, e spiegate nel suo trattato di musica, e qui si rinnova la loro esposizione, e spiegazione. Se allora non si è curato da Matem:ci l'autore come suonator di violino, si curi presentem:te come interprete di Platone. Si osservi in questa dottrina delle radici quanto mai sia diversa l'apparenza dalla sostanza, e quanto mai si richiega di più anche nel genere dimostrativo comune per accertar una proposizione. Chi sarà de matem:ci che francam:te non asserisca molto più esatta la radice del quarto grado nel mezzo AD 99 della radice del primo grado nel mezzo AD 7? Asserirà il vero rispetto alla quantità materiale del numero ch'è la superficie; ma dirà il falso rispetto alla quantità formale del centro del numero, ch'è la ragione, perche rispetto al centro le radici di ciascun grado sono perfette in punto matem:co di ragione. Si dimostra. Nel primo grado 5 : 7 : numeri impari sono composti: 5 da 2 : 3; 7 da 3 : 4. Ma $2 \times 3 = 6$; $3 \times 4 = 12$. Adunque etc.:. Nel secondo grado si trova 12 numero pari: 17 numero impari. Si divida il pari per metà in 6: l'impari con la solita legge in 8 : 9. Ma $6 \times 6 = 36$; $8 \times 9 = 72$. Adunque etc.:. Nel terzo grado 29 : 41 : numeri impari si dividano 29 in 14 : 15; e 41 in 20 : 21. Ma $14 \times 15 = 210$; $20 \times 21 = 420$. Adunque etc.:. Nel quarto grado si trova 70 numero pari: 99 numero impari. Si divida il pari per metà in 35: l'impari in 49 : 50. Ma $35 \times 35 = 1225$; $49 \times 50 = 2450$. Adunque etc: in progressione indefinita. Co'l metodo già esposto applicate al diametro le suddette radici, si avrà dal cerchio rispettivo la quantità lineare de seni geometricam:te determinati alle radici duple.

Questa, e non altra è la mente di Pitagora, e di Platone su i numeri impari, e pari, da essi intesi capo di scienza, e fondamento dell'Aritm:ca de' Filosofi, ma da' Filosofi moderni dispreggiati, perche non intesi giammai. Qui, e non altrove, sta di casa la vera scienza delle ragioni, e proporzioni, e in questa si vede a lume di meriggio la vera origine della geom:ca quantità lineare, perche indefinito essendo il progresso di tali radici: siano di qualsivoglia ragione assegnata nel suo principio primo, da questa scienza nel progresso delle radici di ragione si dimostra la indefinita serie delle ragioni producenti le lineari geom:che radici, e l'ordine del loro progresso, che dimostrando il legame della serie forma una parte integrale della scienza. Qui troppo vi è da dire per l'autore; ma il qui esposto, e dimostrato basta, e avanza per far avveduto chiunque sia, che alle comuni scienze dimostrative manca il fondamento principale a priori, e che la loro facoltà non si estende che a posteriori.

Premessa necessariam:te la esposizione, spiegazione, e facoltà delle radici di questa scienza, si torna alla proposizione; ed è che dalle radici duple 5 : 7 : formando il progresso fino al quarto grado delle radici 70 : 99, e alle med:me sommando, o sottraendo la ragione 9 : 10 : formata da i due mezzi, aritm:co 9, contrarm:co 10, della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 10 : 12, s'incontra nel quarto grado la ragione di Archimede tra il cerchio, ed il quadrato. Ecco il fatto, e la prova.

<p>I</p> <table border="0"> <tr> <td></td> <td>somma</td> <td></td> <td>sottra</td> </tr> <tr> <td></td> <td>9 : 10</td> <td></td> <td>9 X 10</td> </tr> <tr> <td></td> <td>5 : 7</td> <td></td> <td>7 X 5</td> </tr> <tr> <td>5 :</td> <td>45 : 70</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>9 X 14</td> <td></td> <td>63 : 50</td> </tr> <tr> <td></td> <td>11 X 7</td> <td></td> <td>11 : 14</td> </tr> <tr> <td></td> <td>99 : 98</td> <td>7 :</td> <td>693 : 700</td> </tr> <tr> <td></td> <td>cresce</td> <td></td> <td>99 : 100</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>manca</td> </tr> </table>		somma		sottra		9 : 10		9 X 10		5 : 7		7 X 5	5 :	45 : 70				9 X 14		63 : 50		11 X 7		11 : 14		99 : 98	7 :	693 : 700		cresce		99 : 100				manca	<p>II</p> <table border="0"> <tr> <td></td> <td>somma</td> <td></td> <td>sottra</td> </tr> <tr> <td></td> <td>9 : 10</td> <td></td> <td>9 X 10</td> </tr> <tr> <td></td> <td>12 : 17</td> <td></td> <td>17 X 12</td> </tr> <tr> <td></td> <td>108 : 170</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td></td> <td>11 X 7</td> <td></td> <td>153 X 120</td> </tr> <tr> <td></td> <td>1188 : 1190</td> <td></td> <td>11 X 14</td> </tr> <tr> <td></td> <td>manca</td> <td></td> <td>1683 : 1680</td> </tr> <tr> <td></td> <td></td> <td></td> <td>cresce</td> </tr> </table>		somma		sottra		9 : 10		9 X 10		12 : 17		17 X 12		108 : 170				11 X 7		153 X 120		1188 : 1190		11 X 14		manca		1683 : 1680				cresce
	somma		sottra																																																																		
	9 : 10		9 X 10																																																																		
	5 : 7		7 X 5																																																																		
5 :	45 : 70																																																																				
	9 X 14		63 : 50																																																																		
	11 X 7		11 : 14																																																																		
	99 : 98	7 :	693 : 700																																																																		
	cresce		99 : 100																																																																		
			manca																																																																		
	somma		sottra																																																																		
	9 : 10		9 X 10																																																																		
	12 : 17		17 X 12																																																																		
	108 : 170																																																																				
	11 X 7		153 X 120																																																																		
	1188 : 1190		11 X 14																																																																		
	manca		1683 : 1680																																																																		
			cresce																																																																		

<p>III</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">somma</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9 : 10</td><td style="text-align: center;">29 : 41</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">261 X 410</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">11 X 7</td><td></td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">2871 : cresce</td><td style="text-align: center;">2870</td></tr> </table>	somma		9 : 10	29 : 41	-----		261 X 410		11 X 7		-----		2871 : cresce	2870	<p>IV</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">somma</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9 : 10</td><td style="text-align: center;">70 : 99</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">630 X 990</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">11 X 7</td><td></td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">6930 : eguale</td><td style="text-align: center;">6930</td></tr> </table>	somma		9 : 10	70 : 99	-----		630 X 990		11 X 7		-----		6930 : eguale	6930
somma																													
9 : 10	29 : 41																												

261 X 410																													
11 X 7																													

2871 : cresce	2870																												
somma																													
9 : 10	70 : 99																												

630 X 990																													
11 X 7																													

6930 : eguale	6930																												
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">sottra</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9 X 10</td><td style="text-align: center;">41 X 29</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">369 X 290</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">11 X 14</td><td></td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">4059 : manca</td><td style="text-align: center;">4060</td></tr> </table>	sottra		9 X 10	41 X 29	-----		369 X 290		11 X 14		-----		4059 : manca	4060	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">sottra</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9 X 10</td><td style="text-align: center;">99 X 70</td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">891 X 700</td><td></td></tr> <tr><td style="text-align: center;">11 X 14</td><td></td></tr> <tr><td colspan="2" style="text-align: center;">-----</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">9801 : cresce</td><td style="text-align: center;">9800</td></tr> </table>	sottra		9 X 10	99 X 70	-----		891 X 700		11 X 14		-----		9801 : cresce	9800
sottra																													
9 X 10	41 X 29																												

369 X 290																													
11 X 14																													

4059 : manca	4060																												
sottra																													
9 X 10	99 X 70																												

891 X 700																													
11 X 14																													

9801 : cresce	9800																												

Questa operazione ch'è una prova di fatto, a due fini principali è diretta. Primo, acciò si [p. 51] rilevi l'influsso delle radici duple (intese principio assolutam:te primo delle ragioni, e si noti) tra le due figure, cerchio e quadrato, in $\frac{1}{4}$ delle quali si trovano i punti, e linee comuni delle suddette radici. Indi si rende sempre più chiara la formazione, e conversione del cerchio dentro la sestupla, perche se le radici duple sono principio assolutam:te primo delle ragioni, se queste radici sono comuni al cerchio, e al quadrato; e se la sestupla finisce precisam:te in quella proporzione, i di cui estremi, 30 : 42 sono le radici duple 5 : 7, e i di cui mezzi 35 : 36 formano il centro delle radici di 30 : 42 = 5 : 7; si fa piucch'evidente la circolare natura, che incominciando, e terminando nelle radici duple, necessariam:te deve formare perfett:ma unità di figura. Qui torni a memoria quanto si è dimostrato a carte 34 della differenza 2485 : 2486, che risulta dalla comparazione delle due posizioni: di Archimede 7 : 22; di Mezio 113 : 355. Si prendano le ultime radici duple 70 : 99, dividendo 70 numero pari in 35; 99 impari in 49 : 50. Indi 35 x 35 = 1225; 49 x 50 = 2450. A questo termine duplo 2450 si riferisca il termine della circonferenza di Mezio 2485, e si troveranno i due termini 2450 : 2485 = 70 : 71. Ma 35 : 36 sono i due mezzi, arit:co, aritm:co della ultima proporzione 30 : 35 : 36 : 42, e duplicati i mezzi 35 : 36 in 70 : 72, si trova mezzo aritm:co 71 (indi 35 x 71 = 2485); il secondo estremo 42 della ultima proporzione si trova ugualm:te primo estremo della sesquiterza geom:ca discreta 42 : 48 : 49 : 50 : 56, di cui 49 è il mezzo aritm:co, 50 il mezzo contrarm:co, da'i quali si è avuto il prodotto 2450. Ecco una nuova, e più evidente analisi della suddetta differenza 2485 : 2486 ridotta al suo principio primo delle radici duple 70 : 99 del quarto grado, alle quali con la somma della ragione 9 : 10 si è trovata uguale la posizione di Archimede.

Ma qui vi è luogo ad una istanza, ed è per qual cagione si adopri la ragione 9 : 10, come formata da i due mezzi aritm:co 9, contrarm:co 10 della dupla geom:ca discreta, e sommata alle radici duple? Si risponde che si adopra per quella stessa cagione, per cui sommando alle radici sesquialtere la ragione 25 : 26, formata da'i due mezzi, aritm:co 25, contrarm:co 26 della sesquialtera geom:ca discreta 20 : 24 : 25 : 26 : 30, il risultato è più prossimo alla ragione del cerchio iscritto, e quadrato circoscritto di quello sia la ragione di Archimede 11 : 14. Si dimostra. Prime radici sesquialtere di ragione sono i due numeri impari 9 : 11, perche divisi, 9 in 4 : 5; 11 in 5 : 6, e 4 x 5 = 20; 5 x 6 = 30. Ma 20 : 30 = 2 : 3. Adunque etc.:. Indi da 4 : 5

: 6 : forma sesquialtera si ha per la formola $\frac{4 \times 5}{5 \times 6} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. Sesquialtera geom:ca discreta.

Indi sommando i due mezzi aritm:co, aritm:co $\frac{24}{25}$, e duplicando gli estremi 20 in 40, 30 in 60, si trova il mezzo 49 prossimo al mezzo geom:co in differenza di unità: 49 x 49 = 2401, 40 x 60 =

2400. Indi moltiplicando maggiorm:te le radici per la formola $\frac{40 \times 49}{49 \times 60} = \frac{1960}{2940}$, sommando

i due mezzi $\frac{2401}{4801}$, e duplicando gli estremi 1960 : 2940 in 3920 : 5880, si trova il mezzo 4801 x 4801 = 23049601, e gli estremi 3920 x 5880 = 33049600. Alle radici sesquialtere suddette 3920

: 4801, sommando la ragione $\frac{3920}{25}$ $\frac{4801}{26}$, e comparando il risultato alla posizione di Mezio $\frac{98000}{44296000}$ $\frac{124826}{44313230}$

, per la differenza 1723 risulta la ragione differenziale $\frac{2570}{2571} : \frac{32}{37}$ in circa. Ma si

è altrove dimostrata tra 2485 : 2486 la differenza delle due posizioni di Archimede, e di Mezio; e la ragione 2570 : 2571 è minore della ragione 2485 : 2486. È dunque più prossima al vero la prima della seconda. Ma sì la operazione delle radici duple con la somma della ragione 9 : 10; sì la operazione delle radici sesquialtere con la somma della ragione 25 : 26 è identificam:te la stessa in precisione di tutt'i termini rispettivi delle due proporzioni geom:che discrete. Adunque si trova dimostrativam:te vera la tendenza di questa operazione alla natura circolare sì nella du-
pla, che nella sesquialtera. Ma la dupla, e la sesquialtera con la somma formano la tripla $\frac{1}{2} : \frac{2}{3}$;
e nella essenza della tripla si è dimostrata la natura circolare. Adunque in questa operazione [p. 52]

si trova dimostrativam:te vero nelle parti della tripla ciò che si è trovato dimostrativam:te vero nel suo tutto. Realm:te in questa operazione vi è quel tal capo di scienza che se si ommette, si tradisce la scienza; ma se si espone, confonde certam:te l'intelletto di chi non è avvezzo ad altre combinazioni, che a quelle delle scienze comuni. Ma qui la sostanza della cosa essendo appunto la esposizione della scienza, è chiara la necessità di dover esporre quanto in questa operazione vi è di vero, benché profondo; nulla curando di chi non vorrà curare d'intenderlo per risparmiar fatica. Purificate le radici sesquialtere co'l metodo prescritto fin' a qual grado di esattezza si vuole; sommata alle medesime la ragione 25 : 26, e comparato il risultato alla posizione di Ceulero del quadrato circoscritto, e cerchio iscritto, presa con quante cifre piacciono ad arbitrio, la ragione differenziale $\frac{2570}{2571} : \frac{32}{37}$ in circa, si cambia in $\frac{2571}{2572}$, e fazioni da trascurarsi, perche adoperando anche tutte le cifre 36 di Ceulen con altrettante delle radici sesquialtere, alle quali co'l metodo prescritto facilm:te si perviene, la raggione differenziale 2571 : 2572 non si cambierà mai negl'intieri. La differenza tra le due posizioni di Mezio, e di Archimede si è già rilevata nelli due termini: 2485 di Mezio : 2486 di Archimede, e si è rilevato il termine di Mezio 2485 al termine 2450 prodotto da $49 \times 50 = 2450$ in ragione uguale a 70 : 71 (indi $35 \times 71 = 2485$). Perciò il relativo di 35 di mezzo armonico essendo 36 mezzo aritmetico degli estremi $30 : 42 = 5 : 7$, dalla multiplica dei quali si ha $35 \times 36 = 1260$, come $30 \times 42 = 1260$, il duplo di questo prodotto ch'è 2520, è il relativo a 2450 come = 35 : 36, tra i quali si trova 2485 mezzo aritm:co

2450 : 2485 : 2520. A questi tre termini si aggiungano come estremi: 2400, ch'è il differ: uguali 35 : 35 prodotto di $40 \times 60 = 2400$, ed egualm:te di $48 \times 50 = 2400$ (in origine $40 : 60 = 20 : 30$; e $48 : 50 = 24 : 25$; tutto insieme $20 : 24 : 25 : 30$ sesquialtera geom:ca discreta) e la ragione differenziale $\frac{2571}{2572}$, la quale essendo necessariam:te in due termini, si sommino in un solo $\frac{2571}{5143}$

, duplicando a ragguaglio gli altri 2400 : 2450 : 2485 : 2520 in 4800 : 4900 : 4976 : 5040. A questi aggiunto il termine avutosi dalla somma 5143, si avranno i cinque termini 4800 : 4900 : 4970 : 5040 : 5143. Si esaminino le ragioni tutte, nelle quali si trova l'ultimo termine 5143 con ciascuno de'i termini suddetti, come sistematicam:te dimostrati, e dedotti. Gli estremi 4800 :

5143 sono affatto prossimi alla ragione 14 : 15 : in differenza razionale di $\frac{4800}{72000} \frac{5143}{72002}$. I

due 4900 : 5143 alla ragione 21 : 21 in differenza di $\frac{2571}{2572}$. (qui si noti la ragione differenziale

$\frac{2571}{2572}$: ch'è la risultata da Ceulen, è sommata in 5143) $\frac{4900}{4 : 102900} \frac{5143}{4 : 102860}$. I 24970 :

5143 alla ragione 57 : 59 in differenza di $\frac{3710}{3711} : \frac{61}{79}$. Questa ragione 57 : 59 è radicale sesqui14:ma, perche divisi i due numeri impari: 57 in 28, 29: e 59 in 29 : 30, e moltiplicati $28 \times 29 = 812$; $29 \times 30 = 870$. Ma $812 : 870 = 14 : 15$. Adunque 57 : 59 \surd della ragione 14 : 15. Per evitar la confusione si parlerà poi di ciò che significhi la ragione 14 : 15 nella proporzione 24 : 28 : 29 : 30 : 35. Finalm:te i due termini 5040 : 5143 sono affatto prossimi alla ragione 49 : 50 nella stessa differenza razionale di 35000 : 36001, in cui si sono rilevati i due primi 4880 : 5143,

cioè $\frac{5040}{7 : 252000} : \frac{5143}{7 : 252007}$. Si noti la egualità della differenza ne' i due termini comparati

4800 : 5040 = 20 : 21. Sono dunque le risultate ragioni 14 : 15; 20 : 21; 49 : 50, alle quali non osta in modo veruno la differenza risultata dalla comparazione: sì perche non si assegnerà mai ragione più prossima delle dimostrate, la quale abbia la sua immediata origine dentro il sestuplo confine delle cinque proporzioni geom:che discrete formanti il presente sistema. (49 : 50 ha la sua origine da 24 : 25 mezzi della sesquialtera geom:ca discreta; 57 : 59 ha la sua origine da 28 : 30 mezzi de' i due estremi: 24 mezzo armonico della sesquialtera geom:ca discreta: 35 mezzo armonico della super2parz: 5 geom:ca discreta, e però $24 \times 35 = 840$; $28 \times 30 = 840$): sì perche il termine 5143, a cui si sono comparati gli altri, in questa operazione rappresenta la circonferenza nel senso comune d'incognita quantità irrazionale; non mai nel senso particolare del presente sistema di cognita quantità razionale. Perciò necessariam:te devono trovarsi le sud-dette differenze nelle comparate ragioni finche si arrivi alla posizione reale di questa scienza; [p. 53]

e per ora basta al fondamento della dimostrazione, che ragioni più prossime delle risultate non siano dimostrabili dentro il sestuplo sistema delle ragioni, e proporzioni. Ciò premesso tornino a memoria le radici duple del terzo grado, le quali costituite de' i due numeri impari 29 : 41, si risolvono nella divisione: 29 in 14 : 15; e 41 in 20 : 21; e però $14 \times 15 = 210$; $20 \times 21 = 420$, e $210 : 420 = 1 : 2$. Ecco dunque dimostrate in origine le due ragioni differenziali 14 : 15, 20 : 21 rilevate nella sopra esposta comparazione. Non basta. Analizando la proporzione 14 : 15 : 20 : 21, si trova composta da due intervalli, o siano ragioni indicanti ciò che musicalm:te si chiama semituono, cioè 14 : 15 crescente dal semituono maggiore (il semituono maggiore musicale è tra 15 : 16) : 20 : 21 crescente dal semituono minore (il minore musicale è tra 24 : 25). Sommati questi due intervalli come ragioni $\frac{14 : 15}{280 : 315} : \frac{20 : 21}{315 : 315}$, risulta il tuono sesquiottavo, perche $280 : 315 = 8 : 9$. Ma questo precisam:te forma il centro della dupla geom:ca discreta 6 : 8 : 9 : 12. Adunque si torna al principio duplo nel suo centro. Non basta. Osservando le ragioni componenti la suddetta proporzione 14 : 15 : 20 : 21, gli estremi 14 : 21 sono sesquialteri: i mezzi 15 : 20 sono sesquiterzi. Ma le due ragioni sesquialtera, e sesquiterza formano nella loro somma la dupla $\frac{2 : 3}{3 : 4} : \frac{3 : 4}{6 : 12}$. Adunque si torna al principio duplo ne' i suoi estremi. Non basta. Il primo termine 14 al terzo 20 è = 7 : 10, il secondo 15 al quarto 21 è = 5 : 7. Ecco dunque il principio primo radicale, a cui si riduce la suddetta operazione; ed ecco quelle radici duple di questa scienza 5 : 7 : 10, il di cui mezzo 7, che relativam:te alla idea del mezzo geom:co è imperfetto, perche $7 \times 7 = 49$; $5 \times 10 = 50$, relativam:te alla vera scienza delle ragioni, e proporzioni è perfetto in punto matematico, perche $14 \times 15 = 210$; $20 \times 21 = 420$. Rimane a dimostrarsi la origine della ragione 49 : 50; ma questa è conseguenza, e corollario del già dimostrato, perche le due ragioni 14 : 15, 20 : 21 cambiandosi in differenze costituiscono la dupla geom:ca discreta 35 : 49 : 50 : 70, di cui è centro la ragione differenziale 49 : 50, e di cui sono differenze le due suddette ragioni:

differenze $\frac{35 : 49}{14} : \frac{35 : 50}{15} : \frac{50 : 70}{20} : \frac{49 : 70}{21}$. Di questa proporzione essendo conseguenza le radici duple 70 : 99 : 140, perche sommando i due mezzi $\frac{49}{59} : \frac{59}{99}$, e duplicando gli estremi: 35 in 70:

e 70 in 140, si conchiude la operazione nel quarto grado delle radici duple, in cui si è incontrata la posizione di Archimede con la somma della ragione $9 : 10$ alle radici duple $\frac{70 : 99}{90 : 10} = 7$ $\frac{630 : 990}{}$ quadrato iscr: , 11 cerchio circoscr: etc.:

Riducendo finalm:te tutta la operazione al principio primo radicale, si risolve ne'i quattro termini radicali di numero impari $5 : 7 : 9 : 11$; cioè $5 : 7$ rispetto alle radici duple sommate alla ragione $9 : 10$; e $9 : 11$ rispetto alle radici sesquialtere sommate alla ragione $25 : 26$, dalla congiunzione di queste radici si forma necessariam:te nel mezzo la media ragione $7 : 9$, di cui 7 è termine delle radici duple: 9 delle radici sesquialtere. Indi è che di necessità di principio si trova nella media ragione $7 : 9$: la posizione di Archimede, purificando il termine 7 , che come duplo radicale manca nel prodotto $7 \times 7 = 49$ dal prodotto $5 \times 5 = 25$ della ragione $49 : 50$.

Si moltiplichino per 14 i quattro termini: $\frac{5 : 7 : 9 : 11}{14 : 14 : 14 : 14}$, e il termine 98 ch'è di $7 \times 14 = 98$,

si riduca a 99 , che con 70 forma le radici duple del quarto grado $70 : 99 : 140$, e si troverà la media ragione $99 : 126 = 11 : 14$ di Archimede. Così di necessità di principio primo radicale si torna alla tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 5 : 6$, dividendo i quattro impari: 5 in $2 : 3$; 7 in 3

: 4 ; 9 in $4 : 5$; 11 in $5 : 6$, ch'è lo stesso per somma dei termini: $\frac{2 : 3 : 4 : 5 : 6}{5 : 7 : 9 : 11}$.

Molte cose ripete qui l'autore già esposte al pubblico nel suo trattato di musica, ed una di quelle si è la presente de'i quattro impari numeri $5 : 7 : 9 : 11$. Ma considerato allora da i matematici come musico, che per le sue dimostrazioni non si vale delle loro scienze sublimi, ma unicam:te del semplice aritm:co numero comune, il dotto mondo de'i med:mi ha fermato il giudizio del di lui trattato tra la indifferenza, e il disprezzo. Qui l'autore, cambiando la figura di musico nella figura d'interprete, anzi di scopritore della scienza di Platone ch'egli chiama l'aritmetica de'i Filosofi, in grazia di tal figura crede di meritarsi tutto l'impegno de' Matem:ci alla scoperta della falsità di questa scienza. Si è al punto, in cui o la loro indifferenza, o il loro disprezzo li condanna, perche qui si tratta di troppo, trattandosi di un argomento del maggior peso, e delle più gravi conseguenze di quanti mai siano stati proposti, o possano proporsi. Per altro della impotenza delle comuni scienze dimostrative a convincer la presente di benche minima fallacia, l'autor è sicuro di quella tal sicurezza che di molto sorpassa la comune sicurezza dimo- [p. 54] strativa. È chiaro, perche in questa seconda sicurezza come conseguenza, ed effetto, conviene la scienza presente con le comuni, e in ciò sono uguali; non così nell'antecedente, e nella cagione sempre cognita in questa, sempre incognita in qualunque diversa. Perciò il convincimento prodotto da questa è talm:te superiore al comune, che chi la possiede, benche per ipotesi affatto privo di qualunque nozione delle comuni, risente la propria forza in grado si eminente che nulla stima l'esporsi a prova contro tutto il mat:co mondo, sebben fosse composto di Archimedi, e di Euclidi. Questa dichiarazione diventa qui necessaria all'autore non più come suonator di violino, ma come possessore di questa scienza, di cui rispetto al presente bisogno egli espone quella sola parte, che con giurata verità può dirsi la pura grammatica di questa scienza. Ciò serve di sicura notizia al dotto mondo presente per regolarsi a dovere nel caso affatto strano in cui si tratta di far rivivere dopo migliaia d'anni la massima di tutte le scienze, se si eccettui la sola Teologia rivelata. Per ben regolarsi gli si rendono necessarie le seguenti avvertenze.

I:ma; non risguardi il mezzo di cui si vuol servire la Provvidenza per tal scoperta, e si ricordi, che Deus humilia eligit, ut fortia quaeque confundat. II:a; stia ben lontano dal creder fanatismo, e riscaldamento dell'autore un tal argomento. Oltreche chiunque puo chiarirsi da se stesso co'l fatto da quanto qui trova esposto, e dimostrato, ci vuol poco per andar alla sostanza con l'accertarsi dell'indole dell'autore aborrente per natura da vanità, e da gloria, di cui se fosse

amante, ne ha più del dovere dall'arte sua. Se fosse stato padrone di se stesso, avrebbe rinunciato alla propria vita piuttosto che assumer una tal impresa, da cui null'altro gli è provenuto, e gli proviene che labor, et dolor.

Ma vi è di peggio, ed è che dopo la di lui morte da soggetti maggiori di ogni eccezione si parlerà purtroppo di fatti realmente seguiti senza parità più importanti di quanto è lecito di esporre al pubblico, ma essenzialmente dipendenti da questa scienza. Così l'autore potesse imporre perpetuo silenzio a chi n'è a parte, come si chiama pentito della sua esuberanza di cuore; ma non è più a tempo, ed unicamente spera che dalla onestà di chi n'è consapevole gli sia risparmiata in vita la confusione di esser scoperto. Non si stupisce più della necessità del pitagorico silenzio: l'ha imparata a proprie spese. Forza Superiore non lo conduce, lo strascina a questa pubblica comparsa; e per se stesso si appartarebbe piucche di fretta dal commercio umano sicche se ne perdesse il nome, non che la persona. È dunque impossibile che un uomo in tal situazione sia capace di riscaldamento. III:a, l'autor è vecchio oltre gli anni settanta. Se la Provvidenza disponga che il dottomondo creda utile, e necessario il risorgimento di questa scienza, non vi è tempo da perdere. Sia sollecitamente eccitato l'autore a consumar la impresa da chi fa autorità nella rispettabile classe de' Fisico matematici. Questo è l'unico modo di spinger l'autore innanzi morte alla massima fatica ulteriore, che per se pieno d'anni, e di fatiche non ha coraggio d'incontrare. IV:o; può nascer facilmente un' equivoco ne' dotti più profondi, ed è di rilevar, e conchiudere che quanto qui troveranno esposto di questa scienza, consista nelle affezioni, e proprietà dell'aritmetico numero comune. Se così conchiudono, gli si accorda pienamente dall'autore la conchiusione; ma non si fermino qui: seguitino a considerare attentamente tre cose. Prima, che le affezioni, e proprietà più importanti fin qui esposte arrivano ad essi certamente nuove, e che altrettanto nuove, e affatto a loro incognite gli arriveranno quelle che rimangono da esporsi. Seconda; che queste servono di puro fondamento materiale alla scienza presente, il di cui fondamento formale (come qui veggono, e toccano con mano) consiste nelle ragioni, e proporzioni tra loro congiunte in perpetuo legame di rapporti, cosicche qualsisia ragione, o proporzione disgiunta in questa scienza nulla significa, né forma sistema. Questa è la diversità sostanziale tra la scienza comune delle ragioni, e proporzioni, e la scienza presente. In quella ciascuna ragione, o proporzione può dividersi dall'altra, e far classe da se stessa: in questa è affatto impossibile, poicche non solamente devono trovarsi tra loro congiunte sicche l'una sia prova dell'altra, e tutte insieme formino la stessa prova; ma inoltre tutte insieme devono risolversi nel suo principio affatto primo, ch'è la massima prova universale; senza di cui a nulla serve qualunque prova particolare. Sa ben:mo l'autore (lo sa a suo costo) che una scienza si fatta porta seco un tal inviluppo di cose, che sopraffa la mente umana, cosicche pochi sono i talenti che possono arrivare alla sua total comprensione. Questa verità non può, ne deve nascondersi. Ma poi non deve imputarsi la somma difficoltà di questa scienza all'autore, come troppo ingiustamente è seguito nel di lui trattato di musica: vuole anzi giustizia che si ringrazi cordialmente il Divino Autore che di tanto dono ha voluto far degno il genere umano. Se poi non ha proporzionato l'intelletto di tutti alla capacità di tal dono, cresce altrettanto il debito verso Dio di chi se ne trova fornito al bisogno, ed altrettanto cresce il merito di questa scienza costituita da Dio nella impossibilità di esser resa comune. Ma non per questo si deve sprezzare (cosa purtroppo solita) da chi non la intende. La mancanza del grado di talento necessario per capirla non è colpa di chiunque sia: è bensì colpa insopportabile di chi si presume capace più di quello è in fatto, e non vuol misurare le sue forze con altra misura, che della stima di se stesso, e del disprezzo altrui. Terza, che Platone chiama il numero un dono divino, e però è da veder il primo luogo se la di lui autorità sia fondata nel vero, o nel falso. Ciò è ben facile da ottenersi da quel tanto che l'autor espone in questa opera sua, in cui con fatti positivi, e reali, e con autentiche dimostrazioni si

verifica l'autorità del di lui testo, poicche qui co'l solo numero si arriva a dimostrare ciò che non si è mai potuto ottenere da verun'altra scienza dimostrativa. Supposto questo primo fondamento di verità deve in secondo luogo indagarsi in che precisam:te consista la divinità di questo dono, come cosa superiore a qualunque idea di scienza puram:te umana. Il testo di Platone indica non tanto il dono come uno di que' beni in genere, i quali tutti sono doni divini, quanto il carattere di questo dono come distinto dagli altri per eccellenza talm:te singolare, che deve separarsi dalla classe di quelle cose umane che si riconoscono beni, e doni divini; e questo è il vero senso del testo di Platone. Ma qui null'altro si deve rispondere se non che sù questo punto Platone ha parlato ottimam:te da Filosofo metafisico, divinam:te da Filosofo morale, dove ha detto che all'acquisto di si fatta scienza si richiede l'intelletto profundam:te capace, l'animo religiosam:te disposto perch'è più sapienza che scienza. A quanto ha detto un Gentile, né di più, né di meglio può aggiunger un cristiano. Da questo deducano i Dotti più profondi che oltre le affezioni, e proprietà di fondamento materiale ch'è il numero; oltre le ragioni, e proporzioni di fondamento formale ch'è ne'i rapporti, e nel loro legame; che quanto non si è detto ancora, ma si dirà a suo luogo de'i numeri come segni reali di specifiche nature, il che appartiene al numero come quale di natura, e non più a quelle affezioni, e proprietà che appartengono al numero come quanto di ragione; oltre tutto ciò vi è in questa scienza qualche altra cosa fondamentale di maggior eccellenza, e significazione. Credano all'autore anche troppo sincero; e se liberi dal pregiudicio contratto dal possesso di quelle scienze che li rende distinti nella loro rispettabil:ma classe, ma ch'essi credono le più sublimi quando realm:te no'l sono, si profundaranno nello studio di questa scienza, non risparmiando fatica per intenderla nel suo fondo, avranno motivo di benedire la loro fatica, e la fede prestata all'autore. Fin qui l' autor cristiano ha parlato a i Filosofi cristiani con tal verità, e sincerità di cuore, che senza timor alcuno se ne fa responsabile avanti Dio. Ma poi volgendosi con egual verità, e con altrettanto coraggio verso la classe di que' pretesi Filosofi che affettano il nome di spiriti forti, gl'intima: procul este profani. È una loro pazzia se presumono di arrivare al possesso di questa scienza con la sola forza del loro ingegno, perche se la misura del loro ingegno non è stata sufficiente a far loro conoscere l'uno, il vero, e il buono nello spettacolo dell'universo, molto meno è sufficiente a fargli capire la dottrina dell'universo. È poi una loro bestemmia se presumono aiuto alla intelligenza di questa dottrina da quel lume, a cui si oppongono direttamente. Qui con tutta verità ha luogo: *evanuerunt in cogitationibus suis*. Rimarranno nella loro cecità, perche l'amano o per superbia d'intelletto, o per corruttela di volontà, o per l'uno, e l'altro insieme. Quest'opera ch'essenzialm:te distrugge i loro principj, [p. 56] sarà il massimo bersaglio delle loro maldicenze, opposizioni, e cabale litterarie, né perdoneranno a qualunque cosa per ridurla al peggio del niente, ch'è il vilipendio. Ma fallirà il loro disegno, perche contro Dio non vi è consiglio. L'autore per molti anni ha contrastato in altro senso con Dio per non far la presente pubblica comparsa nel mondo sù questo argomento, e per starsene taciturno, e nascosto, né gli è riuscito.

Conscio a se stesso de' sforzi usati per evitarla, e de' modi tenuti da Dio per volerla, ride, e riderà finche vive, degli inutili sforzi di chiunque presumerà di distruggere ciò che Dio in modo onnipotente ha voluto edificare. Se poi o da questa, o da qualunque altra classe di persone non si vuol creder la cosa come veram:te l'ha qui espressa l'autore, nulla egli si cura che gli si creda, o no, perche finalm:te questo non è interesse di lui. Chi l'ha voluto in effetto, sa perche l'ha voluto, e sa come sostenerlo contro qualunque sforzo umano. Con tutta indifferenza l'autore starà a vederne il successo, come con tutta lealtà ha qui esposta la storia del fatto, di cui ha creduto suo debito di coscienza farne partecipe il dotto mondo. Serva la presente lunga digressione dall'argomento a indennizzar l'autore dal modo apparentem:te troppo risoluto, in cui è costretto a dichiararsi dal caso affatto strano. Tornando dunque all'argomento dopo la sopra

esposta analisi che per congiunti lineari rapporti riducendo le diverse ragioni, e proporzioni al loro principio primo della tripla, obbliga l'intelletto a doverle comprendere tutte insieme in un solo punto di vista, prosiegue l'autore le sue prove sulla stessa tripla con sempre maggior forza, ed evidenza.

Primieram;te, si rende necessario il togliere una confusione che nasce dal proporsi principio primo ora la dupla, ora la tripla. La confusione non è che apparente. Si distingua la ragione dalla proporzione. Delle ragioni principio primo è la dupla: delle proporzioni è principio primo la tripla. Così la semplice forma in due termini $1 : 2$ è principio primo di ragione: la composta forma in tre termini $1 : 2 : 3$ è principio primo di proporzione. Questa è proprietà intrinseca del numero, e della sua serie, su cui necessariamente devono concordare la scienza comune, e la presente delle ragioni, e proporzioni. Né qui ha luogo la troppo insussistente, ma pure più volte all'autore apportata opposizione che tra $1 : 2$ sono infinite le possibili divisioni. e per conseguenza infinite le possibili ragioni diverse della dupla. Siano infiniti i diversi gradi degli infinitesimi; è forza che concretato il minimo loro grado dalla minima prima unità, il secondo termine immediatamente successivo sia in ogni modo il duplo della prima unità: il terzo termine immediatamente successivo sia in ogni modo il triplo della prima unità etc.: Ecco la necessità a priori delle ragioni, e proporzioni, e dell'ordine loro, che costituisce sostanza, ogni qualvolta s'intende la serie di differenze uguali come s'intende in ciascun grado degli infinitesimi. Si ometta una volta sì fatta opposizione: non fa molto onore a chi l'apporta. Quando dunque si dice principio primo la dupla, s'intenda di ragione: quando si dice principio primo la tripla, s'intenda di proporzione. Ma si noti che come si è dimostrato altrove, la tripla, come proporzione geometrica discreta, dipende dalla dupla continua $1 : 2 : 4$, dal di cui ultimo termine 4 sottratta la ragion sesquiterza facendo estremo 3, e riportata al mezzo 2 in $1 : \frac{1}{2}$ sesquiterzo a 2, si forma la proporzione $1 : 1 : \frac{1}{2} : 2 : 3$: in numeri interi $2 : 3 : 4 : 6$. Perciò nella tripla vi è essenzialmente il principio duplo, e da ciò proviene che nelle analisi ora s'incontri il principio duplo, ora il principio triplo. Dove poi si troverà la ultima risoluzione, si vedrà al suo vero luogo. Intanto proseguendo si osservi, che proposta la tripla geometrica discreta con i tre mezzi, aritmetico, aritmetico, contrararitmetico, in $2 : 3 : 4 : 5 : 6$, gli estremi de' i tre mezzi sono $3 : 5$: in ragione super2 : parz: 3. Essendo $3 : 5$: numeri impari, si dividano: 3 in $1 : 2$; 5 in $2 : 3$, e si troverà che le forme risultate sono le radici triple di ragione, cioè $1 \times 2 = 2$; $2 \times 3 = 6$. Ma $2 : 6 = 1 : 3$. Adunque etc: Questa è una proprietà singolare della tripla geometrica discreta, com'è l'altrove assegnata nel numero quadrato 4 aggiunto alla dupla geometrica discreta $6 : 8 : 9 : 12$, dove ne' i cinque termini $4 : 6 : 8 : 9 : 12$ due essendo le proporzioni congiunte, cioè la tripla $4 : 6 : 8 : 12$, e la dupla $6 : 8 : 9 : 12$, nella sola tripla si conservano i mezzi determinati, aritmetico 4, aritmetico 6, quando nelle altre tutte della indefinita serie non ve n'è pur una di mezzi determinati: non la prima $1 : 2 : 3 : 6$; non la terza $9 : 12 : 15 : 20$ etc.: Insomma è fatto che in modo distinto da tutte si trova privilegiata la tripla geometrica discreta; né può non esserlo a cagione del suo legame di dupla $\overbrace{2 : 3 : 4} : 6$, ch'è la perfetta delle ragioni, delle quali è principio assolutamente primo. Ma di questo secondo suo privilegio n'è diversa la cagione, ed è che tutti gli impari numeri essendo radici delle ragioni, de' i cui termini sono somma, ed essendo necessariamente costituita la loro serie nella differenza 2, ne viene di necessaria conseguenza, che (per esempio) $3 : 5$ siano radici della tripla, la qual è contrassegnata dal numero immediatamente anteriore, 2 e dall'immediatamente posteriore 6; così $5 : 7$ siano radici della dupla, la qual è contrassegnata dal numero immediatamente anteriore 4, e dall'immediatamente posteriore 8 etc.: Indi è proposizione universale di questa scienza che dati due estremi pari per differenza 4, i due impari inclusi per differenza 2 siano le radici della ragione formata dagli estremi pari. È vero che diviso 5 in $2 : 3$, 7 in $3 : 4$, la dupla prodotta è $6 : 12$ e non $4 : 8$. Ma ciò nulla significa in questa scienza in cui non si considerano gli individui

termini della ragione, ma la ragione stessa, qualunque siano i termini individui. Questo è anzi il sommo pregio della scienza perch'è scienza di universali, e non di particolari, e però nulla cura che la sola ragione astratta da qualunque individuo, né sarebbe mai scienza dello stesso, se fosse fondata negl'individui sempre diversi. Qui profondi l'uomo dotto, e sincero: conoscerà lo sbaglio universale delle comuni scienze dimostrative, le quali senza avvedersene versano sù soggetti particolari, ed a confronto rilevarà in fondo la sostanzil diversità tra queste, e quelle. Ma non per tanto si crede che la ragion includente le suddette sue radici benche non producenti la individual quantità della ragione, non abbia essenzial rapporto alla ragione uguale individualm:te prodotta dalle stesse radici. Lo ha d'important:ma significazione, di cui non vi è qui bisogno di far parola, perche non tende direttam:te alla prova dell'argomento. Ciò che direttam:te appartiene alla prova, si è il fatto che risulta da queste radici, e dalle ragioni individualm:te prodotte. Ecco il fatto. Dalle radici 3 : 5 : divise nelle due ragioni, 3 in 1 : 2, 5 in 2 : 3, si ha in prodotto la tripla 2 : 6. Dalle radici 5 : 7 : divise nelle due ragioni, 5 in 2 : 3, 7 in 3 : 4, si ha in prodotto la dupla 6 : 12. Così da 7 : 9 la ragione 12 : 20; da 9 : 11 la ragione 20 : 30; da 11 : 13 la ragione 30 : 42, in cui ha termine il sestuplo sistema. Si sommino a confronto da una parte i due termini delle radici in serie: dall'altra i due termini delle ragioni in serie.

radici	3 : 5 : <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 3	ragioni	2 : 6 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 2
	8	eguali	8
	5 : 7 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 5		6 : 12 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 6
	12	sesquialteri	18
	7 : 9 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 7		12 : 20 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 12
	16	dupli	32
	9 : 11 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 9		20 : 30 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 20
	20	dupli sesqui4rti	50
	11 : 13 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 11		30 : 42 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/> 30
	24	tripli	72

Indi si sommino insieme per colonna

	3 : 5		2 : 6
	5 : 7		6 : 12
	7 : 9		12 : 20
	9 : 11		20 : 30
	11 : 13 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>		30 : 42 <hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
divisi per 5:	35 : 45	per 10:	70 : 110
	7 : 9		7 : 11

Qui di fatto risultano da una parte i due termini 7 : 9 radici della ragione 12 : 20; dall'altra i due termini 7 : 11 ragione di Archimede tra il quadrato iscritto, e cerchio circoscritto. Che così debba succeder nella colonna delle radici, è chiaro per la nota proprietà dell'aritm:ca serie, in cui se i termini delle somme siano dispari, risulta nella somma l'aritm:ca media ragione, come qui risulta 35 : 45 = 7 : 9, ch'è l'aritm:ca media ragione delle cinque poste in colonna; e se siano pari, deve risultar la ragione radicale di quella ragione ch'è prodotta dalle due aritm:che medie ragio-

ni moltiplicate tra loro. Sia per esempio $\frac{1:2}{2:3} \cdot \frac{3:4}{4:5}$. Moltiplicate loro le due medie ragioni $\frac{3:4}{6:12}$,
 $\frac{10:14}{10:14}$

risulta la ragion dupla; di cui 10 : 14 = 5 : 7 sono le radici di ragione. Ma oltrecche non basta questa proprietà per total ragione del risultato, perche principal ragione si è la determinazione

delle colonne a cinque termini, dal più, e dal meno de quali tutt'altro risulta, vi è poi a confronto il risultato della ragione 7 : 11, la qual è inseparabile in questa operazione dall'essenzial rapporto alla ragione delle radici 7 : 9; e queste come impari numeri, e come radici di ragione [p. 58] sono inseparabili dall'essenziale rapporto alla tripla geom:ca discreta 2 : 3 : 4 : 5 : 6, perche divisi 7 in 3 : 4, 9 in 4 : 5, è fatto che 3 : 4 : 5 sono i mezzi determinati della tripla 2 : 6. Ma vi è di più. Nelle somme de i termini delle radici, e ragioni separate si è trovato nella tripla il principio di unità nella egualità 8 = 8. Indi nella ultima somma 24 : 72 si è tornato alla tripla ch'è il principio primo. Le ragioni formate da ciascuna somma siano ridotte a termine comune. Saranno

$$\begin{array}{r}
 2 : 2 = 8 : 8 \\
 2 : 3 = 12 : 18 \\
 2 : 4 = 16 : 32 \\
 2 : 5 = 20 : 50 \\
 2 : 6 = 24 : 72 \\
 \hline
 \text{somma} \quad 10 : 20
 \end{array}$$

. Qui la cosa è affatto chiara, e affatto significante. Qui si trova la tripla principio, e fine, come altrove si è dimostrata la dupla, e proseguendo l'analisi, nella somma de' i termini si trova la ragion dupla 10 : 20 = 1 : 2. La sestupla essendo somma della prima ragione ch'è la dupla, e della prima proporzione, ch'è la tripla $\frac{1}{1} : \frac{2}{3}$; se questo non è circolo di ragioni, e proporzioni dentro la sestupla, qual sarà mai? Se questa non è la vera, ed unica scienza del cerchio, qual sarà mai? Puo darsi che nella presente operazione rilevandosi con maggior evidenza quelle tali proprietà del numero, le quali sono in parte il fondamento di questa operazione, vi sia chi nulla curando il premesso avviso dell'autore sù questo punto; nulla penetrando nel profondo della operazione, che non appare, ma vi è, ed unicam:te badando alla superficie che appare, e non è, vorrà in ogni modo attribuire il fondamento formale di questa scienza alle sole affezioni, e proprietà dell'aritm:co numero comune. Chiunque sia, in due sensi è per convincerlo l'autore di torto manifesto. Nel primo senso per ora gli si conceda la scienza presente fondata nelle sole affezioni, e proprietà del numero. Si risponda all'autore: queste proprietà, e affezioni: questo loro maneggio: queste loro combinazioni, e legami erano cose note, o ignote? Se note, si assegni un solo Autore o antico, o moderno, che in questo aspetto ne dia un piccolo saggio. Non vi è, né vi è stato mai, perche i veri antichi possessori le hanno volute occulte al volgo, ed a' i Filosofi volgari. Se ignote, chiunque si vale di questo argomento contro la scienza, non offende la scienza: offende se stesso, e tutela la insigne matem:ca classe, perche se il numero è dinanzi gli occhi di tutto il mondo, e tali affezioni, e proprietà sono inseparabili dal numero, è disonore de matem:ci tutti che lo maneggiano per studio di arte, il non aver scoperto per tante migliaia d'anni le suddette proprietà, e affezioni. Se poi si risponda che si sono benissimo vedute, ma non curate, né stimate, replica l'autore che se non si mentisce con questa risposta, è certam:te vero che non le hanno curate, né stimate, perche non l'hanno intese.

Platone Geometra Sommo avendole intese, le ha curate, e stimate incomparabilm:te più della Geometria, ed a sì fatto confronto potrà aver luogo sì fatta risposta? Si negharà l'autorità, e la scienza di Platone, giacche non rimane altro partito. Ma questo è il più fallito di tutti, perche nel secondo senso l'autore è finalm:te a segno di apportar quella prova in contrario, che umilia, non che convince l'intelletto, ma che non poteva apportarsi senza premetter per gradi le nozioni, e spiegazioni di questa scienza necessarie a capire la forza, e il peso di sì fatta prova. Tutte a quest'ora sono premesse, né di più bisogna: basta che chi ama, e vuole il vero, contribuisca dalla sua parte l'attenzione che vi si richiede, per intenderla nel suo fondo, e la prova è questa.

Archimede valendosi de poligoni iscritti, e circoscritti al cerchio, da necessità dimostrativa

è stato condotto al termine 7 per assegnazione del diametro alla circonferenza come 22, e questa è la prima, benché di tutte la più imperfetta ragione, a cui conduce dimostrativamente la Geometria nei due poligoni di lati 96. Qui non si vuol perder tempo nel far osservare che i due termini tra loro più prossimi producenti 96 sono tra loro sesquialteri. $8 \times 12 = 96$; che 8 è il mezzo arm:co della dupla geom:ca discreta $6 : 8 : 9 : 12$, di cui 12 è l'estremo; che il mezzo arm:co 8 è misura tripla di 24 mezzo arm:co della sesquialtera geom:ca disc: $20 : 24 : 25 : 30$; misura sestupla di 48 mezzo arm:co della sesquiterza geom:ca discreta $42 : 48 : 49 : 56$, il di cui duplo è 96 etc.: No: sono queste affezioni, e proprietà del numero, e però si ommettano. Ma non è tale l'incontro della differenza prodotta da i due poligoni: iscritto, da cui il diametro 7 alla circonferenza 22: circoscritto, da cui il diametro 71 alla circonferenza 223, cosicché i due diametri si trovino necessariamente nei due numeri $7 : 71$; e però approssimandoli col 1 zero aggiunto a 7 in $70 : 71$, si trovi la circonferenza di Mezio 355, a qual termine si ha dal prodotto di $70 \times 71 = 4970$ diviso per $\frac{355}{14} : 4970$; che vuol dire da 7 come numero primo, il cui duplo è 14. Qui

non vi entrano proprietà e affezioni di numero: vi entra quella scienza di ragioni, e proporzioni [p. 59] che assegna i principj primi di questi termini: 7 nella somma di $3 : 4$ centro di proporzione della tripla geom:ca discreta: 22 nella sua metà 11 somma de' termini della stessa tripla col mezzo arm:co $2 : 3 : 6$; 70 duplo di 35 mezzo arm:co della super2parz: 5 geom:ca discreta $30 : 35 : 36 : 42$; 71 somma de i due mezzi della stessa proporzione $35 : 36 : \frac{35}{71} : \frac{36}{71}$. Assegna,

e dimostra dominanti le radici duple $5 : 7$: manifestam:te 7 come si vede: occultam:te, ma originalm:te 5, perche 5 è il moltiplicatore di 71; e tutto ciò con l'ultima evidenza, perche $5 : 7$ è la forma della proporzione $30 : 35 : 36 : 42$, dalli di cui mezzi sommati $35 : 36$ si ha 71 moltiplicato dalla forma 5 in 355. Questi sono fatti che risultano da posizione di scienza, e la posizione consiste in ragioni, e proporzioni sistematicam:te costituite, ordinate, e tra loro congiunte dentro la sestupla estensione. Qui non vi è più mezzo: o bisogna negar i fatti, o bisogna conceder la scienza. Negar fatti manifesti è pazzia manifesta: bisogna dunque conceder la scienza. Ma qui si fa evidente in che precisam:te consista la forza dimostrativa della scienza, ed è nelle ragioni, e proporzioni costituite, ordinate, congiunte, e intese nel modo, e senso fin qui esposto, e da esporsi in progresso. Adunque nello stesso tempo si fa evidente la realtà della scienza, e il suo vero fondamento formale non già nelle affezioni, e proprietà del numero, ma nelle ragioni, e proporzioni. Pure questo è ben poco rispetto a quanto segue.

Due cose sono fuori di qualunque dubbio: una di fatto, l'altra di scienza comune delle ragioni, e proporzioni. La prima di fatto si è la posizione di Ceulen come la più esatta di quante siansi geometricam:te dimostrate per poligoni. La seconda di scienza comune si è che presa la ragione tra il quadrato circoscritto, e il cerchio iscritto come la più ristretta di rapporto, e la più prossima di figura, questa manca dalla sesquiterza $4 : 3$; eccede la sesquiquarta $5 : 4$: due ragioni contenute in serie dentro la sestupla $1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$. È ben troppo facile la dimostrazione:

cerchio	quadrato			
3141592 etc:	4000000		3141592	4000000
<u>4 :</u>	<u>3</u>		<u>5 :</u>	<u>4</u>
12566368 :	12000000		15707960 :	16000000
eccede 4:	manca 3		manca 5:	eccede 4

Già qui non si cerca, né vi è bisogno di sapere se sia maggior l'eccesso della sesquiterza, o il difetto della sesquiquarta rispetto alla suddetta ragione del quadrato, e del cerchio: all'intento presente basta la dimostrazione qui assegnata della sesquiterza eccedente, della sesquiquarta mancante nella suddetta comparazione, e basta il fatto, che ugualm:te è una dimostrazione, delle due ragioni necessariamente congiunte per grado immediato dentro la sestupla serie delle forme

$1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 6$. Ciò dimostrato, e premesso, avanti di proseguire si riassume in considerazione l'assunto dell'autore. È fuori di ogni dubbio che se questa è la vera scienza del cerchio; se da questa si risolvono le geom:che dimostrazioni del cerchio ne i numeri determinati dalle ragioni, e proporzioni intese a norma della loro vera scienza; se queste ragioni, e proporzioni sono il fondamento formale della scienza, cosicche da questo a priori dipenda quanto a posteriori si dimostra per poligoni dalla Geometria; se questo formal fondamento è fondato estensivam:te, e generalm:te nella sestupla: intensivam:te, e specificam:te nella tripla, in cui da questa scienza specificam:te si dimostra la natura, e costruzione del cerchio; se tutto ciò è vero (e tutto ciò è un ristretto di quanto fin qui si è proposto, dimostrato, e spiegato), deve trovarsi assolutam:te vero che qualunque posizione assegnabile per Geometria tra diametro, e circonferenza, o tra cerchio, e quadrato, si risolva da questa scienza ne' i numeri determinati dalle ragioni, e proporzioni di questa scienza: si risolva dentro la sestupla in genere, dentro la tripla in specie, e precisione; e che tutto ciò si verifichi con tal evidenza, che arrivi a far comprendere la necessità della Geometria di dover conchiuder la sua dimostrazione in que' numeri, che non conosciuti dalla med:ma se non che come un risultato materiale a posteriori della sua operazione, sono conosciuti, e dimostrati da questa scienza come termini essenziali a priori, ne' i quali deve necessariam:te risolversi la geom:ca operazione. Prova più rigorosa di questa non può esigersi, né idearsi; e però quando si ottenga, si deve intender conchiuso per sempre, che questa è la vera, ed unica scienza del cerchio. Si venga dunque a si fatta prova.

È fatto, che i tre numeri $3 : 4 : 5$ formanti le due ragioni $3 : 4$, $4 : 5$, tra le quali si [p. 60] è dimostrato dentro la sestupla il più, e il meno della ragione tra il quadrato circoscritto, e il cerchio iscritto, non solam:te sono in genere dentro la sestupla, ma sono in specie, e precisione i tre mezzi determinati della tripla geom:ca discreta, cioè 3 arm:co, 4 aritm:co, 5 contrarm:co della tripla geom:ca discreta $2 : 3 : 4 : 5 : 6$.

