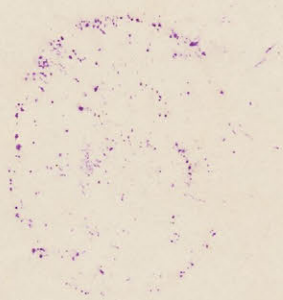


29
G. Tartagli

1. Ordine delle cose nat^{le}
2. Osservazioni sul cerchio
3. Triangoli e Pentagoni
4. Diametro e Circonferenza

Arch. Tarl^{le} Am. A. Ser. 2^a
Ms. Colomb. 4

179



Dell' ordine delle cose naturali.

Si cerca, se riavi in Natura un principio armonico applicato alle cose, e che le renda ordinate.

La magnifica, e stupendo Macchina di questo Universo, che uscì dalle mani del Maestro eterno a similitudine dell' Idea, ch'egli se n'era nella divina sua Mente formata, è certamente con proporzione, ed ordine perfetto costruita, come alla somma sapienza conviene, che ogni cosa con giusto peso, numero, e misura ha disposto, per modo che il tutto alle sue parti, ed ogni parte ad ogni altra, ed a tutte avesse una determinata proporzione; giacchè in questo appunto l'ordine perfetto consiste.

Poichè siccome nell' Etica un' azione si chiama retta, ed onesta, quando è ordinata; ed ordinata si dice, quando si riferisce a Dio, come Autore, e Conservatore di tutte le cose; ed all' umana società, cui o deve giovare, o certamente non nuocere; ed è, a chi la fa, per ogni riguardo conveniente; cioè quando a tutte queste cose con giusta proporzione corrisponde: così nelle cose naturali l' Ordine, senza di cui le cose tutte sarebbero in perpetua guerra, onde presto arriverebbero a scombiersi, e distruggersi; l'ordine dico, per cui le



2
cose tutte, e ciascheduna di esse si con-
servano, significa, che tutto ciò, che in
questo Mondo bellissimo è contenuto, con
tutte le altre cose, e con le parti sue
ancora, conserva una giustissima pro-
porzione, per cui le leggi, che tendono
alla conservazione di ciascheduna cosa
non solo non si oppongono alla legge
universale, che il Mondo tutto governa,
ma anzi e quelle, e questa da uno ster-
so principio provengono, come da comune
fonte, o radice.

Egli è fuor di dubbio, che, allora
solamente ben si conosce una cosa, quan-
do si sa cosa essa sia, e quali sieno le
sue relazioni con tutte le altre cose.

Allora adunque avremmo perfetta cogni-
zione, e scienza dell' universo, e delle
cose tutte, che lo compongono, quando
sapessimo l'ordine delle cose, cioè la
proporzione, con cui son fatte.

Ma che questa sia cosa difficilissima
ben si conosce dall' esser, quasi direi,
infinito il numero delle cose; e le
proprietà di ciascheduna, cioè le par-
ticolari leggi della loro costituzione
molto varie fra loro; e queste, e la
massima parte di esse ancora del tutto
ignote. Per lo che quale sia la
connessione di queste leggi fra loro,
quale la loro relazione, o proporzione

alla legge

alla legge universale del Mondo, o mai
non si saprebbe, o questa scoperta
sarebbe l'opera di molti secoli, sebbene
i Filosofi tutti applicassero seriamente
l'animo a scorrere, e ben distinguere
i generi tutti delle cose, a scuoprir
le loro proprietà, o le lor leggi, a co-
noscere la proporzione, o relazione di
queste leggi fra loro, per indi dedur-
re il comune principio di tutte, cioè
la legge universale, che tutte le co-
se di questo Mondo regge, e governa.

Che dir potrebbe adunque, se
stati fossero sempre in questo esame
assai negligenti; se troppo frettolosi, per
ischifar la fatica fossero volati a mal
fondate universali proporzioni; se le leggi
delle cose dedotte avessero non dall'exa-
me delle cose stesse, ma per troppo
stimma, e troppo amore di se stessi,
dalla loro fantasia; se finalmente
all'ordine, e proporzione delle cose
fra loro degnati non si fossero di mai
rinvogliere il lor pensiero?

Ben vedete, che allora con tutto
il fondamento dir potrebbe, che i
Filosofi ben sovente potrebbero lusingar-
si di ben conoscere una qualche cosa,
quando nulla sapessero delle relazioni
di essa. La quale opinione di ricchezza
è la principal causa di povertà, e di

miseria.

4
misera, come osservò benissimo Baco-
ne di Verulamio; poichè quasi mai
uno ritrova ciò ch'ei non ricerca; nè
alcuno ricerca mai ciò che scioccamen-
te crede di possedere.

Bisognerebbe per tanto, che con som-
mo studio, e diligenza ricercassero la
proporzione, con cui le cose son fatte,
quelli, che conoscere volessero l'ordine
delle cose; giacchè ignorandolo non
possono mai avere una piena cogni-
zione de' naturali composti, e de' pri-
mi lor elementi.

Colui poi, che vorrà imparare l'
ordine delle cose, dovrà in primo
luogo formarli una chiara idea gene-
rale dell'ordine, e rappresentarla con
una qualche immagine, per paragonare
poi a questa generale idea le varie
specie ~~specie~~ di ordine, che andasse
figli con le osservazioni, e cogli experi-
menti suprendo.

Vediamo ora, se fra le idee, che
abbiamo, vi sia la idea generale dell'
Ordine, che servire poi possa quasi di
face per investigare l'ordine delle
cose di questo Universo.

Parte. I.

3

La serie, o progressione armonica $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c.
in infinito è certam.^{te} ordinata; ed ordinata
pure è la inversa di quella, cioè l'aritmética
serie formato dai divisori dell' armonica,
1. 2. 3. 4 &c.

Per vedere ora quale di queste due
immagini dell' Ordine sia la prima, la
migliore, la più chiara, gioverà porle
al confronto.

Nasce la serie aritmética dall' armo-
nica, anzi è in essa contenuta, perchè
formato dai divisori della stessa. Ma l'
armonica serie non nasce dall' aritmética,
anzi questa come parte in quella è con-
tenuta. Adunque l' Armonica serie
è la prima, e la principale.

L'una, e l'altra serie principia dall'
unità. Ma l'unità della serie armonica
tiene il luogo di un tutto, di cui son
parti gli altri termini tutti della stessa
serie. L'unità poi della serie aritmética
è la minima quantità della stessa serie,
la quale minima quantità si prende per
indivisibile, e per misura di tutte le
altre quantità della serie stessa. L'ar-
monica serie dunque va per sintesi
dal tutto alle parti; e la serie aritmética
va per analisi dalle parti al tutto, al

quale però

al quale però non arriva mai. Essendo
adunque più nobile, e più dottrinale
il metodo sintetico dell' analitico; la
serie armonica sarà la più nobile idea
dell' Ordine, e la più degna.

La serie Armonica contiene tutte
le possibili ragioni razionali, i termini
delle quali sono la serie delle parti del
tutto Armonico. La serie aritmetica
contiene essa pure tutte le razionali
ragioni; ma ciascuna di queste ragioni
della serie aritmetica è la inversa della
corrispondente ragione dell' Armonica se-
rie; ed i termini delle ragioni della serie
Aritmetica non hanno relazione ad alcun
tutto, che non si trova mai nella serie
Aritmetica, le cui quantità vanno in
infinito crescendo, sicché il primo ter-
mine è sempre il minimo, l'ultimo
è sempre il massimo di tutta la serie;
mentre le quantità de' termini della
serie Armonica van sempre scemando, sic-
ché il primo ne è il massimo, ed il
tutto, il minimo è sempre quello, che
si prende per ultimo.

Ogni ragione comensurabile, o razionale per
tutto può esprimersi con due termini dell' una, o dell' altra serie.
Nell' Armonica le ragioni prime, e semplici
sono $1: \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}: \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3}: \frac{1}{4}$ &c. Nell' arit-
metica serie le ragioni prime, e sempli-
ci sono $1: 2$; $2: 3$; $3: 4$; $4: 5$ &c.

$$\begin{aligned} 1: \frac{1}{2} &:: 2: 1 \\ \frac{1}{2}: \frac{1}{3} &:: 3: 2 \\ \frac{1}{3}: \frac{1}{4} &:: 4: 3 \quad \&c. \end{aligned}$$

Le proporzioni

Le proporzioni però dell' armonica serie
 $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ &c. non
 vengono espresse dai corrispondenti termini
 dell' aritmetica serie $1 \cdot 2 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 4$;
 $3 \cdot 4 \cdot 5$. E per questo ancora l' armonica
 serie è da preferirsi alla serie aritmetica.

Per ritrovar i numeri interi della
 serie aritmetica, che corrispondano alle
 frazioni, cioè ai termini delle proporzioni
 dell' armonica serie, bisogna ridurre quelle
 frazioni al comun divisore. Allora i
 numeratori delle frazioni, così ridotte,
 indicano ~~indicano~~ i termini dell' armonica
 proporzione; ed il comun denominatore in-
 dica in quante parti l' unità armonica
 in quella proporzione si concepisca divisa;
 o sia quante volte l' aritmetica unità
 sia nell' unità armonica contenuta &c.

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$	$6 \cdot 3 \cdot 2$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{12}{24} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24}$	$12 \cdot 8 \cdot 6$
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{20}{60} \cdot \frac{15}{60} \cdot \frac{12}{60}$	$20 \cdot 15 \cdot 12$
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{30}{120} \cdot \frac{24}{120} \cdot \frac{20}{120}$	$30 \cdot 24 \cdot 20$

L' armonica unità nella prima
 proporzione si concepisce divisa in 6 parti;
 nella 2.^a in 24; nella 3.^a in 60; nella 4.^a
 in 120. Ma l' unità armonica è sempre
 la stessa, e sempre il tutto; e si mu-
 tano soltanto le parti, che in essa si con-
 cepiscono, cioè si muta l' aritmetica unità.
 Via per esempio un anno. Quando in
 vece di dire un anno, io dico dodici mesi,
 l' anno è lo stesso che prima, e si è so-
 lamente mutata l' aritmetica unità,
 che prima era un anno, ed ora divie-
 ne un mese; così quando dico 365 gior-
 ni, l' anno è lo stesso, e si è mutata solo
 l' aritmetica unità, che prima era un anno,

poi un mese.

poi un mese, ed ora è un giorno. Ancor
per questa costanza dell' unità armonica
a confronto della mutabilità dell' unità
aritmetica, la serie armonica è una
più nobile idea dell' ordine, di quello
lo sia l'aritmetica serie.

Fra due termini di una ragione,
vi sono tutti questi mezzi: 1.^o L'armonico;
2.^o L'aritmetico; 3.^o il contrarmonico;
4.^o il geometrico. Questo ultimo prin-
cipale, e quasi unicamente è stato
trattato dai Geometri, intorno a cui
hanno detto cose utilissime. Loco han
detto degli altri mezzi armonico, arit-
metico, e contrarmonico. Cioè hanno
suiolto questi due problemi: dati i due
primi termini di una proporzione, tro-
varne il terzo aritmetico, o l'armonico,
od il contrarmonico. 2.^o Dati i due
estremi trovarne il mezzo aritmetico,
o l'armonico, od il contrarmonico.

Giova molto, per trovar questi
mezzi, esprimere le ragioni con numeri
interi, perchè allora con pochi, e fa-
cili canoni „de' quali abbian trattato nel
problema, suoi corollari, ed Osservazioni,
facile riesce ritrovare tutti que' mezzi.
Si trovano per altro i mezzi ancor fra
i termini espressi da frazioni, come vi
abbiamo osservato.

Nelle proporzioni per tale via ritrovate,
il mezzo aritmetico è sempre un quadrato,
L'armonico

L'armonico è minore del quadrato di un' unità; il contrarmonico eccede di un' unità lo stesso quadrato. Le proporzioni trattate in questo modo racchiudono tutti i generi di proporzioni armoniche, aritmetiche, contrarmoniche, e geometriche.

Nella serie de' numeri naturali si contengono tutte le suddette proporzioni con questa legge, che $7 : 11 + 10 :: 7 : 21 :: 1 : 3$, ch'è la ragione, che passa fra gli estremi della precedente proporzione. Similmente $13 + 14 : 17 + 18 + 19 :: 17 : 54 :: 1 : 2$, ch'è la ragione, che passa fra gli estremi della proporzione precedente.

Nella serie per tanto de' numeri naturali tutto è ordinato, congiunto, e connesso; mentre ancora que' numeri, che sembrano oziosi, indicano costantemente la precedente ragione.

Tutto ciò, che abbiain detto, si fa chiaro, che le due serie, armonica $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c., ed aritmetica $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ &c. danno un' idea dell'ordine, con questa differenza. ~~però~~ che la serie armonica è prima, più degna, e più chiara, sicchè a primo aspetto si concepisce ordinata; mentre l'aritmetica, invero dell'armonica, dà in vero un' idea dell'ordine, ma non così pronta, nè così chiara; perchè per vederne la pienissima connessione s'è bisogno di riflessione, e di alcune operazioni.

1 2 3 4 5 6
6 7 8 9 10 11 12
12 13 14 15 16 17 18 19 20 &c.

1. L'aritmética nasce dall'armonica, ma non già l'armonica dall'aritmética.
2. L'armonica procede per sintesi; l'aritmética per analisi.
3. Nell'armonica vi è l'unità costante, e sempre la stessa; tutto è vario nell'aritmética.
4. Nell'armonica a primo aspetto tutto si vede ordinato, e congiunto; nell'aritmética vi sono de' numeri, che pajono oziosi, e bisogna fare certe operazioni per metterli ordinati, e connessi.

Per le quali cose tutte. L'armonica serie dà un'idea dell'ordine, ch'è la prima, la principale, la più nobile, e la più chiara di quella, che si ha dall'aritmética serie.

Io non ho parlato punto delle serie geometriche $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 32$ | $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{16}$ &c.
 $1 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot 81 \cdot 243$ | $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{81}$ &c.

perchè queste vanno bersi in infinito, ma dicono sempre lo stesso, mentre tanto è dire $1:2$, quanto prender due altri numeri qualunque delle serie stessa, per es. $16:32$; onde contengono una sola ragione; mentre la serie armonica, e aritmética contengono ragioni sempre varie, relative alla varietà delle cose, che compongono l'universo.

Parte II.

Passiamo ora a vedere, se la stessa armonica serie, che contiene tutte le armoniche proporzioni, ci dia ancora l'ordine di questo Mondo, e delle cose, delle quali esso è composto.

Lo darebbe certo, se tutte le cose fossero armonicamente fatte, se tutte dipendessero da un armonico principio impresso alle cose. Questo Mondo allora sarebbe uno, e sarebbe un tutto, le cui parti sarebbero le cose tutte; e la ragione delle cose e fra loro, ed al loro tutto, sarebbe espressa dall'ordine dell'armonica serie.

Resta adunque da ricercare, se fra le cose, che sono, e che si fanno vi siano esempj di armonica proporzione, e se resti speranza di poterla scoprire in tutte le cose: ricerca in vero di lunga fatica, e difficile molto da consumarsi.

Che tale cosa per altro non sia da porsi fra le impossibili, me lo fa credere, e l'autorità di Platone, ed alcuni esempj.

Per quanto appartiene all'autorità di Platone, si può facil^{mente} provare, ch'egli per la sua celebre anima del Mondo, altro non abbia mai inteso, che un principio armonico impresso alle cose,

12 cose, e per ogni dove diffuso; per tutte
cioè quelle cose, che sempre sono nello
stesso modo, come sono i moti celesti,
e le specie delle cose. Poichè quan-
to agli individui, questi nascono, e
muojono, e ad ogni momento si mudano,
ma non son mai della stessa maniera.

Quando poi agli esempi; sia questo
il primo: se una corda vera sonora
venga percossa da un corpo elastico, sicchè
suoni; essa corda manda fuori 3 suoni
diversi: uno grave, quale compete a tutta
la corda; uno acuto, che compete ad un
terzo della medesima; ed uno più acuto ancora,
che compete ad un quinto della stessa corda.
Sicchè essa fa lo stesso, che farebbero tre
corde distinte, ugualmente vere, una
lunga 1, l'altra $\frac{1}{3}$, e la terza lunga $\frac{1}{5}$.

La corda vera sonora si divide adun-
que, non da chi la percuote, ma da
per se in $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, per modo che l'intera
corda con queste sue porzioni è in armo-
nica proporzione, $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$, indipendentemen-
te da qualunque umana designazione.

Si trovano queste divisioni nella corda
con un percolino di carta posto su di
essa, il qual percolino ad $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ della
corda è molto meno smosso, ed agitato,
che in qualunque altro luogo della corda
stessa.

Che se alcuno dicesse, ch'essa corda
si divide

La prova
che il principio armonico
ha luogo in natura.

si divide da se in $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \&$;
cio' in vece di scemare, anzi accrescerebbe
la forza dell' argomento, mostrando, che
la corda con le sue divisioni darebbe la
serie delle semplici ragioni.

C'è la corda vera sonora si divide da
se, e fa $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$; queste proporzioni son
nella corda per forza di sua natura, o
di un armonico principio; non per umano
arbitrio, o per umana discrezione.

Sono adunque in natura queste proporzio-
ni $3:1$; $5:3$; $5:1$ anteriori a qualun-
que umana discrezione, in qualunque
modo poi si vogliano dire, segnare, o scri-
vere.

Al fenomeno della corda sonora, ag-
giunger conviene l'altro fenomeno del
terzo suono, che mostra, che nominatamen-
te la proporzione, e progressione armonica $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \&$
è in natura, e dà luogo di mostrare &
la vera origine de' numeri naturali.

Cin la vera corda sonora AB. La
concepisco divisa in modo che

AB AC AD AE AF AG AH
 $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \&$

AB è il tutto, l'unità armonica; le
altre unità sono tutte aritmetiche AC:BC::1:2
queste unità non sono certamente relative
al tutto. Il tutto adunque AB=1 è l'
uno armonico anteriore alle aritmetiche
unità; perchè prima di dividere la corda



AB=1		3 ^o suono
AC:CB::1:1	}	1
AD:DB::1:2		2
AE:EB::1:3		6
AF:FB::1:4		12
AG:GB::1:5		20
AH:HB::1:6		30

in 1.1; 1.2 &c, la corda deve certam.
esistere.

Ecco già nati da queste proporzioni i
numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c

Ora vengo al fenomeno del terzo suono.

Se si toccano due corde sonore lunghe
come 1. 2, si sente oltre i suoni delle
due corde un terzo suono = $1 \times 2 = 2$,
cioè ugual al suono di tutta la corda.

Se le corde sono lunghe come 2. 3; il
terzo suono è = $2 \times 3 = 6$ = al suono di
tutta la corda; $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2 :: \frac{3}{6} : \frac{2}{6}$.
in rapporto alle quali la unità è = $\frac{6}{6} = 1$.

Se le corde son lunghe come 3. 4; il
terzo suono è = $3 \times 4 = 12$ = al suono
di tutta la corda, $\frac{12}{12} = 1$. Se le lun-
gherie sono 4. 5; il terzo suono è = 20.
Se 5. 6; il terzo suono è = $5 \times 6 = 30$ =
alla corda $\frac{20}{20}$ nel primo caso, e $\frac{30}{30}$
nel secondo

Nel primo caso tutta la corda è due,
non essendovi numero minore del 2, che
sia divisibile per 1, e p. 2.

Nel secondo caso tutta la corda è 6,
delle quali sei parti, una delle corde toc-
cate ne contiene 2, l'altra 3. Il 6
è il minimo numero divisibile per 2, e
per 3.

Nel 3.º caso tutta la corda è 12, delle
quali 12 parti una delle corde toccate
ne contiene 3, e l'altra 4. Ed è il

12 il minimo

$AB = 1$	$1 : \frac{1}{2} :: 2 : 1$	2.º suono
$AC = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2$	6
$AD = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} :: 4 : 3$	12
$AE = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} :: 5 : 4$	20
$AF = \frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} : \frac{1}{6} :: 6 : 5$	30
$AG = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} : \frac{1}{7} :: 7 : 6$	&c

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} :: 4 : 3 :: \frac{4}{12} : \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} :: 5 : 4 :: \frac{5}{20} : \frac{4}{20}$$

$$\frac{1}{5} : \frac{1}{6} :: 6 : 5 :: \frac{6}{30} : \frac{5}{30}$$

il 12 il minimo numero, che sia divisibile per 3, e per 4.

Così non v'è numero minore del 10, che sia divisibile per 4, e per 5. Né vi è num. minore del 30, che possa esser diviso per 5, e per 6.

Adunque il terzo suono mostra la unità, o la corda tutta divisa nelle sue parti armoniche; e risolve il suono delle parti nel suono del tutto.

Il tutto armonico si risolve nelle sue parti $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$, anzi in $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ &c. sebbene $\frac{1}{2}$ come ottava dell'uno difficile viene dall'orecchio distinto; come pure $\frac{1}{4}$ ottava di $\frac{1}{2}$, ed $\frac{1}{6}$ ottava di $\frac{1}{3}$ &c.

Le proporzioni armoniche sono adunque in natura, o v'è in natura un principio armonico, che le fa nascere; e tanto è lontano, ch'esse proporzioni si deducano dai numeri naturali, che anzi i numeri naturali si deducono dalle armoniche proporzioni.

Si deve osservare, che i terzi suoni sono indicati dai numeri 2 . 6 . 12 . 20 . 30 . 42 &c., che danno come 1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 &c., dalle cui somme a due a due nascono i quadrati $1+3=4$; $3+6=9$; $6+10=16$; $10+15=25$; $15+21=36$ &c.

Si è osservato di sopra, che sommando i termini delle semplici ragioni $1:2$; $2:3$; $3:4$ &c., queste somme danno i numeri impari $1+2=3$; $2+3=5$ &c. ed i pari

$$1+2=3$$

$$2+3=5$$

$$3+4=7$$

$$4+5=9 \text{ &c.}$$

nascono dall'unità

16 Ed i pari nascono dall' unita' aggiunto agli impari. Questi pari per altro divisi per 2 sono la stessa serie de' numeri naturali.

Ed ecco per tanto tutti i numeri, ed i lor segni nati dalle preesistenti ragioni, le quali essendo in natura, o nascendo da un principio, ch'è in natura, fan conoscere, che i numeri, ed i lor segni hanno il loro fondamento in natura.

Quindi si può dedurre, che sebbene, 1. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19 &c chiamar si possono numeri primi, perchè non son divisibili per altro numero, che per l'unita'; onde per via di moltiplica non son composti di altri, e però son primi: tuttavia potendo comporsi i numeri ancora per via di somma; e nascendo gl' impari dalla somma de' termini delle semplici ragioni, ed i pari dalla somma di due impari; pare, si possa dire, che tutti i numeri, fuorchè l'unita', essere, in questo senso, composti, perchè derivati per somma dai termini delle semplici ragioni prime.

$$1+1=2$$

1

$$1+3=4$$

2

$$1+5=6$$

3

$$1+7=8$$

4

&c

La Tromba marina è uno strumento, sulla di cui unica corda non possono avervi altri suoni, che i determinati dall' armonica proporzione, e serie. Questi suoni si hanno puramente dalla fisica natura, che ivi gli ha determinati, affatto indipendenti dall' arbitrio, e dall' umana disegnazione. La vera corda è AB attaccata a due fulcri stabili A, B . Si suona coll' arco pressimad. in M verso l' estremità A , e per passare di suono in suono non si comprime col dito perpendicolad. fino al piano dello strumento, come si fa sul violino, viola &c, ma si appoggia lateral. un dito, come un fulcro, che non impedisca il corso, e ricorro delle rispettive vibrazioni di quella porzione di corda, che vi è dal fulcro fino all' estremo A .

Questi fulcri sono fisicam. determinati in $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c della corda con tale fisico rigore, che nello spazio di corda fra $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ non vi è suono; nello stesso spazio fra $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ non v'è suono &c. E però col dito lateral. appoggiato passando per lungo la corda, da $\frac{1}{2}$ fino ad $\frac{1}{3}$ non si trova suono, fino che il dito non sia arrivato al punto fisico $\frac{1}{3}$; e così da $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{4}$ &c. E questa stessa legge si trova fisica. impressa ne' corni da caccia, e nelle Trombe da fiato.

I suoni musicali conducono necessarad. qualunque intelletto alla nozione del n^o.

Fija 9

Ora si supponga un suonatore affatto

16
ignaro del numero, il quale null' altro
sapendo, senonchè il solo meccanismo
di porre l'arco in M , e di appoggiare
lateralmente il dito su la corda della
tromba marina, e lo sappia per aver
veduto un altro suonatore, che così fa-
ceva. Costui voglia poi da se stesso ri-
trovare i suoni di quella corda, e
trovabili segnarli con qualche segno, per
porvi il dito senza bisogno di cercarli,
come appunto si fa su questo strumen-
to, su cui tutti i punti fisici de' suo-
ni si segnano con lettere musicali, si
dimanda cosa debba seguire da questa
ricerca nel suonatore ignaro del numero.

Costui deve necessariamente imparare
il numero, non nel suo nome, ma
nella sua essenza; perchè in qualun-
que modo egli faccia questa ricerca, Fig. 9
ne deve seguire, che, si avvegga, che
 $\frac{1}{2} A$ è la metà della corda BA ; e
stante l'idea di ugualità (idea di
universal proporzione) si avvegga esser
 $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B$. Si avvedrà pure, che
 $\frac{1}{3} A$ è la terza parte della corda
 AB , e l'avanzo $\frac{2}{3} B$ ne fa due
terze parti, ciascuna $= \frac{2}{3} A$. Si av-
vedrà pure $\frac{1}{4} A$ la quarta parte del-
la corda AB , e l'avanzo $\frac{3}{4} B$ esserne
tre parti ciascuna uguale ad $\frac{3}{4} A$.

Questo solo fatto basta per prova della facoltà

della facoltà, che vi è ne' suoni musicali di condurre necessariamente qualunque intelletto alla nozione del numero nella sua essenza.

Ma in questo fatto vi è molto di più in solo fisico rispetto. Poichè la ragione per cui in questo strumento non possono avervi i suoni, se non che in que' soli fulcri, si è la necessaria uguaglià delle vibrazioni di progresso, e regresso, che scorrono per tutta la corda AB , determinate da quella porzione di corda suonata, a cui si forma fulcro col dito, lateralmente appoggiato.

Sia AB col fulcro $\frac{1}{2}$ alla metà della corda, saranno uguali le vibrazioni di $\frac{1}{2} A$, $\frac{1}{2} B$, perchè le due parti della corda sono uguali, e però in $A \frac{1}{2}$ si avrà suono ugualmente che in $\frac{1}{2} B$.

Sia AB determinata a tre parti uguali dal fulcro $\frac{1}{3}$: saranno uguali le vibrazioni di $A \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \frac{2}{3}$, e di $B \frac{2}{3}$, perchè le tre parti sono uguali, e però in $\frac{1}{3} A$ si avrà suono.

Ma due cose necessariamente succedono. La prima, si è, che, determinato dal dito il fulcro $\frac{1}{3}$, la fisica natura delle vibrazioni da se stessa determina il 2.^o fulcro in $\frac{2}{3}$ senza bisogno di appoggiarvi il dito. La 2.^a si è, che,

passando

20
passando coll' arco sopra la porzione di
corda BC , ch'è di due terzi della corda,
non suona albrimenti questa porzione;
ma chiaramente si sente il suono di
 $\frac{1}{3} A$, benchè non tocchi dall' arco del
suonatore, e ciò perchè s è la misura
di due, non due di uno.

In somma se la porzione, di cui
si vuol suono, sia di unità, come mi-
sura uguale del residuo, si ha sem-
pre suono, e la fisica natura da se
stessa forma i fulcri delle vibrazioni
in tutte le parti del residuo, uguali
a quella unità, o misura. Se non è
unità, e misura, non si ha suono, nè
la fisica natura può formare i ful-
cri, perchè le vibrazioni non arrivano
uguali fino all' estremo B della corda,
s' interrompono, ritornando disuguali verso
l' estremo A , distruggendo i fulcri del
progresso con i fulcri del regresso, e con
ciò distruggendo qualunque suono.

Ecco l' idea chiara del numero acqui-
sita per via de' suoni; è questa pu-
ramente fisica, ed è fatto indipendente da
umana designazione.

Che se si opponga, tutto ciò dipendere
dal primo fulcro posto dal suonatore,
quasi che posto dal di lui arbitrio,
si tocca con mano tutto il rovescio,
perchè se il suonatore vuole aver

suono,

suono, è costretto dipender totalmente dalla fisica natura, addattando necessariamente il fulcro al punto determinato dalla membra, ed escludendo necessariamente qualunque punto, che il suonatore volesse determinare a suo arbitrio.

Adunque si conchiude, che qui oltre la serie aritmetica nelle unità uguali de' residui, s'impone necessariamente la serie armonica della prima unità AB in $1. \frac{1}{2}. \frac{1}{3}$ &c.

Suoni, e Pianetti.

Se a corde sonore uguali raprese ad un solo uncino si attaccino de' pesi, che stiano fra loro, come $1. 2. 3. 4$ &c., queste corde danno de' suoni, che tendono dal grave all'acuto.

Sia quella corda, o lunga, o breve; o grossa, o sottile; sia di metallo, o d'intestini, queste cose niente turbano le ragioni de' suoni; ma determinato che sia il primo suono (o grave, o acuto, che questo siasi), che corrisponde al primo peso, secondo la natura della corda, che più grossa, e più lunga, ch'è, dà un suono più grave; Tutti gli altri suoni stanno a quel primo in una costante ragione.

I pesi ancora, purchè siano fra loro uguali, possono prendersi a piacere,

o di una libbra



22
o di una libbra, o di due &c. Il primo suono sarà più acuto, se i pesi saranno maggiori; se minori sarà più grave. Ma dato quel primo suono, le ragioni degli altri suoni, ed a quel primo, o fra loro si conservano costantemente le stesse.

Intorno a questi suoni, è da osservarsi primieramente, che da gran tempo si sa, che se una corda tesa nel monocordo sarà all'unisono con una corda tirata da un solo peso; e si divida poi quella corda del monocordo in $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ &c, la metà di essa sarà all'unisono coll'altra corda tirata da 4 pesi; $\frac{1}{3}$ di quella sarà all'unisono coll'altra corda tirata da 9 pesi; $\frac{1}{4}$ di quella lo sarà coll'altra tirata da 16 pesi &c.

Se i pesi sono 1. 4. 9. 16. 25 &c. le lunghezze delle corde saranno 1. $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ &c.

Ma non era noto in qual ragione fossero i suoni generati dai pesi, posti fra il primo, ed il 4.^o; fra il 4.^o, ed il 9.^o; fra il 9.^o, ed il 16.^o.

Questi suoni intermedj, cioè quelli, che si generano dai pesi fraposti fra i numeri quadrati 1. 4. 9. 16. 25 &c.

Stanno

stanno fra loro, come le radici dell' ar-
monica serie $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$
sicchè i seni 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9
suoni o lunghi 1. $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt{\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \frac{1}{3}$
Poichè se si descrivano de' quadrati, le
cui aree siano uguali ad $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ &c.,
e si facciano le parti di una corda sono-
ra di un monocordo uguali a' lati di
que' quadrati, e si faccia il suono cor-
rispondente al primo peso unisone al suo-
no del lato del primo quadrato; il suono
corrispondente a due pesi sarà unisone
al suono del lato del 2.^o quadrato; ed il
3.^o suono, eccitato da tre pesi, sarà unis-
sone al suono del lato del 3.^o quadrato,
e così sempre in infinito.

Si avranno poi facil. i lati di que'
quadrati, se presa la AO = alla lun-
ghezza della corda del monocordo, con
questo diametro AO si descriva il
cerchio ACO, e tagliato poi il diame-
tro AO in armonica proporzione, sic-
chè si abbia AO · OB · OH · OI · OL · OM &c.
come $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ &c.
e tirati i seni BC, HD, IE, IF, MG;
e final.^{te} le corde CO, OD, OE, OF, OG;
queste corde saranno i lati de' quadra-
ti, che ora cerchiamo. Poichè i qua-
drati delle corde sono come i seni
verti OB, OH, OI &c. (a) cioè (per
la costruzione) :: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c. Le corde adunque.

(a) Cr. 3.^a pro. 17. lib. VI.
Tiquet colle note del Wicton.

24
Le corde dunque saranno come le
radici de' seni versi, cioè :: $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$ &c,
cioè come i lati de' quadrati, i quali
lati danno i suoni uguali a quelli fatti
dai pesi 2. 3. 4 &c

$$\begin{array}{ccccccccc} AO & OC & OD & OE & OF & OG \\ 1 & \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} & \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} & \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} & \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} \\ 1 & \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} & \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} & \cdot \frac{1}{2} & \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} & \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} & \end{array}$$

Pesi — 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 &c

$$\begin{array}{l} \overline{AB}^2 = \frac{1}{4} \overline{AO}^2 \\ \overline{AC} = \frac{1}{2} \overline{AO} \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} \overline{AB} & \overline{AC} & \overline{AD} & \overline{AE} & \overline{AF} & \overline{AG} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} \\ 15 & 30 & 40 & 45 & 48 & 50 \end{array} \right.$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

$$60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$$

$$\text{Pesi } 30 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50 \quad \text{Somme de' resti}$$

$$30 : 40 :: 3 : 4$$

$$40 : 45 :: 8 : 9$$

$$45 : 48 :: 15 : 16$$

$$48 : 50 :: 14 : 15$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \\ 12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 20 \\ 20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 30 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{centri} \\ \text{delle} \\ \text{propor-} \\ \text{zioni} \end{array}$$

Sono dunque i pesi in duplicata inversa delle lunghezze
delle corde, alle quali sono attaccati
i pesi; il che apparisce tanto più
da ciò che segue.

Siano due corde uguali di lunghezza,
e grossezza, e vi si attacchino due pesi
uguali, che le stirino. Queste due
corde, percosse da un corpo elastico, dan-
no il medesimo suono. La metà di una
di queste corde stesa da un medesimo peso

peso fa l'ottava acuta dell' altra corda.

Ma se alla corda intera si attacchi un peso quadruplo di quello, che divide la metà dell' altra corda, tutte due le corde ritornano a dar l'unissono. Il peso dunque agisce nella corda

$\frac{1}{2}$, come pesi 4 agiscono sulla corda, cioè producono

~~il~~ **peso effetto**, rendendo l'unissono; adunque le concasse producenti il medesimo

effetto dovendo esser reciproche, sarà corda $\frac{1}{2}$ a corda 1, ovvero corda 1 a

corda 2 come peso 4 a peso 1; e però i pesi sono in duplicata inversa delle distanze

Se si prende $\frac{1}{3}$ di una corda; lasciando l'altra intera; acciò questo sia all' unissono colla sua terza parte, bisogna attaccare alla corda intera un peso 9 volte maj. di quello, ch'è appeso alla più corda.

Effetti	Corde	Pesi
$\frac{1}{3} = 1 = 1 \times 9$	$\frac{1}{3} \cdot 1$	$9 \cdot 1$; dunque

Se una corda è lunga 1, l'altra 4, i pesi che dan l'unissono saranno 1. 16.

Adunque una in lunghezza 1, opera quanto 16 in lunghezza 4.

Effetti	Corde	Pesi
$1 \times 1 = 4 \times 16$	$1 \cdot 4$	$16 \cdot 1$

In somma se le lunghezze delle corde

sono 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ &c. i pesi attaccativi, che dan l'unissono, sono 1. 4. 9. 16 &c., che sono in duplicata inversa ragione delle lunghezze.

25
delle corde, le quali agual^l bene in
un qualunque musico strumento da-
rebbero gli stessi suoni.

Se dunque peso 1 in corda $\frac{1}{2}$ agisce
quanto peso 4 in corda 1. Se peso
4 in corda 2 agisce quanto peso 9
in corda 3. Se peso 16 in corda 4, è chiaro,
che i pesi agiscono ~~in~~ le corde in
duplicata inversa delle lunghezze delle
corde.

Ma è certo, che la forza, che
tiene in orbita i pianeti agisce
su di essi in duplicata inversa delle
distanze meriane de' medesimi dal Sole,
o dal Primario, attorno cui girano.

Dunque il principio medesimo, che nelle
corde sonore produce l'armonica unita,
ci ritiene i Pianeti, e le parti tutte
dell' Universo, e le riduce ad armoni-
ca unita.

Questo è quanto crede David Gregory,
che dir volevano i Pitagorici con la
loro armonica delle sfere celesti.

Prof. all' Ist. Fisica.

A questi esempi ne aggiungeremo
ora un altro, ch'è quello de' colori,
i quali con legge armonica sono con-
giunti in ogni raggio di luce.

Dopo che per molti secoli sono
andati errando senza frutto i Filosofi
per ritrovare la vera Teoria dei colori;
finalmente colla sola esperienza il Cav.
Isacco Newton avanzò questa parte
della Fisica, per modo che quanto abbiamo
di certo in questa materia di tutto a
lui solo dobbiamo confessare di essere
debitori.

Noi fra tante cose belle da lui in
questa materia scoperte, osserveremo solamen-
te ciò che ora al nostro scopo renderi neces-
sario: cioè che ogni raggio di luce divi-
desi dal prisma in sette raggi colorati;
che tutti insieme mostrano il bianco;
e che ad uno presi sempre conservano
il suo colore, nè lo mutano mai, se
si rifrangono con prismi, o con lenti; o
se con specchi, quanto uno vuole mai,
si riflettano.

Che se la immagine colorata forma-
ta dalla rifrazione del prisma, si di-
vida in 360 parti, di queste il color
violetto ne occupa 30; l'Indico 40; il
Ceruleo 60; ed oltre 60 il verde; 48
il Giallo; 17 il Rosso; e 45 il Nero,
con tale proporzione sono composti

i colori

Da Gio: Maria dei Colori.

in ogni raggio di luce. E questo appunto dimostra, che i colori in un raggio di luce sono in armonica proporzione.

Sia AB la lunghezza dell' imagine Fig. 11 colorata fatta dal prisma, e questa si divida in 860 parti; e gli si aggiunga la AC essa pure uguale a 860. Si divida la AB in parti simili a quelle, che son occupate dai sette colori nell' imagine colorata del prisma, principiando in B dalle 80 parti occupate dal colore violetto; avremo tutta la $CB = 710$.

Levate le 80 parti del violetto, restano	640
Levate le 40 parti dell' Indico	600
Levate le 60 parti del Cerauleo	540
Levate le 60 del Verde	480
Levate le 48 del Giallo	432
Levate le 12 del Sori	405
Levate final. le 45 del rosso	360

Ma questi numeri sono in armonica proporzione; adunque lo sono pure i colori

710. 640. 600. 540. 480. 432. 405. 360
Re. Mi. Fa. Sol. La. Si. Ut. Re.

Se adunque l'armonico principio ci ricrea collo spettacolo variegato de' colori. Se l'armonico principio ci alletta coll' armonia de' suoni. Se con legge armonica sono ribenuti i pianetti nelle loro orbite. Se da principio armonico si divide la corda in $1. \frac{1}{3}. \frac{1}{5}$.

Se toccando due corde si sente un terzo

suono

suono del tutto armonico: Ben vedete,
che con questi esempj abbastanza si
prova, che l'armonico principio ha luogo
nelle cose, che natural^{mente} si fanno. Anzi
essi fan nascere la speranza, che, provare
una volta si possa, aver luogo lo stes-
so principio ancora negli oggetti degli al-
tri sensi, ed in altre naturali cose, se
i Filosofi rivolgevano i lor studi a
questa cosa, che finora hanno ben troppo
negletta. V

Quanto più esempj si andassero
discuoprendo, tanto più ci avvicinavamo
a poter conoscere, se questo principio
abbia luogo in tutte le Opere della
Natura; e se quell'ordine delle cose,
senza di cui esse non si possono perfet-
tamente conoscere, sia quella vera ordinat^{ione}
serie, che in se comprende tutte le ar-
moniche proporzioni. Che così sia la
facenda, lo ha creduto Platone, che
per quelle sue Idee Archetipe, a nor-
ma di cui tutte le cose son fatte, al-
tro non intende, che i rapporti, e le pro-
porzioni delle cose. E nello stesso modo
ha pensato Pitagora, mentre ha detto,
che tutte le cose sono fatte di mate-
ria, e di numeri, per i quali numeri
egli ha inteso le proporzioni da essi
numeri espresse, le quali, mentre con
certa legge

con certa legge sono applicate alla
 materia, la dividono in iperzie, improprie
 mendo ad essa le forme, per cui la
 materia, ch'è in tutte le cose, la
 stessa, diversificata in diverso modo
 nelle specie tutte, costituisce le va-
 rie classi delle cose, le quali classi,
 e specie sono costantemente le stesse,
 come sempre le stesse sono le ragioni,
 da cui le specie stesse son formate.

Parte III.

Io so bene, che questo metafisico
 modo di filosofare è da lungo tempo
 andato affatto in disuso. Onde preveggo,
 che parra' strano a più di uno, che
 siavi a questi dì, chi pretendea, che
 le ragioni, e proporzioni siano le for-
 me delle cose, e che da queste pro-
 porzioni principat. la loro natura di-
 pendea. Hanno adottato già i più, che
 filosofar si debba per via di esperienza,
 acciò per mezzo di essa la Natura
 manifesti il modo suo di operare, e
 quindi si deducano le proprietà delle
 cose, e dalle proprietà final. la
 indole, e la natura delle cose stesse.

Ma si avverta, che io non pretendo
 già, che questa armonica maniera sia
 la sola, per cui si debba filosofare;
 anzi neppure

21
16
anri neppure so, se per via di questi
armonici principj si possano dilatar molto
i confini della naturale filosofia.

Io in oggi accinto mi sono soltanto
a propor questa strada, come la
unica, per cui sono andati Liba-
gora, e Platone; parendomi, che
così avendo la faccenda, non si possa
senza colpa di audacia condannare
questi grandi uomini, senza ridurre
la cosa ad un serio esame: e tan-
to più quanto non mancano esempi
di cose naturali rette da armonico
principio.

Per altro abbiasi pure la dovuta
stima per gli esperimenti, i quali ancor
a questo modo di filosofare sono on-
ninamente necessari; mentre da essi
principalmente sono procedute le cose, che
oggi in questo proposito abbiamo detto,
come ancor quanto nelle prima lezione
dell' anno scorso abbiamo avanzato.

Non sono già fra loro opposte que-
ste due maniere di filosofare, cioè le
armoniche proporzioni, e gli esperimenti;
ma possono fra loro benissimo com-
binarsi. Sta solo quanto per via
di esperimenti si è scoperto delle

proprietà

proprietà, e delle forze de' corpi, e della vana loro indole. Ma vi manca ancora un principio universale, che tutte queste cose contenga, ed al suo seno le cavi, e le difonda. Questo principio ben merita di esser ricercato. Noi abbiamo manifestato un nostro soggetto. Questo principio sarebbe egli per sorte armonico, il cui ordine, e le cui proporzioni siano appunto quelle dell'armonica serie?

Se c'ingannassimo qual danno mai ne riportarrebbe la naturale filosofia? Ma se non c'ingannassimo quant' mai, e quali comodi non ne ricaverebbero i fisici?

Finora altre cause non si conoscono, che le infime, e prossime, ma s'ignora del tutto il principio, da cui dipendono. Di queste cause, che non s'ignorano altro non se ne sa, se non se che son cause; ma cosa esse siano, e d'onde nascano, del tutto s'ignora. L'attrazione, per es., che agisce in duplicata inversa delle distanze, si conosce, che agisce così dagli effetti; ma cosa ella sia, ed in qual modo essa gravi, nessun uomo lo ha ancora scoperto. Si sa la quantità di questa forza; ma qual ne sia

ma qual ne sia la natura onninamente
s' ignora.

Ma se si suppone una volta,
che un armonico principio dall'Autore
del tutto fosse stato impresso alle
cose; e da questo principio legittimo
si deducesse il modo di operare dell'
attrazione: come nella prima lezione
dell'anno scorso ci siamo ingegnati
di dimostrare: non solo si conoscerebbe dalle leggi dell'attrazione nascere il moto
dei Pianeti, e la legge che tiene
unito questo Universo; ma si sap-
rebbe ancora la natura di questa
legge; e si conoscerebbe un principio
armonico universale, da cui e l'attra-
zione, e tutti gli effetti di essa trarrebbero
la loro origine. Ed ecco già un
vastissimo campo, per cui l'armonica
legge largamente si diffonderebbe. Le
leggi inoltre de' suoni, e de' colori,
e de' due nobilissimi sensi, di cui
i suoni, ed i colori sono gli oggetti, e
forse gli altri sensi ancora, e gli
oggetti loro dalla stessa armonica
radice si troverebbero dipendenti.

Che se poi gli avversarj ci co-
stringessero a dire cosa sia questo
principio, e quale sia il modo suo
di operare. Primo di tutto siamo lecito
di osservare, che quando ancora niente

sopressimo

apertissimo, ad una sì fatta interrogazione, rispondere, non sarebbe però la condizione nostra, in modo alcuno peggiore di quella de' Newtoniani, che ad ogni tratto ricorrono alle leggi della natura. Anco noi dir potremmo quell' armonico principio una legge di natura; ma vi sarebbe fra loro, e noi questa importante differenza, che noi porremo questo principio come una sola, ed unica legge di natura, mentre essi a tante ne ricorrono, quanti sono i fenomeni da spiegarsi.

Ma siamo ben lontani dal non rispondere alla loro interrogazione.

Ora è questo principio armonico?

Dicon essi; cioè dimandano quale sia la natura di questo principio.

Rispondiamo francamente: essa è armonica. Ma in qual modo opera questo principio? In quel modo, rispondiamo, in cui opera deve una forza, che agisce insieme con una resistenza, che reagisce. Ma d'onde sai tu, dimandano ancora, che da una forza, che agisce, e da una resistenza, che reagisce nasce debba questo modo di operare? All' esperienza, io rispondo, senza d' cui niente può sapersi intorno a' corpi.

Sarebbero

Sarebbero adunque questa diff. fra
questo, e gli altri modi di filosofare:
che quelle cose, che gli altri fan na-
scere da varj, e fra loro affatto dis-
giunti principj, noi le faremmo na-
scer da un principio comune. di tutti
i loro principj.

Conclusione

Ma è tempo ormai, che il no-
stro discorso ritorni là, d'onde si è
da principio partito.

I. Conviene a' Filosofi ricercar l'ordi-
ne delle cose, e la proporzione del
tutto alle parti, e delle parti fra
loro; giacchè senza conoscere questo
ordine, noi con una vana lusinga
ci andiamo persuadendo di conoscere quelle
cose, che innanzi non conosciamo.

II. Se questo ordine, questo rapporto,
questa proporzione delle cose sia ar-
monica, sarebbe da seriamente esam-
inarsi; giacchè vi sono alquanti esem-
pij, che rondon probabile, che ciò sia.

III. Se a tanto i Filosofi avran
potessero coll' esperienza per guida,
e col discorso, suscriverebbero un prin-
cipio universale armonico, da cui, come
da fonte, e radice, tutti gli altri principj trarrebbero
la loro origine; e suscriverebbero quella catena,
di cui la natura si serve per tenere unite tutte
le cose, e formarne questo bellissimo, ed ordinatissimo

l'universo



36
l'universo, nel quale niente vi di sconco,
niente fuor di misura; ma tutto con-
pira a formare la immutabile serie
delle specie, resa più bella dalla infinita
varietà degl'individui, e dai perpetui
movimenti, e dalle mutabilissime vicis-
situdini de' tempi. A quali movimenti
però, le quali vicissitudini, come pure
sarebbero rette dalle stesse leggi e
dalle stesse proporzioni.

~~Proporzioni~~

Ecco ove tendeva tutto questo no-
stro discorso, cosa siamo in uso di nuovo,
cosa contenga di vero, a voi lettori
amabilissimi ne rimetto il giudizio.

Se queste cose nostre saranno da voi
approvate, grande sarà la nostra con-
solazione, e l'approvazione vostra
sarà per noi un acerbissimo sprone,
che ci farà aumentare quel poco
verbo, con cui ci offriamo di
porre in tutto il suo lume questa
materia.

Se se tali cose a voi non
non piaceranno, ci lusinghiamo, che i nostri
sforzi non vi saranno dispiaciuti. Che
sia ciò credere la grandezza della
giacché nelle cose grandi vuole però il buon volere
esser creduto bastante.

Terzo suono, e Circolo

Dalla sola musica si ha la retta
intelligenza delle ragioni, non tanto in
genere per quella sì dilettevole armonia,
che procede dall' applicazione di esse
ragioni ai corpi sonori, e che ha la
facoltà di arrivare a dominare negli
animi umani; quanto in specie, e
precisione per quel terzo suono,
che risulta da ciascuna ragione
applicata a' corpi sonori.

Il fenomeno è questo: applicata
la ragione dupla $1:2$ a due cor-
pi sonori, dai loro due suoni simul-
tanei risulta un terzo suono unis-
sono al suono 1, cioè di tutta la
corda. Applicata la sesquialtera
 $1:2$ a due corpi sonori, risulta
lo stesso terzo suono unisono al
suono 1, cioè di tutta la corda.

Applicata la sequiteria $1:3$, risul-
ta lo stesso 1, cioè il suono di tutta
la corda. In somma applicata
qualunque ragione per diff. 1, e
per diff. 2 fra i denominatori dell'
armonica serie; p. e. $1:100$;

$1:155$ &c. costantemente da tutte

Dal 3. suono si ha scienza positi-
va, e reale della consonante armonia,
di cui non è vero, che altri principj
non vi siano, se non il piacere che
da' all' udito.

			Terzo suono	
$1:2$	$2:1$	$2:2$	$2 \times 1 = 2$	$\frac{2}{2}$
$\frac{1}{2}:1$	$3:2$	$\frac{3}{2}:2$	$2 \times 3 = 6$	$\frac{6}{2}$
$\frac{1}{3}:1$	$4:3$	$\frac{4}{3}:3$	$3 \times 4 = 12$	$\frac{12}{3}$

Quando, invece di $1:2$, dico $2:1$,
dico 2 unità aritmetiche ad una;
ma 2 unità aritm. fanno un' armo-
nica; dunque 6. Così 6 aritm. fa-
ran un armonica: 12 aritm. far-
anno pure un' armonica. &c.

$\frac{1}{100}:\frac{1}{101}$	$\frac{101}{100 \times 101}:\frac{100}{100 \times 101}$	$100 \times 101 = \frac{10100}{10100}$
$\frac{1}{155}:\frac{1}{156}$	$\frac{156}{155 \times 156}:\frac{155}{155 \times 156}$	$155 \times 156 = \frac{65915}{65915}$

$$\begin{aligned}
 1 \times \frac{1}{2} &= \frac{1}{2} & 1 \times 2 &= 2 \\
 \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} &= \frac{1}{6} & 2 \times 3 &= 6 \\
 \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} &= \frac{1}{12} & 3 \times 4 &= 12
 \end{aligned}$$

La moltiplica delle frazioni dà nel prodotto il n.º delle
parti, in cui si divide la corda. E la moltiplica del n.º che
uno in inversa delle frazioni dà il prodotto tutte le
parti della corda. p. e. 6. 12 &c. i quali divisi per
le ragioni

le ragioni si separate, che congiunte
in proporzione, e serie, risulta lo stesso
terzo suono, uniscono al suono $\frac{1}{2}$, ch'
è il tutto dell' armonica proporzione,
e serie.

La sua formula si ha unicamente
dal numero comune aritmetico, ed è la
moltiplica fra loro dei due numeri della
ragione, in cui sono i due dati suoni;
ed il prodotto è il terzo suono. Siano
i due suoni in dyola $1 : \frac{1}{2} :: 2 : 1$;
il terzo suono sarà $1 \times 2 = 2$. Siano
in sesquialtera $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2$, il terzo
suono sarà $2 \times 3 = 6$

Per poi ridurre i varj prodotti, che
li rappresentano all' unità, in cui
finiscam. è il terzo suono, si ridu-
cano le diverse ragioni a denomi-
nazione comune

$$1 : \frac{1}{2} \quad \frac{2}{2} : \frac{1}{2} \quad \frac{1 \times 2}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} : \frac{2}{6} \quad \frac{2 \times 3}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\text{Altro modo } 1 : \frac{1}{2} :: 6 : 3$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2$$

di 6:3 il terzo suono è = 6; di 2:3
il terzo suono è = 6. $6 \cdot 3 \cdot 2 :: 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$

Questa formula, che nel terzo suono
risolve tutte le indefinite ragioni della
serie nell' armonica unità, ch'è il

principio

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$$

Il divisore comune 6,
che si può omettere ne'
numeri esprimeati le ra-
gioni, si riassume nel
prodotto; si avrà sempre
uno per indicare in quante
unità aritmetiche si conce-
pisca divisa in essa ragione
la unità armonica.

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$$

$$\frac{24}{24} \cdot \frac{12}{24} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24}$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} :: 4 : 3$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$\frac{12}{12} : \frac{4}{12}$$

il principio, ed il tutto della serie, si verifica nella sola armonica proporzionale, e serie; non si verifica in qualunque altra si voglia. Però che in ^{ogni una} qualsiasi, che non sia l'armonica, l'unità del terzo suono si moltiplica, e diversifica in più unità fra loro diverse, che vuol dire in più principj, che non hanno, né possono aver un principio comune.

L'adeguata idea di questo fatto si ha precisamente nelle geometriche figure. Lato il cerchio, dal centro, alla circonferenza ^{la} è completa^{te} misurato dal raggio, come unità di misura. Lato il triangolo equilatero, dal centro agli angoli si trova la misura comune, non si trova nella perpendicolare dal centro. La stessa diversità di misura succede pure nel quadrato, ed in tutte queste le assegnabili figure, fuorché nel solo cerchio.

Da questo terzo suono si deducano i numeri consonanti, e la ragione perché sono tali: cioè si deduce la scienza dell'armonia indicata, e

Terzo suono scoperto dal Tartini nel 1714 in Ancona; da lui stampato nel 1754 nel suo Trattato di Musica, comunicato ad Eulero, d'Alémbert, L'Esseur, e Laguerre, ma da loro poco considerato, come appartenente unicamente alla Musica, perché è il basso fondamentale dell'armonia devolta.

48
dedotta dal terzo suono.

In fatti la consonante armonia è la congiunzione delle parti nell'unità del loro tutto: perchè quanto più le parti sono congiunte nell'unità del loro tutto, tanto più l'armonia è consonante nel suo effetto, ch'è il piacer dell'udito; e però la perfettissima consonante armonia è la perfettissima congiunzione delle parti nell'unità del loro tutto. Dati

2^o C. in simultanea consonante armonia tre suoni in ragione di $\frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$;

quest'armonia non sarà così perfetta, come lo era coll'interporvi fra $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ il mezzo armonico $\frac{1}{3}$. Simil.

Dati tre suoni $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6}$, l'armonia non sarà così perfetta, come lo era trasportando la dupla $\frac{1}{3} : \frac{1}{6}$ al suo vero luogo in $1 : \frac{1}{2}$. L'evidentissimo mag. piacer dell'orecchio comprova quanto abbiain asserito.

Si ha dunque dal 3.^o suono scienza positiva, e reale della consonante armonia, e non è vero, come si è creduto dai musici, e da altri fra i filosofi, che consonanza sia quella, che piace all'udito; la dissonanza quella, che

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} :: \frac{4}{8} : \frac{2}{8} :: 4 : 2 \quad 4 \times 2 = 8$$

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} :: \frac{5}{20} : \frac{4}{20} :: 5 : 4 \quad 4 \times 5 = 20$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: \frac{3}{6} : \frac{2}{6} :: 3 : 2 \quad 3 \times 2 = 6$$

$$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} :: \frac{4}{12} : \frac{3}{12} :: 4 : 3 \quad 4 \times 3 = 12$$

Ma nel 1.^o caso 8 unità fanno un'unità armonica; nel 2.^o 20, nel 3.^o 6, e nel 4.^o 12

che dispiace all' udito, e nulla più.
Poichè nell' unità del 3. suono ~~fitto~~ =
candosi la cagione della consonante na-
tura, e la notizia della cagione
formando vera scienza, ~~con~~ ciò si veri-
fica precisa: il detto di Platone,
in cui asserisce, che nell' altro suono,
che s'ode fra lo spazio de' suoni, c'è
la cagione, per cui i numeri conso-
nanti siano tali.

Rimane a verificarsi l'altra
parte dello stesso detto, che dice:
trovar quali siano i numeri consonanti.

Nella musica attuale cinque sono
le ragioni consonanti; dupla $1: \frac{1}{2}$,
sesquialtera $\frac{1}{2}: \frac{1}{3}$, sequiterza $\frac{1}{3}: \frac{1}{4}$,
sequivarta $\frac{1}{4}: \frac{1}{5}$, e sesquiquinta
 $\frac{1}{5}: \frac{1}{6}$.

Due sono i modi, maggiore, e mino-
re, armonico, ed aritmetico, di que-
sta consonante armonia in genere; l'
armonica espressa dalle ~~dalle~~ ragioni
in armonica progressione $1: \frac{1}{2}: \frac{1}{3}: \frac{1}{4}: \frac{1}{5}: \frac{1}{6}$,
e dal numero 60. 30. 20. 15. 12. 10,
e questa pratica si chiama del
modo maggiore; e l'aritm. ^{ica} espressa
dal numero in aritm. ^{ica} progressione

$1: 2: 3: 4: 5: 6$, e questa praticamente
 $10: 20: 30: 40: 50: 60$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{60}{120} \cdot \frac{40}{120} \cdot \frac{30}{120} \cdot \frac{24}{120} \quad 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120 \text{ unità}$$

aritmetiche, che fanno un' unità
armonica e.

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{6} :: \frac{6}{18} : \frac{3}{18} :: 6:3 \quad 3 \times 6 = 18$$

$$1 : \frac{1}{2} :: \frac{2}{2} : \frac{1}{2} :: 2:1 \quad 1 \times 2 = 2$$

$$1 : \frac{1}{3} :: \frac{3}{3} : \frac{1}{3} :: 3:1 \quad 3 \times 1 = 3$$

$$1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{3} :: \frac{6}{6} : \frac{3}{6} : \frac{2}{6} \quad 6 \times 3 \times 2 = 36$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{6} :: \frac{18}{36} : \frac{12}{36} : \frac{6}{36} \quad 18 \times 12 \times 6 = 1296$$

$1: \frac{1}{2}: \frac{1}{3}: \frac{1}{4}: \frac{1}{5}: \frac{1}{6}$	$60: 30: 20: 15: 12: 10$
$1: 2: 3: 4: 5: 6$	$10: 20: 30: 40: 50: 60$

42
Si chiama del modo minore.

Questi due modi estenderasi fino alla sesto-^a ; il magg.^o da 1 fino ad $\frac{5}{4}$; il minore da 1 fino a 6, è chiaro, che i numeri consonanti devono esser sei, non più, nè meno.

Ma qui appunto s'incontra la massima difficoltà della consonante armonia, difficoltà fin'ora insuperabile, che ha dovuto, e mantiene i Musici, ed i Fisico-matematici nella disperazione di scioglierla. Questa consiste in due punti. 1.^o La consonante armonia è determinata con tal vigore al sesto-^a confine, che oltrepassandolo di qualsiasi ragione, che non sia delle replicate della sesto-^a, ma diversa, il consonante sistema inevitabilmente ~~si~~ cambia nel suo contrario, ch'è il dissonante sistema.

Dopo $\frac{5}{4}$ arm.^o, succede immed.
 $\frac{4}{3}$; dopo 6 ant.^o succede 7. La ragione formata da $\frac{5}{4} \cdot \frac{4}{3}$, ovvero da 6.7 è dissonante ; e così è di qualunque aggiunta ragione, diversa dalle cinque costituenti la sesto-^a.

Quale è adunque la ragione di questo

cambiamento totale di natura
fra $\frac{1}{6} : \frac{1}{7}$, o fra $6 : 7$, o fra

$\frac{1}{6} : \frac{1}{7} :: \frac{7}{4n} : \frac{6}{4n} :: 7 : 6$ $7 \times 6 = 42$

qual altra ragione, si assegna.

Dopo infinite, ma vane ricerche,
la ragione non si sa, e si confessa
di non saperla.

Secondo punto. Il modo magg.
consonante, ch'è l'armonico (prattic.
cant. di terza magg.) è determina-
to fisicam. consonante dal 3.° suono

= 1, come qui sopra si è spiegato.

Il modo minore consonante, ch'è
l'armonico (prattic. di 3.° minore)

non solam. non è, nè può esser
determinato consonante dal terzo
suono = 1, come lo è il modo magg.,

ma dal sistema di terza minore
risultando non uno, ma quattro terzi

suoni fra loro diversi, ne viene
che se questi fossero sensibili, ugual.

che i dati suoni, dai quali risultano,

la consonante armonia del modo

minore, diverrebbe dissonante, nè

in guisa veruna potrebbe aver

luogo nella musica attuale.

1. 2. 3. 4. 5. 6

$1 \times 2 = 2$

$2 \times 3 = 6$

$3 \times 4 = 12$

$4 \times 5 = 20$

$5 \times 6 = 30$

Sebbene, è più perfetta
 l'armonia del modo maggiore,
 il più però, ed il meno non
 mutano specie; l'uno, e l'altro
 restano nel genere della consonan-
 te armonia, anzi insieme costi-
 tuiscono il genere universale
 della consonante armonia, la
 quale poi si divide nelle due
 specie de' suddetti modi maggiore,
 e minore.

Ma che il modo mag. con-
 sonante dipenda da una cagione;
 ch'è la fisica del terzo suono, e
 che il modo minore dipenda certam.
 da una cagione diversa dal terzo
 suono, e certam. di genere di-
 verso dal fisico; questa è la
 massima difficoltà del 1^o punto.

Questa è impossibile a
 sciogliersi, quando non si assegni,
 e dimostri un principio ~~non principio~~
 p^o, ed universale della consonante
 armonia, il quale contenga in sè
 stesso i due diversi principj, come
 due specie diverse della consonante

45
23
de' due suddetti modi; e questi
due principj si risolvano nell' asse:
gnato, e dimostrato principio primo,
ed universale, il quale contenga in
se stesso eminentem^{te} l'essenza, e
natura dell' armonica unita^a edesa
a più di un genere; perchè se
prattica^{te} sia di genere fisico, non
può comprender la consonante
armonia del modo magg^{or}.

La ciò si rileva, che nel vero
universal principio della consonante
armonia, deve infallibil^{mente} trovarsi
la cagione del sestuplo consonante
confine; devono trovarsi i due di:
versi principj consonanti de' due
modi magg^{or}, e minore.

Ma la consonante armonia, è
la principalissima parte dell' ar:
monica scienza; e questa è fon:
data nel cerchio, ch'è il suo vero,
ed unico soggetto.

Anche nel cerchio infallibil^{mente} deve ri:
trovarsi la cagione del sestuplo
consonante confine; devono trovar:
si i due diversi consonanti principj
de' modi

di genere non fisico, non può com:
prender la consonante armonia
del modo magg^{or}.

modi mag^r, e minore.

È assioma più che propo-
sizione, che quando la stessa for-
mula si verifica in due soggetti
diversi, questi sono necessariamente
della stessa natura, e dipendono
dallo stesso principio: date qui
in serie le forme delle ragioni

$$1: \frac{1}{2} :: 2: 1 \quad 2$$

$$\frac{1}{2}: \frac{1}{3} :: 3: 2 \quad 6$$

$$\frac{1}{3}: \frac{1}{4} :: 4: 3 \quad 12$$

si fanno i terzi suoni 1. 6. 12 &c.,
che sono il terzo termine fisical-
mente, e voluto dalla natura, la
quale con questo terzo suono fa
passare i due dati suoni, ch'erano
in semplice ragione, all'armonica
proporzione, e serie.

La formola della dupla $1 \times 2 = 2$
è in semplice ragione, perchè
vi sono due soli termini. La
formola della sesquialtera $1 \times 3 = 6$
è in armonica propor^{ione}. 2. 3. 6.
La formola della sesquiterza
 $3 \times 4 = 12$ è in armonica serie
12. 6. 4. 3 interposto il mezzo
armonico 6 fra 12, e 4.

Il cerchio è l'universal
principio della consonante
armonia. In esso si trova
la ragione del seduplo con-
sonante confine; in esso
vi sono i due diversi prin-
cipi consonanti de' due mo-
di maggiore, e minore.

47
24

Le stesse forme delle ragioni $1. \frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}$ &c. siano applicate al diametro del cerchio.

Si tirino i seni FE, GD, LC, le corde AE, AD, AC, e le sotese BE, BD, BC relative a ciascuna ragione, cioè LC seno, AC corda, CB sottesa della dupla; GD seno, DA corda, DB sottesa della sesquialtera; FE seno, AE corda, EB sottesa della sesquiterza &c. Indi si assegnino i quadrati de' seni, corde, e sottese di ciascuna ragione;

Laorano

dupla. $\overline{LC} = 1$	$\overline{AC} = 2$	$\overline{CB} = 2$	$1 \cdot 2 \cdot 2$
sesquialtera. $\overline{GD} = 2$	$\overline{AD} = 3$	$\overline{BD} = 6$	$2 \cdot 3 \cdot 6$
sesquiterza. $\overline{FE} = 3$	$\overline{AE} = 4$	$\overline{EB} = 12$	$3 \cdot 4 \cdot 12$

Ma questa è formola di puro fondamento dimostrativo, ed è la sottera del terzo suono, perchè

quad. de' seni	corde	sottese	Terzi suoni
1	2	2	$1 \times 2 = 2$
2	3	6	$2 \times 3 = 6$
3	4	12	$3 \times 4 = 12$

Adunque il soggetto fisico, ch'è il terzo suono, ed il soggetto dimostrativo, ch'è il cerchio hanno natura, e principio comune.



48
Adunque se il soggetto fisico è reale, indipendente dall' umano intelletto, ed il soggetto dimostrativo è della stessa natura, e principio del fisico soggetto, è forza, che il soggetto dimostrativo sia uguale reale, che il fisico, ed uguale indipendente dall' umano intelletto.

Questa è la massima scienza, che proviene da questo punto di vista; ma non è tutta. Il suo complemento si è, che la forma del cerchio è debita dai quadrati, de' quali sono radici le linee de' seni, corde, e sottrase; ma la formula del terzo suono è di quantità razionale nel prodotto de' termini delle ragioni $1 \times 2 = 2$; $2 \times 3 = 6$ &c.

Adunque la massima realtà è nella formula del cerchio fondata nelle radici $\sqrt{1} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ &c.

Adunque la massima realtà è nella formula del cerchio, fondata nelle radici, non nella formula del terzo suono, espressa nel diametro, la quale è fondata ne' prodotti; essendo

$$\overline{LC} = AL \times LC = 1 \times 1 = 1$$

$$\overline{AC} = \overline{AL} + \overline{LC} = 1 + 1 = 2$$

$$\overline{CB} = \overline{BL} + \overline{LC} = 1 + 1 = 2$$

$$\overline{GD} = AG \times GB = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 1 \times 2 = 2$$

$$\overline{AD} = \overline{AG} + \overline{GD} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \times 2 = 2$$

$$\overline{BD} = \overline{BG} + \overline{GD} = 2 + 2 = 6$$

$$\overline{FE} = AF \times FB = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 1 \times 3 = 3$$

$$\overline{AE} = \overline{AF} + \overline{FE} = 1 + 3 = 4$$

$$\overline{BE} = \overline{BF} + \overline{FE} = 3 + 3 = 12$$

$$\overline{GD} = AGB = 1 \times 2 = 2$$

$$\overline{AD} = \overline{BAE} = 3 \times 1 = 3$$

$$\overline{BD} = \overline{ABG} = 3 \times 2 = 6$$

$$\overline{FE} = AFB = 1 \times 3 = 3$$

$$\overline{AE} = \overline{BAF} = 4 \times 1 = 4$$

$$\overline{BE} = \overline{ABF} = 4 \times 3 = 12$$

49
25

essendo fuori di controversia, che
la radice, sia fondamento del
prodotto, come lo è la cagione
dell' effetto.

Ora si ritorni a quella parte
dell' obbiezione, che dice: essere i
due principj dell' unità armonica,
opposti fra loro, cioè del 3.^o suono,
la cui unità risulta da due dati
suoni, fondati sopra una retta linea,
o corda fisico-sonora, e del cerchio,
la di cui unità non può aver rap-
porto con una retta linea.

L' obbiezione svanisce, perchè
il rapporto del 3.^o suono al cerchio
è tale, qual è la loro formola;
ma questa è la stessa nel 3.^o suono,
e nel cerchio, ed è dedotta dalle
stesse ragioni fisicamente costituenti
l' armonica unità del terzo suono,
dimostrativa^{te} costituenti l' unità
armonica del cerchio. Dunque la
loro armonica unità è la stessa
di natura, e di principio, e di
questo principio comune sono le
Ragioni. Il numero esprime tutte V

50
le ragioni, adunque dal numero è
espresso il principio universale dell'
armonia. La cognizione del num.
Platone la fa nascere dall' astro-
nomia, e dalla Musica, cose reali,
e non ipotetiche.

Teorema

Al diametro AC si faccia un
semicerchio, cui si tirino negli es-
tremi del diametro A, C le tan-
genti AB, CD, ciascheduna uguale
al raggio del cerchio, poi si tirino
la terza tangente BD; indi col
centro C, e coll' intervallo CA si
descriva il quarto di cerchio AuG,
e si compisca AG quadrato di AC.

Fatto questo, dal punto u, ove la
BD taglia il quadrante si tirino il
seno Mu, e dal centro la Cu pro-
lungandola fino che tagli in r la
tang. AB; e tirisi la rE parallela
ad AC, e si prolunghi la Mu in h.
Sare il rettangolo ME = AD. Poiché
il supplemento Au = uE, onde ag-
giunto di comune MD, ne risulta
AD = ME.

Simil.^{te} se per o, ove la rE taglia

Vedi Tartini Risposta alla
critica di M. le Ferre
pag. 30, e seg.

Il 3.^o suono è come tutta
la corda AC, o come il
radd.^o AD.

il quadrante, si tirì il seno **NO**,
 ed il raggio **CO** prolungandolo fino
 che incontra in **3** la **Mu** prolun-
 gata; e per questo punto **3** tirisi
 la **3F** parallela ad **AC**; ne risulta
 per la stessa ragione **ME = NF**.
 Poichè i supplmⁱ **MO**, **OF** sono
 uguali, onde aggiunto di comune
NE, sarà **ME = NF**, e così sempre
 Sono adunque uguali i paral-
 lelogrami **AD = ME = NF = RK**,
= PB.

∠ O dev' esser per
 tutto picciolo

Corollario I

La questa facile costruzione,
 non sarà difficile il ritrovare in
 quale proporzione stiano fra loro
 i lati di que' parallelogrami

$$CA \cdot CM \cdot CN \cdot CR \cdot CP$$

$$CD \cdot CE \cdot CF \cdot CK \cdot CX$$

Poichè d. $\overline{CA}^2 = \overline{Cu}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{Mu}^2$
 $= \overline{CM}^2 + \overline{AC}^2$

adunque $\overline{CA}^2 = \overline{CM}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{4}$,

$$\frac{3}{4} \overline{CA}^2 = \overline{CM}^2$$

$$\therefore \overline{CA}^2 = 4 \overline{CM}^2$$

$$\overline{CM} : \overline{AC} :: 3 : 4$$

$$CM : AC :: \sqrt{3} : \sqrt{4}$$

Ecco adunque in qual ragione siano
CM : AC. Datto ora a ricercare la
 ragione di **ED : CE : CM**.

$$AC \times CD = CM \times CE$$

$$AC \times \frac{AC}{2} = CE \sqrt{\frac{3}{4}} AC^2$$

$$= CE \times CA \times \sqrt{\frac{3}{4}};$$

$$\text{adunque } \frac{AC}{2} = CE \times \sqrt{\frac{3}{4}} = CD,$$

$$\text{dunque } AC = CE \sqrt{3}$$

$$\frac{AC}{\sqrt{3}} = CE = 2 \frac{CD}{\sqrt{3}} = CD \sqrt{\frac{4}{3}}$$

$$\text{adunque } CE : CM :: CD \sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{\frac{3}{4}} AC^2$$

$$:: \frac{1}{2} AC \sqrt{\frac{4}{3}} : AC \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$:: AC \sqrt{\frac{4}{3}} : 2 AC \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$:: \sqrt{\frac{4}{3}} : 2 \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$:: \sqrt{\frac{4}{3}} : \sqrt{3} :: \sqrt{4} : \sqrt{9} :: 2 : 3$$

Seguitando nello stesso modo
negli altri ~~altri~~ parallelogrami, sarà d.

$$\overline{CA}^2 = \overline{CO}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{NO}^2$$

$$= \overline{CN}^2 + \overline{CE}^2$$

$$= \overline{CN}^2 + \frac{4}{3} \overline{CD}^2$$

$$= \overline{CN}^2 + \frac{\overline{CA}^2}{3} \times \frac{4}{3}$$

$$= \overline{CN}^2 + \frac{\overline{CA}^2}{3}$$

$$\overline{CN}^2 = \overline{CA}^2 - \frac{\overline{CA}^2}{3} = \frac{2}{3} \overline{CA}^2$$

$$\overline{CN} : \overline{CM} :: \frac{2}{3} \overline{CA} : \frac{3}{4} \overline{CA}$$

$$:: \frac{2}{3} : \frac{3}{4} :: \frac{8}{12} : \frac{9}{12} :: 8 : 9$$

$$CN : CM :: \sqrt{8} : \sqrt{9}$$

$$\text{Ma } CF \times CN = CM \times CE = \frac{\overline{CA}^2}{2}$$

$$CF \times \sqrt{\frac{2}{3}} \overline{CA} = \frac{\overline{CA}^2}{2}$$

$$CF = \frac{\frac{1}{2} \overline{CA}^2}{\sqrt{\frac{2}{3}} \overline{CA}} = \frac{\frac{1}{2} AC}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{AC}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}}$$

$$CF : CN :: \frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} : \sqrt{\frac{2}{3}} AC ::$$

$$\frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} : AC \times \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} : AC \times \sqrt{\frac{2}{3}} :: \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}} : \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$:: 1 : \sqrt{\frac{8}{3} \times \frac{2}{3}} :: 1 : \sqrt{\frac{16}{9}} :: 1 : \frac{4}{3} :: 3 : 4 :: CF : CN.$$

Sarà in terzo luogo $\overline{CA} = \overline{CI}$
 $= \overline{CR} + \overline{RI} = \overline{CR} + \overline{CF} = \overline{CR} + \overline{AC}$

$$\overline{CR} = \overline{CA} - \overline{AC} = \overline{CA} - \frac{8}{3} \overline{CA} = \frac{5}{3} \overline{CA}$$

$$\overline{CR} : \overline{CN} :: \frac{5}{3} \overline{CA} : \frac{4}{3} \overline{CA} :: \frac{5}{3} : \frac{4}{3}$$

$$:: \frac{15}{24} : \frac{16}{24} :: 15 : 16.$$

$$CR : CN :: \sqrt{15} : \sqrt{16}$$

$$CR : CN :: \sqrt{15} : \sqrt{16} \text{ Ma } CR \times CK$$

$$= \frac{\overline{CA}^2}{2} ; \text{ adunque } CK = \frac{\overline{CA}^2}{2CR} = \frac{\overline{CA}^2}{2 \times \frac{5}{3} \overline{CA}}$$

$$CK : CR :: \frac{\overline{CA}^2}{2 \times \frac{5}{3} \overline{CA}} : \sqrt{\frac{5}{3}} \overline{CA} :: \frac{\overline{CA}^2}{2} : \overline{CA} \times \frac{5}{8}$$

$$:: \frac{1}{2} : \frac{5}{8} :: \frac{8}{16} : \frac{10}{16} :: 8 : 10 :: 4 : 5.$$

Sarà in 4.^o luogo $\overline{CA} = \overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ}$
 $= \overline{CP} + \overline{CR} = \overline{CP} + \frac{5}{3} \overline{CA} = \overline{CP} + \frac{20}{10} \overline{CA}$

$$\overline{CP} = \overline{CA} - \frac{20}{10} \overline{CA} = \frac{10}{10} \overline{CA} = \frac{3}{5} \overline{CA}$$

$$\overline{CP} : \overline{CR} :: \frac{3}{5} \overline{CA} : \frac{5}{3} \overline{CA} :: \frac{3}{5} : \frac{5}{3} :: \frac{24}{40} : \frac{25}{40} :: 24 : 25$$

$$CP : CR :: \sqrt{24} : \sqrt{25}$$

Ma $CP \times CX = \frac{\overline{CA}^2}{2}$

$$CX = \frac{\overline{CA}^2}{2CP} = \frac{\overline{CA}^2}{2 \times \frac{3}{5} \overline{CA}}$$

$$CP : CR :: \sqrt{24} : \sqrt{25}$$

$$CX : CP :: 5 : 6$$

$$CX : CP :: \frac{\overline{CA}^2}{2 \times \frac{3}{5} \overline{CA}} : \sqrt{\frac{3}{5}} \overline{CA} :: \frac{\overline{CA}^2}{2} : \frac{3}{5} \overline{CA}$$

$$:: \frac{1}{2} : \frac{3}{5} :: \frac{5}{10} : \frac{6}{10} :: 5 : 6$$

Ecco quanto si è dedotto dal mio
 Teorema riguardo alle proporzioni
 de' lati de' parallelogrami uguali.

$$CM : CA :: \sqrt{3} : \sqrt{4} :: \sqrt{3} : 2$$

$$CE : CM :: 2 : 3$$

$$CN : CM :: \sqrt{8} : \sqrt{9} :: \sqrt{8} : 3$$

$$CE : CN :: 3 : 4$$

$$CR : CN :: \sqrt{15} : \sqrt{16} :: \sqrt{15} : 4$$

$$CK : CR :: 4 : 5$$

$$CP : CR :: \sqrt{14} : \sqrt{15} :: \sqrt{14} : 5$$

$$CX : CP :: 5 : 6$$

Corollario 1^o

Se pertanto si faranno, con queste
proporzioni ora espresse, i rettangoli,
saranno uguali $AD = ME = NF = RK$
 $= PX$ & tutti esprimenti la formola
del terzo suono, ch'è $AB \times AC$.

Se faccio $AB = 1$, $AC = 2$, sarà $AB \times AC$
 $= 1 \times 2 = 2$. Ma se facessi

$$AC = 1, AB = \frac{1}{2}, \text{ sarebbe } AD = 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{Coroll. 2^o}$$

Si ha una serie di rettangoli $= AD$,
la qual serie di rettangoli si deduce
in genere dalla serie delle proporzioni
geometriche discrete.

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 42$ &c
tripla dupla superbiariz^{da} sesquial^{da} superbiariziente^{da}

Se si ha la serie de' rettangoli sud-
detti uguali fra loro di area, si ha,
dico in specie dal centro delle dette

proporzioni.

55.
28

proporzioni formate dai due mezzi ar-
monico, ed aritmetico

della sudupla 2.6	centro 3.4
della sudupla 6.12	8.9
della superbi 3.10.20	15.16
della superbi 10.30	24.25

Se individuo si ha il secondo
rettangolo proporzionando l'altezza del
secondo rettangolo all'altezza CA del
primo in ragione di $\sqrt{3} : \sqrt{4}$, e la
base di questo secondo alla sua al-
tezza $:: 2 : 3$.

Si avrà il terzo rettangolo facen-
do la sua altezza all'altezza del
secondo $:: \sqrt{8} : \sqrt{9}$, e la base di
questo terzo alla sua altezza $:: 3.4$ &c.

La costruzione per tanto di questi
rettangoli è essenziale. Fondata in quelle
specifiche proporzioni geometriche dis-
crete, in forza delle quali si di-
mostra il cerchio armonicamente
costruito. Questa serie di rettangoli

di area uguale, si risolve in una
serie di diagonali, tutte necessariam.
uguali ad AC, lato del semiquadrato AD,

ch'è

ch'è il suo principio primo.

Questa è quella linea, che nel suo principio primo dipende da un semiquadrato. Il semiquadrato come figura è $= \frac{1}{2}$; il lato come linea $= 1$. Tutte due queste formole del terzo suono, o basso armonico fondamentale, conducono ugualm^{te}, e necessariam^{te} al cerchio.

Si dimostra, che, diviso armonicalm^{te} il diametro per la serie delle frazioni $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$,

i quadrati del seno BC, della corda OC, e della sottesa AC, che dipendono dalla dupla $1:2$, sono

$1, 2, 4$. Così la formola del terzo suono dedotta dalla ragion dupla, è $1 \times 2 = 2$. I quadrati del seno, corda, e sottesa, che dipendono da $\frac{1}{3}$, sussesquialtero di $\frac{1}{2}$, sono $\overline{HD} = 2$,

$$\overline{OD} = 3, \overline{AD} = \overline{HD} + \overline{HA} = 6$$

$$= 2 + 2 \times 2 = 6$$

I quadrati del seno, corda, e sottesa, che dipendono da $\frac{1}{4}$ del diametro, sussesquiterzo di $\frac{1}{3}$, sono

$$\overline{IE} = \overline{OI} \times \overline{IA} = 1 \times 3 = 3; \overline{OE} = \overline{OI} + \overline{IE} = 1 + 3 = 4; \overline{AE} = \overline{AI} + \overline{IE} = 3 + 9 = 12, \text{ così la formola.}$$

La formola del terzo suono dedotta dalla sequiterza $3 \times 4 = 12$ & in infinito.

Nè mi si obbietti, che nel cerchio la formola per la dupla è

$\sqrt{1} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. In linea la formola del 3° suono $= 1 \times 2 = 2$

Nel cerchio per la sequiterza è $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. In linea 3° suono ugual $2 \times 3 = 6$; sicchè nel cerchio la formola è in radice, nel 3° suono in prodotto. Cioè non mi si obbietti (io diceva), perchè il prodotto necessariamente conduce alla radice; e la radice al prodotto.

Coroll. 4°.

Essendo adunque eguali i rettangoli AD, EM, essi avranno attorno dell'angolo C, i lati reciprocamente proporzionali (p. 14. lib. 6. Eucl.), sarà dunque $CD:CE::CM:CA$, cioè $Ma:Mh::CM:CA::\sqrt{3}:\sqrt{4}$.

Quindi $Mu^2:Mh^2::3:4$; ragione, che somministra due merri fra $2 \cdot 6$ per formare la proporzione

geometrica

Fig. 20 T. II

geometrica discreta 2. 3. 4. 6,
nella qual proporzione 3 è il mezzo
armonico, e 4 il mezzo aritmetico.

Sarimenti, essendo $EM = FN$, sarà

$$CE : CF :: CN : CM :: NO : NF :: \sqrt{8} : \sqrt{9}.$$

Quindi $NO : NF :: 8 : 9$; ragione
che forma il centro della propor.
g. d. 6. 8. 9. 12, essendo l'8 il
mezzo armonico, ed il 9 ~~il~~ il
mezzo aritm.^{co} fra 6. 12.

Nello stesso modo essendo $FN = KR$,

sarà $Ri : Rs :: \sqrt{15} : \sqrt{16}$, e però

$$Ri : Rs :: 15 : 16 : \text{ragione, che}$$

forma il centro della proporzione

g. d. 12. 15. 16. 20, in cui il
15 è il mezzo armonico, ed il
16 il mezzo aritm.^{co} fra il 12,
ed il 20

Coroll. 5.^o

Sal che si raccoglie, che i

$$\text{quad. } \overline{Mu} = 3, \overline{No} = 8, \overline{Ri} = 15,$$

i quali sono mezzi armonici fra

2. 6; fra 6. 12; fra 12. 20;

coll' estremità de' loro lati Mu,

No, Ri, determinano i tre

punti

punti a, o, z della circonferenza del cerchio descritto col raggio AC
 Coroll. 6.

Si può dovendo essere $A\phi + \phi N$
 $AN : NO :: NO : NA$ (Eucl. pro. 13. lib. VI)

lib. 6.), si trova essere $A\phi + \phi N \times NA$

$$= 56\sqrt{\frac{4}{3}}, \text{ cioè } 12544$$

$$- 75164 = 12544, \text{ cioè } 112896 - 75164$$

$$= \frac{37632}{9}, \text{ cioè } \frac{37632}{9} = \frac{37632}{9}$$

Si trova ancora essere

$$\frac{A\phi + \phi M \times MA}{112 + 56\sqrt{3} \times 112 - 56\sqrt{3}} = 56$$

$$\text{cioè } 12544 - 9408 = 3136$$

E così ancora final. si trova

$$\frac{A\phi + \phi R \times RA}{112 + 18\sqrt{10} \times 112 - 18\sqrt{10}} = 42\sqrt{\frac{14}{9}}$$

$$\text{o sia } 12544 - 7840 = 4704$$

Coroll. 7.

$$\text{Così pure sarà } \overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{Ma}^2 \\ = \overline{CN}^2 + \overline{NO}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{Ri}^2$$

Scolio

Il rett. EM è di area uguale all' area del semiquadrato AD ; ma non per

questo la sopra diagonale Ch del

rettang. EM è ugual al lato AC del

semiquadrato AD . E bensì $= AC$ la ipotenusa

La ipotenusa Cu del triangolo CMu ,
 e questa è determinata raggio di
 cerchio non da Mh , il di cui quad.
 $= 4$ è il mezzo aritmetico; ma da
 Mu , il di cui quad. $^o = 3$ è il mez-
 zo armonico della detta proporzione
 $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$. Lo stesso succede,
 nel rettangolo FN , della No , il di
 cui quad. $^o = 8$, e di Nl , il di cui
 quad. $^o = 9$, rispetto alla dupla geo-
 metrica descritta $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$, di cui
 8 è il mezzo armonico, e 9 il mezzo
 aritmetico. La ipotenusa Co è de-
 terminata raggio di cerchio da No ,
 e non da Nl .

Così nel rett. o KR rispetto alla
 superbiarziante terza geometrica descritta
 $12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20$; e così la indefinita
 serie di queste proporzioni con i mezzi
 determinati armonico, ed aritmetico.

Se dunque Mh mezzo aritme-
 tico conduce ad Mu , mezzo armo-
 nico della stessa proporzione, per
 formare la ipotenusa Cu , raggio
 di cerchio $= AC$; e così Nl ad
 No ; R_3 ad R_1 ; se il 3. o suono
 per la

formola comune alla semplice retta
 linea, ed alla retta figura ^{piana}, è ne-
 cessari^o in AC come principio
 primo: egli è evidente, che la
 formola della costruzione de' rettan-
 goli rappresentanti in retta figura
 piana il terzo suono, conduce ne-
 cessari^o al cerchio, e si risolve in
 AC, la di cui formola per il
 terzo suono essendo $1 \times 2 = 2$, è la
 stessa, per la semplice retta
 linea, e per la retta fig^a piana.
 Né sostanzial^o si è altra diversità,
 se non che dal progredire di questa se-
 conda formola, si ha nelle suddette
 proporzioni vera scienza dell' armo-
 nico principio del 3.^o suono.

2.^o 8.^o

$$\overline{Mu}^a : \overline{Mh}^a :: 3 : 4$$

$$\overline{Mh}^a - \overline{Mu}^a = 4 - 3$$

eccesi^o $\frac{1}{3}$ Osservate sugli avanzati,
 ovvero eccessi.

$$\overline{No}^a : \overline{Nl}^a :: 8 : 9$$

$$\overline{Nl}^a - \overline{No}^a = 9 - 8$$

$$\frac{1}{8}$$

$$\overline{Ri}^a : \overline{Rs}^a :: 15 : 16$$

$$\overline{Rs}^a - \overline{Ri}^a = 16 - 15$$

$$\frac{1}{15}$$

$$\text{Eccesi } \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15} :: 120 \cdot 45 \cdot 24$$

$$:: 8 \cdot 3$$

$$15 \cdot 8$$

Le diff^e sono come i merri armonici

$$3 \cdot 8 \cdot 15$$

3 · 8 · 15, cioè come i quadrati de

seri $\overline{Ma} : \overline{No} :: 3 : 8$

$$\overline{Mh} - \overline{Ma} : \overline{Nl} - \overline{No} :: 8 : 3$$

$$\overline{No} : \overline{Ri} :: 8 : 15$$

$$\overline{Nl} - \overline{No} : \overline{Rs} - \overline{Ri} :: 15 : 8$$

$$\overline{Ri} : \overline{Rs} :: 14 : 15$$

$$\overline{Rs} - \overline{Ri} : \overline{Pe} - \overline{Pg} :: 14 : 15$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{24}$$

$$\frac{8}{15} \cdot \frac{3}{8}$$

$$14 \cdot 15$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3+5} \cdot \frac{1}{8+7} \cdot \frac{1}{15+9}$$

A potrebbe per tanto proseguire in infinito.

$$\frac{1}{3+5+7+9+11} \cdot \frac{1}{3+5+7+9+11+13}$$

CD base ; CA altezza

$$CM : CA :: \sqrt{3} : \sqrt{4} ; CM = CA \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} CA \sqrt{3}$$

$$CE : CM :: 2 : 3 ; CE = CM \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2} CA \sqrt{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} CA \sqrt{3}$$

$$CN : CM :: \sqrt{8} : \sqrt{9} ; ~~CE~~$$

$$CN : \frac{1}{2} CA \sqrt{3} :: \sqrt{8} : \sqrt{9}$$

$$CN = \frac{1}{2} CA \sqrt{\frac{24}{9}}$$

$$CF : CN :: 3 : 4 ; ~~CF~~$$

$$CF : \frac{1}{2} CA \sqrt{\frac{24}{9}} :: 3 : 4 ; CF = \frac{1}{2} CA \sqrt{\frac{24}{9}} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} CA \sqrt{\frac{24}{9}}$$

$$~~CE : CF :: \frac{1}{3} CA \sqrt{3} : \frac{3}{8} CA \sqrt{\frac{24}{9}}~~$$

$$~~:: CA \sqrt{\frac{1}{3}} : \frac{3}{8} CA \sqrt{\frac{24}{9}} :: CA \sqrt{\frac{3}{9}} : \frac{3}{8} CA \sqrt{\frac{24}{9}}~~$$

~~$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{3} CA\sqrt{3} &: \frac{3}{14} CA\sqrt{14} \\ \therefore \frac{1}{3} CA\sqrt{3} &: \frac{1}{8} CA\sqrt{24} \\ \therefore \frac{1}{3} CA &: \frac{1}{8} CA\sqrt{8} \\ \therefore \frac{1}{3} &: \frac{1}{8}\sqrt{8} :: \frac{8}{14} : \frac{3}{14} \end{aligned}$$~~

$CM = CA\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$CN = CA\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
$CR = CA\sqrt{\frac{5}{8}}$	$\sqrt{\frac{5}{8}}$
$CP = CA\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
$C\delta = CA\sqrt{\frac{7}{12}}$	$\sqrt{\frac{7}{12}}$
$C\lambda = CA\sqrt{\frac{4}{7}}$	$\sqrt{\frac{4}{7}}$

$$\begin{aligned} Bu &= CA - CM = CA - CA\sqrt{\frac{3}{4}} = CA \times \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}} \\ ho &= CM - CN = CA\sqrt{\frac{3}{4}} - CA\sqrt{\frac{1}{3}} = CA \times \sqrt{\frac{9}{12} - \frac{4}{12}} \\ Li &= CN - CR = CA\sqrt{\frac{1}{3}} - CA\sqrt{\frac{5}{8}} = CA \times \sqrt{\frac{16}{24} - \frac{15}{24}} \\ sq &= CR - CP = CA\sqrt{\frac{5}{8}} - CA\sqrt{\frac{3}{5}} = CA \times \sqrt{\frac{25}{40} - \frac{24}{40}} \\ t2 &= CP - C\delta = CA\sqrt{\frac{3}{5}} - CA\sqrt{\frac{7}{12}} = CA \times \sqrt{\frac{36}{60} - \frac{35}{60}} \\ xy &= C\delta - C\lambda = CA\sqrt{\frac{7}{12}} - CA\sqrt{\frac{4}{7}} = CA \times \sqrt{\frac{49}{84} - \frac{48}{84}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bu &= \frac{CA}{\sqrt{4}} \times \sqrt{4-3} \\ ho &= \frac{CA}{\sqrt{12}} \times \sqrt{9-4} \\ Li &= \frac{CA}{\sqrt{24}} \times \sqrt{16-15} \\ sq &= \frac{CA}{\sqrt{40}} \times \sqrt{25-24} \\ t2 &= \frac{CA}{\sqrt{60}} \times \sqrt{36-35} \\ xy &= \frac{CA}{\sqrt{80}} \times \sqrt{49-48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Bu &= CA \times \sqrt{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}} \\ ho &= CA \times \sqrt{\frac{9}{12} - \frac{4}{12}} \\ Li &= CA \times \sqrt{\frac{16}{24} - \frac{15}{24}} \\ sq &= CA \times \sqrt{\frac{25}{40} - \frac{24}{40}} \\ t2 &= CA \times \sqrt{\frac{36}{60} - \frac{35}{60}} \\ xy &= CA \times \sqrt{\frac{49}{84} - \frac{48}{84}} \end{aligned}$$

Division.

Divisori.

$$\sqrt{4} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{60} \cdot \sqrt{84}$$

$$\therefore \sqrt{1} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{21}$$

Dividendi.

1 ^o	$\sqrt{4} - \sqrt{3}$	CA - CM
2 ^o	$\sqrt{9} - \sqrt{8}$	CM - CN
3 ^o	$\sqrt{16} - \sqrt{15}$	CN - CR
4 ^o	$\sqrt{25} - \sqrt{24}$	CR - CP
5 ^o	$\sqrt{36} - \sqrt{35}$	CP - CD
6 ^o	$\sqrt{49} - \sqrt{48}$	CD - CE

Radici de' mezzi
aritmetici

Radici de' mezzi
armonici

1 ^o	---	2	---	---	$\sqrt{3}$
2 ^o		3			$\sqrt{8}$
3 ^o		4			$\sqrt{15}$
4 ^o		5			$\sqrt{24}$
5 ^o		6			$\sqrt{35}$
6 ^o		7			$\sqrt{48}$

// Finisce tutto nella sesta.

uh.	ol	is	qt	2x	y m
$\frac{AC \times \sqrt{1}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}}$	$\frac{AC \times \sqrt{3}}{\sqrt{8} - \sqrt{9}}$	$\frac{AC \times \sqrt{6}}{\sqrt{15} - \sqrt{16}}$	$\frac{AC \times \sqrt{10}}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}$	$\frac{AC \times \sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{36}}$	$\frac{AC \times \sqrt{21}}{\sqrt{48} - \sqrt{49}}$
$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3} - \sqrt{4}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8} - \sqrt{9}}$	$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15} - \sqrt{16}}$	$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24} - \sqrt{25}}$	$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{35} - \sqrt{36}}$	$\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{48} - \sqrt{49}}$

60. 30. 20. 15. 12. 10

Inversa de' resti 30. 10. 5. 3. 2
13. 6. 10. 15

Di triangolari.

$$CD = \frac{1}{2} AC$$

$$CE = \frac{AC}{\sqrt{3}}$$

$$CF = \frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}}$$

$$CK = \frac{AC}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

$$CX = \frac{AC}{\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{12}{5}}}$$

$$CB = \frac{AC}{\sqrt{\frac{7}{12}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{28}{12}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{7}{3}}}$$

$$CY = \frac{AC}{\sqrt{\frac{4}{7}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{16}{7}}}$$

$$uh = CE - CD = \frac{AC}{\sqrt{3}} - \frac{AC}{2} = \frac{AC}{\sqrt{3}} - \frac{AC}{\sqrt{4}}$$

$$ol = CF - CE = \frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} - \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{9}{3}}}$$

$$is = CK - CF = \frac{AC}{\sqrt{\frac{5}{2}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{15}{6}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{16}{6}}}$$

$$gh = Ca - CK = \frac{AC}{\sqrt{\frac{12}{5}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{24}{10}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{25}{10}}}$$

$$zx = C\beta - Ca = \frac{AC}{\sqrt{\frac{7}{3}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{12}{5}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{35}{15}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{36}{15}}}$$

$$ym = CY - C\beta = \frac{AC}{\sqrt{\frac{16}{7}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{48}{21}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{49}{21}}}$$

$$uh = \frac{AC}{\sqrt{3}} - \frac{AC}{\sqrt{4}}$$

$$= AC \times \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} = AC \times \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{1}}{2}$$

$$ol = \frac{AC \times \sqrt{3}}{\sqrt{8}} - \frac{AC \times \sqrt{3}}{\sqrt{9}}$$

$$= AC \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = AC \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$is = \frac{AC \times \sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \frac{AC \times \sqrt{6}}{\sqrt{16}}$$

$$= AC \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{16}} = AC \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$gh = \frac{AC \times \sqrt{10}}{\sqrt{24}} - \frac{AC \times \sqrt{10}}{\sqrt{25}}$$

$$= AC \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}} - \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{25}} = AC \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{24}} - \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$zx = \frac{AC \times \sqrt{15}}{\sqrt{35}} - \frac{AC \times \sqrt{15}}{\sqrt{36}}$$

$$= AC \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{36}} = AC \times \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$ym = \frac{AC \times \sqrt{21}}{\sqrt{48}} - \frac{AC \times \sqrt{21}}{\sqrt{49}}$$

$$= AC \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{49}} = AC \times \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{48}} - \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Divisori

	Radici de' mezzi armonici	Radici de' mezzi aritmetici	Radici de' mezzi 2i armonici	Numeri naturali
	$\sqrt{3}$ —	$\sqrt{4}$	$\sqrt{3}$	2
Centri	$\sqrt{8}$ —	$\sqrt{9}$	$\sqrt{6}$	3
delle	$\sqrt{15}$ —	$\sqrt{16}$	$\sqrt{15}$	4
ragioni	$\sqrt{24}$ —	$\sqrt{25}$	$\sqrt{24}$	5
	$\sqrt{35}$ —	$\sqrt{36}$	$\sqrt{35}$	6
	$\sqrt{48}$ —	$\sqrt{49}$	$\sqrt{48}$	7

$$\begin{array}{cccccc} \text{Bu} & \cdot & \text{ho} & \cdot & \text{li} & \cdot & \text{sq} & \cdot & \text{82} & \cdot & \text{xy} \\ \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{1}} & \cdot & \frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}} & \cdot & \frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{6}} & \cdot & \frac{\sqrt{25}-\sqrt{24}}{\sqrt{10}} & \cdot & \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{\sqrt{15}} & \cdot & \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{\sqrt{21}} \end{array}$$

1 . 3 . 6 . 10 . 15 &c. in inversa de' recti;

adunque Bu . ho . li &c. stanno in ragion composta della
diretta, subduplicata de' recti, e della
parimenti diretta della differenza,
che passa fra le radici de' ter-
mini, che costituiscono i centri
delle ragioni

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$$

$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$$

$$12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20$$

$$20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 30$$

$$30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 42$$

$$42 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 56$$

$$AD = AC \times CD = AC \times \frac{1}{2} AC = \frac{AC^2}{2}$$

$$CM : CA :: \sqrt{3} : \sqrt{4} :: \sqrt{3} : 2 ; CM = \frac{\sqrt{3}}{2} CA$$

$$CE : CM :: 2 : 3 ; CE = \frac{2}{3} CM = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} CA = \frac{CA\sqrt{3}}{3}$$

$$ME = CM \times CE = \frac{CA\sqrt{3}}{2} \times \frac{CA\sqrt{3}}{3} = \frac{CA^2 \times 3}{2 \times 3} = \frac{CA^2}{2}$$

$$CN : CM :: \sqrt{8} : \sqrt{9} :: \sqrt{8} : 3 ; CN = \frac{\sqrt{8}}{3} CM = \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} CA$$

$$CF : CN :: 3 : 4 ; CF = \frac{3}{4} CN = \frac{\sqrt{24}}{4} CA$$

$$= \frac{3}{4} \times \frac{\sqrt{24}}{6} CA = \frac{\sqrt{24}}{8} CA$$

$$MF = CN \times CF = \frac{\sqrt{24}}{6} CA \times \frac{\sqrt{24}}{8} CA = \frac{CA^2 \times 24}{48} = \frac{CA^2}{2}$$

$$CR : CN :: \sqrt{15} : \sqrt{16} :: \sqrt{15} : 4$$

$$CR = \frac{\sqrt{15}}{4} CN = \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{24}}{6} CA = \frac{\sqrt{15 \times 24}}{24} CA = \frac{\sqrt{360}}{24} CA$$

$$CK : CR :: 4 : 5 ; CK = \frac{4}{5} CR$$

$$CK = \frac{4}{5} \frac{\sqrt{360}}{24} CA = \frac{4\sqrt{360}}{120} CA = \frac{\sqrt{360}}{30} CA$$

$$RK = CR \times CK = \frac{\sqrt{360}}{24} CA \times \frac{\sqrt{360}}{30} CA = \frac{CA^2 \times 360}{720} = \frac{CA^2}{2}$$

$$CP : CR :: \sqrt{24} : \sqrt{25} :: \sqrt{24} : 5 ;$$

$$CP = \frac{\sqrt{24}}{5} CR = \frac{\sqrt{24}}{5} \times \frac{\sqrt{360}}{24} CA = \frac{\sqrt{24 \times 360}}{120} CA = \frac{\sqrt{8640}}{120} CA$$

$$CX : CP :: 5 : 6 ; CX = \frac{5}{6} CP = \frac{5}{6} \times \frac{\sqrt{8640}}{120} CA = \frac{5\sqrt{8640}}{720} CA = \frac{\sqrt{8640}}{144} CA$$

$$PX = CP \times CX = \frac{\sqrt{8640}}{120} CA \times \frac{\sqrt{8640}}{144} CA = \frac{CA^2 \times 8640}{17280} = \frac{CA^2}{2}$$

$$CL : CP :: \sqrt{35} : \sqrt{36} :: \sqrt{35} : 6$$

$$CL = \frac{\sqrt{35}}{6} CP = \frac{\sqrt{35}}{6} \times \frac{\sqrt{8640}}{120} CA = \frac{\sqrt{35 \times 8640}}{720} CA = \frac{\sqrt{302400}}{720} CA$$

$$C\beta : C\lambda :: 6:7 ; C\beta = \frac{6}{7} C\lambda$$

$$C\beta = \frac{6}{7} \times \frac{\sqrt{302400}}{720} C\lambda = \frac{\sqrt{302400}}{7 \times 120} C\lambda = \frac{\sqrt{302400}}{840} C\lambda$$

$$\lambda\beta = C\lambda \times C\beta = \frac{\sqrt{302400}}{720} C\lambda \times \frac{\sqrt{302400}}{840} C\lambda = \frac{302400}{720 \times 840} C\lambda^2$$

$$= \frac{302400}{604800} C\lambda^2 = \frac{C\lambda^2}{2}$$

$$C\lambda : C\lambda :: \sqrt{48} : \sqrt{49} :: \sqrt{48} : 7$$

$$C\lambda = \frac{\sqrt{48}}{7} C\lambda = \frac{\sqrt{48}}{7} \times \frac{\sqrt{302400}}{720} C\lambda = \frac{\sqrt{48 \times 302400}}{5040} C\lambda$$

$$= \frac{\sqrt{14515200}}{5040} C\lambda$$

$$C\gamma : C\lambda :: 7:8$$

$$C\gamma = \frac{7}{8} C\lambda = \frac{7}{8} \times \frac{\sqrt{14515200}}{5040} C\lambda = \frac{\sqrt{14515200}}{8 \times 720} C\lambda$$

$$= \frac{\sqrt{14515200}}{5760} C\lambda$$

$$\lambda\gamma = C\lambda \times C\gamma = \frac{\sqrt{14515200}}{5040} C\lambda \times \frac{\sqrt{14515200}}{5760} C\lambda$$

$$= \frac{14515200}{5040 \times 5760} C\lambda^2 = \frac{14515200}{29030400} C\lambda^2 = \frac{C\lambda^2}{2}$$

De' Triangoli Pitagorici

Teorema

69
35

MUNICIPIO
PIRANO

Data una ragione co' meri determinati armonico, aritmetico, e contrarmonico: la diff.^{za} de' quadrati de' meri arm.^{co}, e contrarmon.^{co} sarà sempre un quadrato.

Per le cose dette nel libro II, la ragione di a: a+nd con tutti i suoi meri è la seguente

$$\begin{array}{ccccccc} aa+ad & . & aa+nad & . & aa+nad+dd & . & aa+nad+ndd & . & aa+3ad+ndd \\ \text{arm.} & & \text{arithm.} & & & & \text{contrarm.} & & \end{array}$$

La diff.^{za} per tanto de' quadrati del merco armonico, e contrarmonico, sarà

$$\overline{aa+nad+ndd} - \overline{aa+nad} = 4add + 8ad^2 + 4d^4 = \overline{nad+ndd}^2$$

Adunque la diff.^{za} de' quad.ⁱ del merco arm.^{co}, e contrarm.^{co} sarà sempre un quad.^{ro}

Coroll. I.

È chiaro per tanto, che il merco armonico, il contrarm.^{co}, e la radice della diff.^{za} de' lor quadrati faranno sempre un triangolo Pitagorico: eccone

$$\begin{array}{ccc} aa+nad & . & nad+ndd & . & aa+nad+ndd \\ \text{arm.} & & \text{diff.} & & \text{contrarm.} \end{array}$$

$$a \times \overline{a+nd} \quad \overline{a+nd} \times nd \quad . \quad n \times \overline{a+nd} - a \times \overline{a+nd}$$

Un lato si determina sempre dal merco aritmetico; L'altro dal merco arm.^{co}, o sia seno; e la ipotenusa dal merco contrarm.^{co} della rispettiva proporzione.

12. 3. 4. 5. 6	5x5-3x3=16	4. 3. 5
6. 8. 9. 10. 12	10x10-8x8=36	6. 8. 10
12. 15. 16. 17. 20	17x17-15x15=64	8. 15. 17
20. 24. 25. 26. 30	26x26-24x24=100	10. 24. 26
30. 35. 36. 37. 42	37x37-35x35=144	12. 35. 37
42. 48. 49. 50. 56	50x50-48x48=196	14. 48. 50

Essi lati del triang. pitagorico si po-
tessero dimezzare, cioè se i merri arit.
e contrarm.^{co} fossero n.ⁱ pari, sarebbero
lati di triang. pitag.^{co} ancor la metà
del mezzo arit.^{co}, la metà del mezzo
contrarm.^{co}, ed $a+d \times d$; giacchè $a+d \times nd$
è sempre num.^o pari, che dimezzato
diventa dispari.

Cod. III.

Si osservi, che i quad.ⁱ di n.^o off.

$$\left. \begin{array}{l} 9 \\ 15 \\ 49 \end{array} \right\} \text{divisi in } \begin{array}{l} 4.5 \\ 12.13 \\ 24.25 \end{array}$$

danno i quad.ⁱ di num.ⁱ così divisi,
che han per d lo stesso quad.^o

$$\left. \begin{array}{l} 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = 25 \end{array} \right\} 25 - 16 = 9$$

$$\left. \begin{array}{l} 12 \times 12 = 144 \\ 13 \times 13 = 169 \end{array} \right\} 169 - 144 = 25$$

I triang. pitag.^{co} di questa classe, che
sono quelli del Cod. II., appartengono
alla serie delle semplici prime forme
1.2; 2.3; 3.4 &c., le quali ridotte
a propor.^{ne} co' merri determinati, non am-
mettono per mezzo aritm.^{co} altro quad.^o,
che n.^o off.

1.2	2.3	3.4
2.4	4.6	6.8
2.3.4	4.5.6	6.7.8
$3 \times 3 = 9$	$5 \times 5 = 25$	$7 \times 7 = 49$
6.8.9.10.12	10.14.15.16.30	42.48.49.50.56
4.13.5	12.5.13	24.7.15

I primi lati di questi triangoli 3.5.7 &c.
sono le somme de' termini delle ragioni,
da cui essi triangoli son dedotti: $3 = 1+2$,
 $5 = 1+3$, $7 = 3+4$ &c., delle quali

13. rag. si son raddoppiati i termini per
trovar senza rotte il mezzo aritmo. della forma

Cor. IV.

Questi stessi triangoli si deducono
ancora dalle proporzioni aritmetiche, dis-
crete co' merri aritmo, e contraritmo,
ed il p.^o termine e' sempre la somma
de' termini esprimenti la ragione:
o il p.^o termine della p.^a diviso per uno;
il p.^o della seconda diviso per 2; il
primo della 3.^a diviso per 3 &c.

Cor. V.

Si osservi nel Cor. p.^o, che i primi
termini de' triangoli sono 4.6.8.10.12 &c.
numeri costituiti dalla somma de' termini
delle ragioni di termini impari, e
pavi per diff. 2

$$\begin{aligned} 1.3; 2.4; 3.5; 4.6 &c. \\ 1+3 &= 4 \\ 2+4 &= 6 \\ 3+5 &= 8 \\ 4+6 &= 10 \\ 5+7 &= 12 \end{aligned}$$

Cor. VI.

Le somme stesse de' lati de' trian-
goli petati indicano abbastanza la ragione
da cui son presi, facendo esse somme
l'ultimo termine della prop. co' merri
determinati, dedotta da essa ragione.

$$\begin{aligned} 2+0+2 &= 4 \quad - \quad 2 \quad - \quad 1 \\ 4+3+5 &= 12 \quad - \quad 6 \quad - \quad 3 \\ 6+5+10 &= 21 \quad - \quad 12 \quad - \quad 6 \\ 8+15+17 &= 40 \quad - \quad 20 \quad - \quad 10 \\ 10+24+26 &= 60 \quad - \quad 30 \quad - \quad 15 \\ 12+35+37 &= 84 \quad - \quad 42 \quad - \quad 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4 &:: 5.6 \\ 10.12 &:: 15.15 \\ 21.24 &:: 25.28 \\ 36.40 &:: 41.45 \\ 55.60 &:: 61.66 \\ 78.84 &:: 85.91 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &:: 2 \\ 2 &:: 4 \\ 2.3.4 & \end{aligned}$$

Tri. Pet.

3:6::1:2	1+2.4.5	3.4.5
10:15::2:3	2+3.12.13	$\frac{10}{2}.12.13$
21:28::3:4	3+4.24.25	$\frac{21}{3}.24.25$
36:45::4:5	4+5.40.41	$\frac{36}{4}.40.41$
55:66::5:6	5+6.60.61	$\frac{55}{5}.60.61$
78:91::6:7	6+7.84.85	$\frac{78}{6}.84.85$

0.2	0.1.2	0.0.1.2.2	0.2::0.2	Tri. Pet.
1.3	1.2.3	1.3.4.5.6	2.6::1:3	2.0.2
2.4	2.3.4	6.8.9.10.12	6.12::1:2	4.8.8
3.5	3.4.5	10.15.16.17.20	10.20::3:5	6.8.10
4.6	4.5.6	20.24.25.26.30	20.30::2:3	8.15.17
5.7	5.6.7	30.35.36.37.42	30.42::5:7	10.24.26
				12.35.37

Quando $d=1$, il lato del triangolo pitag.^o, h'è $= a+d \times n$ diventa $a+1 \times n =$ al doppio della radice del medio aritm.^o della propor.^o co' suoi merri determinati; e però prendendo la radice del mezzo aritm.^o, non si ha che la metà del lato del triang. pit. $= a+d \times n = a+1 \times n$; e perciò quando i num.^o de' merri armon.^o, e contrarmon.^o sono pari (il che, quando $d=1$, succede, sempre ~~perchè~~ che il mezzo aritmetico sia un n.^o q^{do}) saranno ancor termini di triang. pit. la radice del mezzo aritm.^o 3, e la metà de' merri arm.^o, e contrarm.^o di essa ragione co' merri determinati.

Cor.^{do} VIII.

Ma quando il mezzo aritm.^o della ragione co' merri determinati è n.^o pari, e però (essendo $d=1$) i merri arm.^o, e contrarmonici sono q^{do}, si prendono quali sono i merri arm.^o, e contrar.^o, e per l'altro lato del triang. pit. si prende un num.^o, che sia il doppio della radice del medio aritm.^o della ragione co' suoi merri determinati.

Cor.^{do} IX.

Dalle cose dette si deduce un altro modo di trovare oltre i merri

armonico

3 . 5
3 . 4 . 5

11 . 15 . 16 . 17 . 10

12 . 4 . 15 . 17

6 . 15 . 17

IV

armonico, e contr.^{to} il terzo lato del
triang. pit., ch' è $= a+d \times nd$. Questo
è alla diff. del p.^o ed ultimo ter-
mine della ragione co' suoi merri de-
terminati.

Poiché l'ultimo termine è $= aa+ad+ndd$
La 1.^a diff. $= \frac{aa+ad+ndd}{na+ndd} = a+d \times nd$

Ma questo è quel terzo lato, che
si ricerca. Dunque il terzo lato
è la diff., che passa fra gli estremi
della ragione, co' suoi merri deter-
minati.

Cor.^{to} X.

Se un quad.^{ro} di BC = ai quad.ⁱ
di BA , e di AC , presa la metà
di tutti questi lati, sarà ancora
 $\overline{BE} = \overline{BD} + \overline{DE}$, come pure previne
il doppio, triplo &c.

Cor.^{to} XI.

Il mezzo contr.^{to} è uguale alla
somma de' due quad.ⁱ de' due termini
costituenti la ragione, divisa per la
somma de' due termini della ragione,
cioè fra $a:b$; o sia della ragione
 $a:b$ il mezzo contr.^{to} sarà $\frac{aa+bb}{a+b}$,
e però $a : \frac{aa+bb}{a+b} :: b : a$ una con-
tr.^{to} prop.^{ta}.

Poiché $b : a :: \frac{aa+bb}{a+b} - a : b - \frac{aa-bb}{a+b}$

n. o. n.
Fig. 26. Tav. II
6. 8. 10

b. a

746: a :: aa+bb-aa-ab : ab+bb-aa-bb
 :: bb-ab : ab-aa
 :: b : a

Adunque il mezzo contrad.^{do} è
 $= \frac{aa+bb}{a+b}$, il che si voleva d.^o

Cor.^{do} XII.

Alla non può darsi ipotenusa di
 triang.^o rett.^o il cui quad.^o non sia la
 somma di due quadrati. La ipotenusa
 dunque è di contrad.^{do} natura,
 cioè atta a rappresentarsi un mezzo
 contrad.^{do}.

Scolio.

De' triang.^o pit. il primo osser-
 vatore fu Pitagora. Questi trian-
 goli nascono dalle ragioni co' merzi
 loro determinati, aritm.^{co}, geom.^{co}
 e contrad.^{do}. Si vede da ciò, che
 Pitagora maneggiava in questo modo
 le ragioni, trovandone i determinati
 merzi.

Cor.^{do} XIII.

Ne' triangoli de' Cor. 3.^o e 4.^o
 la somma de' merzi aritm.^{co}, e contrad.^{do}
 attribuisce il quad.^o, la di cui radice
 quad.^o è il 3.^o termine del triangolo,
 i cui lati sono determinati dai merzi
 armonico, aritm.^{co}, e contrad.^{do}.

Cor.^{do}

74

$$b : a :: aa + bb - aa - ab : ab + bb - aa - bb$$

$$:: bb - ab : ab - aa$$

$$:: b : a$$

Adunque il mezzo contrad.^{co} è

$$= \frac{aa + bb}{a + b}$$
 il che si voleva de.

Cor.^{do} XII.

Ma non può darsi ipotenusa di
 triang.^{lo} ret.^o il cui quad.^o non sia la
 somma di due quadrati. La ipotenusa
 dunque è di contrar.^{ta} natura
 cioè atta a rappresentar un mezzo
 contrar.^{co}

Scolio.

De' triang. ret. il primo osser-
 vatore fu Pitagora. Questi trian-
 goli nascono dalle ragioni co' meri
 loro determinati, ar.^{mo}, ant.^{mo}
 e contrad.^{co}. Si vede da ciò, che
 Pitagora manggiava in questo modo
 le ragioni, trovandone i determinati
 meri.

Cor.^{do} XIII.

Ne' triangoli de' Cor. 3.^o e 4.^o
 la somma de' meri ar.^{mo}, e contrad.^{co}
 attribuisce il quad.^o, la di cui radice
 quad.^{ta} è il 3.^o termine del triangolo,
 i cui lati sono determinati dei meri
 armonico, ant.^{mo}, e contrar.^{co}.

Cor.^o XIV.

Dividendo il diametro AB per la serie armonica delle frazioni.

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

$$60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$$

AB · AC · AD · AE · AF · AG,

si trova, che AF è la sede originale del p.^{mo} triangolo pit.

$$3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$CF \cdot FM \cdot CM$$

Cor. XV.

Il terzo termine del triangolo pit. oltre i merri arit.^{ici}, e contr.^{ari}, sarà sempre tante volte multiplice della radice del quadrato medio arit.^{ico} della propor.^{ione}, di quante unità è la diff.^{erenzia} degli estremi della forma, poiché a+d è il merro aritmetico della forma, il quale si deve moltiplicare per ad diff. tra il p.^o, e l'ultimo termine, il qual merro arit.^{ico} della forma è la radice del quadrato, merro arit.^{ico} della propor.^{ione}. I Cor.^o 7.^o ed 8.^o non sono che conseguenze di questo

$$12 \cdot 6 \cdot 10$$

$$12 \cdot 20 \cdot 36 \cdot 52 \cdot 60$$

$$20 \cdot a+d \times nd \cdot 52$$

$$6 \times 8 = 48 \text{ duplo di } 6$$

$$10 \cdot 48 \cdot 52$$

$$10 \cdot 24 \cdot 26$$

$$5 \cdot 12 \cdot 13$$

$$3 \cdot 6 \cdot 9$$

$$18 \cdot 27 \cdot 36 \cdot 45 \cdot 54$$

$$17 \cdot a+d \times nd = 56 \cdot 45$$

$$6 \times 6 = 36 \text{ per}$$

$$\text{duplo di } 6$$

$$27 \cdot 36 \cdot 45$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5$$

Fig. 125. Tav. II.

$$CF = AC - AF = 30 - 12$$

$$FM = AF \times FB = 12 \times 48$$

$$\Rightarrow 576, FM = 24$$

$$CF \cdot FM \cdot CM$$

$$18 \cdot 24 \cdot 30$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$a \cdot a+d \cdot a+nd$$

$$a=d; d=3$$

$$1 \cdot 4$$

$$2 \cdot 5 \cdot 8$$

$$\text{diff. } 6 = nd = n \times 3 = 6$$

$$10 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 34 \cdot 40$$

$$16 \cdot a+d \times nd \cdot 34$$

$$\frac{16}{1+3} \times 6 = 30 = 5 \times 6 \text{ duplo di } 5$$

$$16 \cdot 30 \cdot 34$$

$$8 \cdot 15 \cdot 17$$

$$1 \cdot 5$$

$$1 \cdot 13 \cdot 5$$

$$3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 15$$

$$5 \cdot a+d \times nd \cdot 13$$

$$3 \times 4 = 12 \text{ quad. di } 3$$

$$5 \cdot 12 \cdot 13$$

$$1 \cdot 4 \cdot 7$$

$$4 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36$$

$$7 \cdot a+d \times nd \cdot 25$$

$$\frac{1+3}{1+3} \times 6 = 14 \text{ duplo di } 4$$

$$7 \cdot 14 \cdot 25$$

Fig.

Scolio

Altre sono le forme de' triangoli pit. Si vuol piegarle, ed applicarle al cerchio.

Forme di ragione per 2.

Forma 1. e doppia

$$AB = 1$$

$$BE = \sqrt{AB \times BD} = \sqrt{1 \times 9} \text{ (supposto il diametro } = 10) = 3 = 1 + 2$$

$$BC = 4 = 1 \times 2 \text{ raddoppiato}$$

$$CE = 5 = 1 + 4$$

Andi nascono i merzi della doppia

$$6. \quad 8. \quad 9. \quad 10. \quad 12$$

$$BC = 4, \text{ raddoppiato in } 8 \text{ armt.}^o$$

$$BE = 3, \text{ quadrato in } 9 \text{ mezzo armt.}^o$$

$$CE = 5, \text{ raddoppiato in } 10 \text{ contr.}^o$$

Forma sesquialtera n. 3

$$AB = 1$$

$$BE = \sqrt{AB \times BD} = \sqrt{1 \times 15} = 5 = 1 + 3$$

$$BC = 12 = 1 \times 3 \text{ raddoppiato}$$

$$CE = 13 = AB + BC$$

Andi si hanno i merzi della sesquialtera 10. 14. 15. 16. 30

$$BC = 12, \text{ raddoppiato in } 24 \text{ armt.}^o$$

$$BE = 5, \text{ quadrato in } 25 \text{ mezzo armt.}^o$$

$$CE = 13, \text{ raddoppiato in } 26 \text{ contr.}^o$$

Forme di ragione per 2

Forma tripla 1. 3

$$AB = 2$$

$$BE = \sqrt{AB \times BD} = \sqrt{2 \times 8} = 4 = 1 + 3$$

$$BC = A - CB = 5 - 2 = 3 = 1 + 2$$

$$CE = 5 = AB + BC$$

Quindi

Quindi si hanno i merri della tripla

1. 3. 4. 5. 6

BC = 3 mezzo aritm.

BE = 4 mezzo aritm.

CE = 5 mezzo contr.

Forma 3. 5

AB = 2

BE = $\sqrt{AB \times BD} = \sqrt{2 \times 32} = \sqrt{64} = 8 = 3 + 5$

BC = 15 = 3×5

CE = 17 = $2 + 15$

Quindi si hanno i merri della
ragione superbiar. da 3. 5

BC = 15 mezzo aritm.

BE = 8 raddoppiato in 16, aritm.

CE = 17, contr.

Nelle propor. per diff. 2 si osserva
questa regola. Nella prima 1. 3. 4. 5. 6
il 3. termine. BE non si altera;
nella 2. 11. 15. 67. 10, BE si rad-
doppia. Nella terza si triplica.
Nella 4. si quadruplica; e così
si trova il mezzo aritm. della ris-
pettiva propor. in un termine sem-
pre quadrato.

Perchè ella è proprietà de' n. di
pari sommati per serie di ragioni,
e non incontrar mai un num.
quadrato; ed è proprietà de' n. di
sommati per serie di ragione. l'incon-
trare molti num. quadrati; e moltiplicati

poi per

poi per serie le somme 4. 8. 12 &c.
per l'aritmética serie 1. 2. 3. 4 &c.,
l'incontrarsi sempre in n.^o quad.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15

4. 8. 12. 16. 20. 24. 28. 32

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8

4. 16. 36. 64. 100. 144. 196. 256

Quadrati 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64

Una' altra serie di questi triang.
rit. appartiene alla serie delle pro-
por. congiunte. Si deduce il 1.^o
termine dal 1.^o num.^o quad.^o della
propor. congiunta. Se il quad.^o
è num.^o dispari, si prende intero;
s'è pari se ne prende la metà.

Il 2.^o termine si deduce dalle
ragioni ripetitive alle 1. 2.

Se il quad.^o primo termine
della propor. congiunta, è pari,
appartiene alle ragioni per 1. 2;
s'è cifo, alle ragioni per 1. 2.

Per ciò nella 1.^a propor. congiunta
1. 2. 3. 4. 6, il quad.^o 1, primo
termine, essendo cifo, la 1.^a rag.
sarà 1: 3, i di cui termini sommati

in $1 + 3 = 4$

Il qual 2.^o termine di questa forma

unito al primo 1

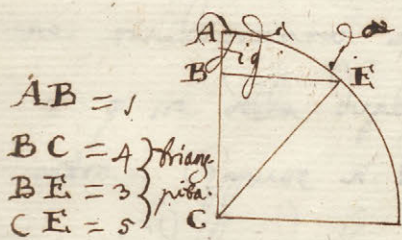
unito al primo 1, dà $1+4=5$, formerà
il semidiametro 5, col quale dritto il
quadrante, e tirato il seno BE, si
avrà il triangolo CBE pitag., che
appartiene alla prima propor. congiunta.

A. 6. 8. 9. 12, avrà per 1.^o termine
la metà del 1.^o quadrato 4. Per
2.^o termine avrà la somma de'
termini della 1.^a ragione, per diff.
1, ch'è 1. 2. $1+2=3$.

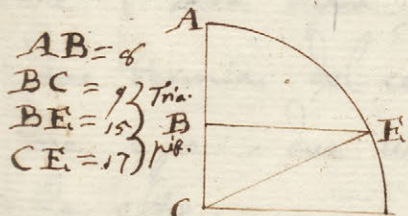
Sommato il 1.^o 2 col 3^o 3, si avrà
il semid.^o = 5, e con questo fatto il
quadrante, e tirato il seno, si avrà
il triang. pitag. appartenente alla
seconda propor. congiunta (Fig. 2.^a)

La serie sarà adunque come qui sotto

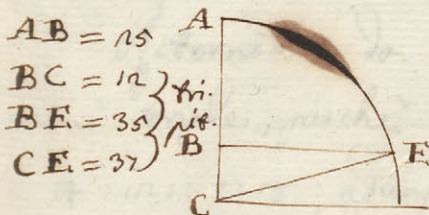
Triang. delle ragioni per diff. 2



proporzioni relative
AC semid. 5 contr.
1. 2. 3. 4. 5.



AC semid. 17 contr.
6. 9. 15. 16. 17.



AC semid. 37 contr.
15. 30. 35. 36. 37.

Triang. delle rag. per diff. 1

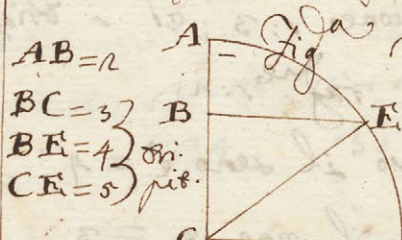
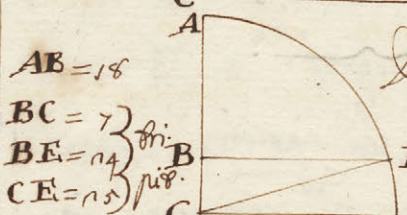


Fig. 1.
Diam. 10 contr.
4. 6. 8. 9. 12



Diametro 16 contr.
8. 10. 12. 13. 16.



Diam. 50 contr.
36. 40. 48. 49. 50.

Cor^{do} XVI.

Se al raggio $AD=5$ farò un
semicirc^{olo} $AGNM$, e preso $AC=2$,
tirerò il seno CO , ed il raggio DO ,
avrò il triang^{olo} pitag^{orico}.

$$\begin{array}{l} DC \cdot CO \cdot DO \\ 3 \cdot \sqrt{AC \times CM} \cdot 5 \\ \sqrt{2 \times 8} \\ \sqrt{16} \end{array}$$

$$3 \cdot 4 \cdot 5$$

Vedi Cor. 14, e forma 1.^a 3

E se farò $AB=1$, e tirerò il
seno BG , ed il raggio DG , avrò il
triang^{olo} pitag^{orico}.

$$\begin{array}{l} DB \cdot BG \cdot DG \\ 4 \cdot \sqrt{AB \times BM} \cdot 5 \\ \sqrt{1 \times 9} \end{array}$$

$$4 \cdot 3 \cdot 5 \text{ V. forma 1.^a 2}$$

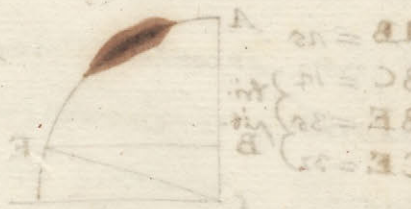
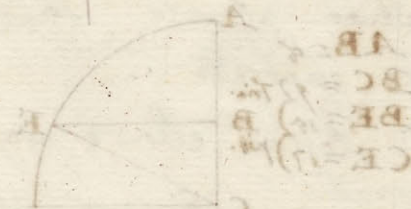
Adunque il triang^{olo} 3. 4. 5 na = V
se dalla ragione 1. 3; ed il triang^{olo}
4. 3. 5 dalla rag^{ione} 1. 2

Nel primo caso il seno è = 4

Nel secondo il seno è = 3

Il seno è quel lato del triang.
pit^{agorico}, che si cerca, oltre i med^{esimi}
arm^{ati}, e contrar^{io}, o le metà
di quest^o.

Fig^{ura} 28. Poterà servir la 27.
Tab II.



Senie radicale

Serie radicale relativa ai

Triang. pitag.

Questa serie radicale e' fatta con queste leggi: il n.° pari 4 si divide in 2, 2; il capo 7 in 3, 4, ed il 10 nella subesquialtera 4.6, e da questa divisione risulteranno i quattro termini 2.3.4.6 della tripla geom. disc. posta di riscontro.

Oppure si raddoppi il p.° termine 2 della tripla g. d., si sommino i due termini del centro 3+4, e poi i due ultimi 4+6, e si avranno

4.7.10.

Il n.° pari 12 si divide in 6, 6; il capo 17 in 8, 9; il n.° 11 nella subesquiterza, 9.12, e da questa divisione risulteranno i quattro termini 6.8.9.12 della tripla g. d. posta di riscontro. Oppure si raddoppi il p.° termine 6 della tripla g. d., si sommino i due termini del centro 8+9, e poi i due, e poi i due ultimi 9+12, e così nelle altre.

Ritornando da capo 4.7 sono radici triple, perchè $2 \times 2 = 4$; $3 \times 4 = 12$, e $4 : 12 :: 1 : 3$; dunque sono radici

della ragione

Serie radicale.

4.7.10

11.17.25

14.31.36

40.49.55

60.71.76

2.3.4.6

6.8.9.12

12.15.16.20

20.24.25.30

30.35.36.42

4.7.10

2.3.4.6 subesquid.

$2 \times 2.3+4.4+6$

4.7

11.17.25

6.8.9

9.12 subesquid.

$2 \times 6.8+9.9+12$

11.17.25

14.31.36

12.15.16

16.20 subesquid.

$2 \times 12.15+16.16+20$

14.31.36

12
della ragione degli estremi di
riscontro $n : 6 :: 1 : 3$

Già $11, 17$ sono radici doppie;
poiché $6 \times 6 = 36$; $8 \times 9 = 72$, e
 $36 : 72 :: 1 : 2$, adunque radici degli
estremi di riscontro $6 : 12 :: 1 : 2$.

E così (per non moltiplicar fatica)
si operi, e s'intenda per la indefi-
nita serie radicale.

Riflettiamo al terzo termine
della serie radicale. Abbiamo detto
altrove, che data la dupla geometrica
continua $1. 2. 4$, e ridotta ad aritm.

continua $1. 2. 3$, facendo $4 : 3 :: 2 : \frac{2 \times 3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$,

e posto questo fra $1. 2$, si costitui-
sce la tripla g. d. $1. \frac{3}{2}. 2. 3$

e così s'intenda della serquialtera
continua $4. 6. 9$; della serquiterza
geom. continua $9. 12. 16$.

Si osservi di più, che il termine
trovato $\frac{3}{2}$ è serquialtero di 1 , e for-
mando il mezzo arit. fra gli es-
tremi $1. 3$, costituisce la tripla
in armonica prop. $3. \frac{3}{2}. 1 / 6. 3. 2$.

Chiara n'è la ragione, perché
nell'aritmico n.° comune non può

darsi

23
42

Darsi originali propo^{re} ~~geom~~^{geom} con-
tinua, se non se fra due estremi
di n^o quadrato, ed il mezzo arit^o
è sempre un di meno del n^o quad.
in tutte le propo^{re} g. d., che hanno
la forma per diff^a 1, e per diff^a 2.
Ed in quelle che hanno la forma
per mag^a diff^a il mezzo arit^o
è = al quadrato, che forma il mez-
zo aritmetico meno il quad^o della
diff^a della forma.

Esposto tutto questo egli è un
fatto, che il 3^o termine 10 della
prima posizione 4.7.10 è somma dei
termini della sesquialtera 6.4. Ma
è pur un fatto, che $\frac{3}{2}$ è sesquialtero
del 1^o termine 1 in $1. \frac{3}{2}. 2. 3$, ed è
per mezzo arit^o fra gli estremi
tripli 1.3; adunque il 3^o termine
10, come somma de' due termini
sesquialteri 6.4 scuopre il vero prin-
cipio di questa ragione; lo scuopre di
armonica natura; e lo scuopre de-
dotto dalle propo^{re} congiunte altro-
ve dimostrate.

Loichè dalla prima propo^{re} con-
giunta 1.2.3.4.5, di cui è centro
la sussesquialtera $2:3::4:6$, romando

2 termini

i termini congiunti col segno, e
ha la prima posizione 4.7.10

$$1+3+3+4+4+6,$$

e così pure dalle altre si hanno le
corrispondenti posizioni

In fatti gli estremi della prima
posizione 4.10 in n. primi 1.5
sono radici triple, perchè $1 \times 1 = 1$.
 $2 \times 3 = 6$, 1.6 sono gli estremi della
prima prop. congiunta; della 2.
gli estremi 12.18 :: 4:7 sono radici
triple, perchè $2 \times 2 = 4$. $3 \times 4 = 12$
 $4:12 :: 1:3$, nella qual ragione
sono pure gli estremi 4.12 della
2. prop. congiunta. della terza
 $24:36 :: 6:9$, sarà $3 \times 3 = 9$; $4 \times 5 = 20$;
9.20 sono gli estremi della 3. prop.
congiunta di riscontro. In questa
si osservino 3.4.5 centro della tri-
pla 1.2.3.4.5.6.

$$\begin{array}{l|l} 1.2.3.4.6 & 4.7.10 \\ 4.6.8.9.12 & 12.17.25 \\ 9.12.15.18.20 & 24.31.36 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4+8=12 & 9+15=24 \\ 8+9=17 & 15+18=31 \\ 9+12=21 & 18+20=36 \end{array}$$

$$1.2.3.4.6 \text{ forma } 1.2.3$$

$$6.8.9.12 \text{ forma } 2.3.4$$

$$12.15.18.20 \text{ forma } 3.4.5$$

Non può darsi la prop. congiunta
9.12.15.18.20 senza l'interiore
separata 12.15.18.20 dalla som-
ma de' di cui termini si ha la
congiunta posizione 24.31.36
duplicando 12 in 24, e sommando
i due mezzi $15+21=36$, ed il mezzo

15 coll' estremo

16 coll' estremo no.

All' altro dunque vi è di più
nella propor^{te} congiunta che il n^o quad.

9 aggiunto alla g. d. 12. 15. 16. 20,
e con ciò si cambia la ragione degli
estremi 12. 20 nella ragione 9. 20
mag^g di una sequenza formata
da 12. 9, e vi sono due n^o quad. 9. 16,
de' quali è radice la forma sequen-
terza 3. 4; poichè $3 \times 3 = 9$; $4 \times 4 = 16$

Divisi i sei termini delle semplici
forme 1. 2. 3. 4. 5. 6 in 1. 2. 3,
ed in 4. 5. 6; $1+2+3=6$
 $4+5+6=15$

6: 15 :: 12: 5 :: 4: 10 estremi della
prima posizione 4. 7. 10 come la
somma 15 dei sei termini delle
semplici forme è uguale alla som-
ma 15 de' tre termini $4+7+10=15$.

Egli è un fatto, che i due num^o
quad. 9. 16 della propor^{te} congiunta

9. 12. 15. 16. 20 sono i precisi, che
formano il triangolo pitag. 3. 4. 5

perchè $3 = \sqrt{9}$; $4 = \sqrt{16}$, e sommati

i due quad. $9+16=25$ la cui

radice è 5 terzo lato di esso trian-

golo.

Dalle le tre serie delle proporzioni

congiunte

congiunte, e de' triang. pitag., si veni-
fica il legame, e la relazione delle
serie delle cinque posizioni, e de' triang.
pitag., non solam.^{te} nella colonna co-
mune, prima delle cinque posizioni,
e merrana de' triangoli; ma osser-
vando, che in questa colonna comune
è fondata la proprietà, ed affezione,
della somma degli estremi de' triangoli,
la quale col mezzo de' memi² forma
la serie ordinata delle cinque ragioni
elementari del sestuplo armonico si-
tema nel modo, ch'è qui in margine.

Oltre a questa proprietà della
colonna comune, si rileva il par-
ticular legame della serie delle po-
sizioni, e della serie de' triangoli, som-
mando gli estremi de' triangoli, e com-
parando la somma de' triang. agli
estremi della 3.^a colonna delle posi-
zioni; si trova la serie, ch'è qui
in margine. Questa essendo serie
razionale di ordinate ragioni, si vede,
che le due serie hanno un principio
comune, e sono fra loro congiunte di
comuni proprietà, ed affezioni, senza
perder tempo a mostrare gli altri
legami, che realm.^{te} vi sono.

Posizioni	Logot. ^{ica} cong.	Triang. pit.
4. 7. 10	1. 2. 3. 4. 6	3. 4. 5
12. 17. 21	4. 6. 8. 9. 12	5. 10. 13
24. 31. 36	9. 12. 15. 16. 20	7. 14. 15
40. 49. 55	16. 20. 24. 25. 30	9. 40. 41
60. 71. 76	25. 30. 35. 36. 40	11. 60. 61

$3+5=8$	$6:4::1:1$
$5+13=18$	$15:12::3:2$
$7+15=32$	$32:24::4:3$
$9+41=50$	$50:40::5:4$
$11+61=72$	$72:60::6:5$
Somme 3. ^a colonna	
8	10 :: 4:5
18	21 :: 6:7
32	36 :: 8:9
50	55 :: 10:11
72	78 :: 12:13

Ritornando all' occhio sopra le
tre serie delle posizioni delle prop.^{ri}
congiunte, & de' triang. pitag. si
osservi, che in riscontro della 3.^a merra-
na posizione 14. 31. 36 si trova
il terzo merrano triangolo pitag.
7. 14. 15. Questo e' il triang.
della sesquiterza g. d., essendo 49
 $= 14 + 15$, e 7 la sua radice;
come 7 e' somma de' termini della
sesquiterza 4. 3; cosi 49 e' necessa-
ria. il terzo aritm. della sesqui-
g. d. 42. 45. 49. 50. 56.

Cui si tocca con mano, che
se si esponano gli estremi g. no della
3.^a prop. congiunta, e 14. 36 della
3.^a merrana posizione, e 42. 56 della
sesquiterza g. d., di cui e' il triang.
pitag. 7. 14. 15, e da questi sei ter-
mini ordinati si deducano le diff., sa-
ranno i termini g. no. 14. 36. 42. 56,
e le diff. 11. 4. 12. 6. 14. Gli ex-
tremi 11. 14. costituiscono la ragione
di Archimede di cerchio iscritto = 11,
e di quadrato circoscritto = 14. Dei
tre meri poi 4. 12. 6, il merio 12
e' triplo del 4, duplo del 6; ed i
due 6. 4 sono in sesquialtera, coriche

ordinati

ordinati 1. 6. 4 formano la
trippla armonica 6. 3. 2

Qui adunque è rinchiuso tutto
il fondamento dell'armonica scienza,
e conseguente della scienza del cer-
chio.

1. $\frac{1}{2}$ è aritm.^a, geom.^a, armica $\frac{1}{2}$

1. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ è armonica; adunque

1. $\frac{1}{2}$, principio di armonica serie

non si fa ragione aritm.^a, se
non per via della cerquialbera,

$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2$, ed ha il suo com-
pimento nella trippla 1. 3, e tutto
il maneggio delle ragioni co' loro
mezzi aritm., aritm., contrarm. è rac-
chiuso nel cerchio, come si è co-
dutto a suo luogo.

La terza classe finora incognita di questi triangoli pitag. sempre dipendenti dalle dette propor.ⁿⁱ, e' composta, ed in un senso può dirsi la più universale di tutte, perchè da principio a fine della sua serie e' inseparabile dalle radici dupli. lineari, lato, e diagonale, del quad.^{ro}, nelle quali ha il suo principio avvolto. primo; ed in questo agiscono ugual.^{te} i tre merzi arit.^{ici}, aritm.^{ici}, e contraritm.^{ici}.

Si piega, e dimostra: dati i tre merzi 3. 4. 5 della dupla g. d., si sommino nel modo seguente $3+4=7$
 $4+5=9$:
 dico, che debba la diagonale AB del quadrato, il di cui lato AC = 4, posta questa diagonale base del triang.^{lo}, il di cui lato AC sia = 7, la ipotenusa 9, questo sarà un triang. pitag., perchè i due quad.^{ri} $AC^2 = 7 \times 7 = 49$
 $CB = 9 \times 9 = 81$ } Diff.^a = 32

Alla base AB = $\sqrt{32}$ per costr.^{te}.

Adunque ACB e' un triang. pitag.

Similm.^{te} dati i tre termini

8. 9. 10 della dupla g. d., sommati

$8+9=17$, $9+10=19$, i quadrati
 di 17. 19

Fig. 19 Tav. II

Triang.^{lo} pitag. si dice quello, che ha i tre lati espressi da n.^{ri} razionali, onde questa classe di triangli non può chiamarsi classe di triangli pitag.

Si chiamino triangli, che a guisa dei Pitag., nascono dai merzi arit.^{ici}, aritm.^{ici}, e contraritm.^{ici} delle ragioni &c.

Di 17 19 saranno 189. 361, ed
avranno per diff. 72. Adunque
costruito un quadrato del lato = 6,
la diagonale AB sarà = $\sqrt{72}$.
Fatta questa diagonale base di un
triang. , il di cui lato sia 17, la
ipotenusa = 19; questo sarà trian-
golo pitag.; e così s'intenda di
questi triang. in ordinata indefinita
progressione de' tre merri di queste
proporzioni.

Così esser deve per necessit. di prin-
cipio, e per proprietà delle somme dei
detti tre merri. Per necessit. di prin-
cipio perchè original. questo non può
non esser nella dupla, e nelle sue
radici. Per proprietà delle somme di
tali merri, perchè non dandosi i merri
senza il n.º quadrato, ch'è il loro
merro aritmetico, sommandoli nel detto
modo, deve necessariat. seguire, che
la somma delle due somme sia
un num.º quadrato. La somma
di $7+9=16$, di cui è radice qua-
drata il 4, questo è il lato del
quadrato, da cui si deve dedurre la
diagonale, che per si deve per ba-
se del triang. p.º. La somma di
 $17+19=36$, la cui radice è = 6

Questo è il lato del quadrato, da cui deve dedursi la diagonale, che poi si deve per base del triangolo d. La somma in seguito dei tre meri 15. 16. 17, ch'è 31. 33 da $31 + 33 = 64$, la cui radice è $= 8$, che sarebbe il lato del quadrato, da cui dedur si dovrebbe la diagonale $= \sqrt{128}$; e fatto questa base del triangolo terzo, che avesse per lato 31, per ipotenusa 33; si avrebbe un triang. pitag.

Di queste radici formando per serie il lato de' quad. i, è forza, che la loro diagonale sia la radice della diff. di due quad. di dette somme.

Indi è, che questa terza classe concorda colla prima nella serie delle basi 4. 6. 8. 10 &c, e nella diff. sempre doppia della diff. de' quadrati della prima, a cagione della somma che deve farsi de' meri.

1. 3. 4. 5. 6

I meri 3. 4. 5 formano il d. triang. pitag. E formar quest' altra serie di triang. si faccia

$$3 + 4 = 7; 4 + 5 = 9$$

per costruirlo, dividasi BD in sette Tav. III. Fig. 30

in sette parti uguali, e su quattro
di queste parti farsi il quad.
AF; e fatto raggio della diagonale
DE col centro C descrivasi l'arco
E.C, e prolungato DF fino in C,
sarà DC la base del triang., e BC
ne sarà l'ipotenusa = 9; Poiché

$7 \times 7 = 49$, $9 \times 9 = 81$, $81 - 49 = 32$

Ma $\overline{AD} = 16$; dunque la diagonale
 $DE = DC = \sqrt{32}$

$$\overline{BF} = \overline{BD} + \overline{DF}$$
$$= 49 + 16 = 65$$

7 . 8 . 9

$7 \times 8 \cdot 7 \times 9 \cdot 8 \times 8 \cdot 8 \times 9$
 $56 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 72$

Per aver il mezzo aritm.: 64,
si prolunghi BD in G, sicché BG = 8, e sia $\overline{Di} = 15$, sarà
 $\overline{Bi} = 49 + 15 = 64$.

In $\overline{Di} = \sqrt{15}$, $\overline{DF} = \sqrt{16}$ si ha
il centro della propor. g. d. n. 15. 16. 10,
la cui forma è 3. 4. 5, e si
ha 15 determinat. medio armonico,
e 16 medio aritm.

Ma dai merzi 3. 4. 5 della
tripla si ha la forma della pro-
porzione suddetta; dalla somma
 $3 + 4 = 7$, $4 + 5 = 9$, si ha 7. 9, tra
i quali interposto il medio aritm.:
8, si ha per somma $7 + 8 = 15$;

$8 + 9 = 17$

93
67

$8 + 9 = 17$. Tra questi interposto
il medio aritm.^{co} 16, si ha per somma
 $15 + 16 = 31$, $16 + 17 = 33$. Tra questi
interposto il medio aritm.^{co} 32;

31. 32. 33, si ha per somma
 $31 + 32 = 63$; $32 + 33 = 65$, tra
i quali interposto il mezzo aritm.^{co}
64, si ha 63. 64. 65.

La operazione incomincia dalla
trippla 2. 3. 4. 5. 6, e si consuma
nella 56. 63. 64. 65. 72, perchè
di questa è formata 7. 8. 9 ugual.
che del triang. **BDC**.

Da 3. 4. 5; da 15. 16. 17; da
63. 64. 65, si hanno triang. della
prima specie. da 7. 8. 9; da 31.
32. 33; da 117. 118. 119 si hanno
triang. della 2.^a specie, dimostrati
qui sopra.

Le parti uguali, ora questo triangolo ABC ha
 di queste parti, faciasi il quadrato AD , e fatto
 AD , e fatto raggio della diagonale AC , si
 DE il centro E descrivasi l'arco EC , e prolungato DE fino in E ,
 sarà BC la base del triangolo, e $BC = 10$, $BD = 10$, $CD = 10$,
 ne sarà l'ipotenusa $BC = 10$.

$245 = 49 + 9 \times 9 = 81$, $81 - 49 = 32$
 allora $AD = 16$, dunque la diagonale $DE = DC = \sqrt{32}$
 $BE = BD + DE$
 $= 10 + 16 = 26$

Per aver il vero centro O si
 si prolunghi BD in G , suché $BE = EG$
 allora $BE = 10 + 16 = 26$.

In $DE = 16$, $DF = 16$ si ha
 il centro della proprietà g di $n = 16$,
 la cui forma è $13, 4, 5, 14$
 ha 13 determinati medio armonici,
 e il medio armonico

Ma dai numeri $3, 4, 5$ della
 tripla si ha la forma della pro-
 porzione suddetta, dalla somma
 $3 + 4 = 7$, $4 + 5 = 9$, si ha $7, 9$ fra
 a quali interposto il medio armonico
 8 , si ha per somma $7 + 8 = 15$

Teorema

VI 95
48

Il quadrato della corda AC è il mezzo armonico
armonico; il quadrato dell'apotema
AH è il mezzo aritmetico della
base che passa per la somma AH

Fig. 12.

Quindi $AC^2 = 3AH^2 = am$
 $AB^2 - HB^2 + AH^2 = a^2 + mm$
 $AC^2 - AH^2 :: am : a^2 + mm$

Abb. $AB = a$, $AH = m$
 $BH = a^2 - m^2$

$$\frac{AH}{m} = \frac{AF}{a}$$

$$\frac{am + ta}{a} = \frac{m + ta}{a} \cdot \frac{a + m}{a} = \frac{am + ta}{a}$$

$$\frac{am + ta}{a} = \frac{am + ta + am + ta}{4} = \frac{2am + 2ta}{4} = \frac{am + ta}{2}$$

$$\frac{am + ta}{a} = \frac{mm + ta}{a} = \frac{a^2 + am}{a}$$

La media aritmetica, ed è $\frac{a+m}{2}$
 La media geometrica, ed è $\frac{am}{a+m}$
 La media armonica, ed è $\frac{2am}{a+m}$

$AB = a$
 $AH = m$
 $HB = a^2 - m^2$



$5 \cdot 7$
 $5 \cdot 6 \cdot 7$
 $5 \times 6 \cdot 5 \times 6$
 $35 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 36 \cdot 44$
 am



Teorema

Il quadrato della corda AC è il mezzo armonico; ed il quadrato dell'ipotenusa AE è il mezzo contrarmonico della ragione, che passa fra la recisa AH, ed il raggio

Fig. 12

$\text{Poichè } AC^2 = BAH = am,$
 $AE^2 = HE^2 + AH^2 = aa + mm,$
 $AC^2 : AE^2 :: am : aa + mm$

$\text{Sorda } AB = ra, AH = m,$
 $\text{ed } HB = ra - m.$

$\frac{AH}{AF} = \frac{m}{\frac{m+a}{2} \cdot a}$

$\frac{m \times \frac{m+a}{2} \cdot ma \cdot \frac{m+a}{4} \cdot 2 \times \frac{m+a}{4} - am \cdot a \times \frac{m+a}{2}}$

$\frac{mm+am}{2} \cdot ma \cdot \frac{mm+ram+aa}{4} \cdot \frac{2mm+4am+raa}{-4am} \cdot \frac{aa+am}{2}$

$\frac{mm+am}{2} \cdot ma \cdot \frac{mm+ram+aa}{4} \cdot \frac{mm+aa}{2} \cdot \frac{aa+am}{2}$

Ecco ma mezzo armonico, ed aa+mm mezzo contrarmonico fra mm+am : aa+am :: m : a, cioè fra la recisa AH, ed il raggio AF.

Es. p. $AB = 14$ $5 \cdot 9 \cdot 14$
 $AH = 5$ $5 \cdot 7 \cdot 9$
 $HB = 9$

$5 \cdot 7$
 $5 \cdot 6 \cdot 7$
 $5 \times 6 \cdot 5 \times 7 \cdot 6 \times 6$ 6×7
 $30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 42$
 am $\frac{a^2+ma}{2}$



Es. 2. $AH = 3 = m$; $HB = 11$;

senà $AF = 7 = a$

$3 \cdot 7 \cdot 11$

$3 \cdot 7$

$3 \cdot 5 \cdot 7$

$3 \times 5 \cdot 3 \times 7 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 \times 7$

$15 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 35$

$am \quad \frac{a^2 + m^2}{2}$

Si $AH = \frac{1}{6}$; $HB = \frac{5}{6}$; $AB = \frac{6}{6}$

$AH = 1 = m$; $HB = 5$; $AB = 6$; $AF = 3 = a$

$1 \cdot 3$

$1 \cdot 2 \cdot 3$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$am \quad \frac{a^2 + m^2}{2} = \frac{9 + 1}{2}$

$AC^2 = BAN = 6 \times 1 = 6 = am$

$AE^2 = AH^2 + HE^2 = 1 + 9 = 10 = aa + mm$

$AC : AE :: 6 : 10 :: 3 : 5$

Se $AH = \frac{1}{5}$; $HB = \frac{4}{5}$; $AB = \frac{5}{5}$

$AH = 1$; $HB = 4$; $AB = 5$; $AF = 2 = \frac{1}{2}$

Per toglier la frazione si moltiplichi

tutto per 2, senà

$AH = 2$; $HB = 8$; $AB = 10$; $AF = 5$

$AH : AF :: 2 : 5$

$:: 4 : 10$

$AH = 4 = m$

$4 \cdot 7 \cdot 10$

$AF = 10 = a$

$AB = 10$

$28 \cdot 40 \cdot 49 \cdot 58 \cdot 70$

$am = 4 \times 10 \quad \frac{a^2 + m^2}{2} = \frac{16 + 100}{2}$

$AC^2 = BAN = 10 \times 4 = 40$

$AE^2 = AH^2 + HE^2 = 16 + 100$

$AC : AE :: 40 : 116 :: 20 : 58$

Se $AH = \frac{1}{4}$; $HB = \frac{3}{4}$; $AB = \frac{4}{4}$

$AH = 1$; $HB = 3$; $AB = 4$; $AF = 2$

$AH : AF :: 1 : 2$

$AH = 1 = m$ $n = 4$
 $AF = 2 = a$, $AB = 4$ $n \cdot 3 \cdot 4$
 $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$

$\overline{AC} = \overline{BAH} = 8 \times 2 = 16$ $am = 1 \times 4$ | $\frac{a^2 + m^2}{2} = \frac{16 + 4}{2}$

$AE = aa + am =$

$16 + 4 = 20$

$\overline{AC} : \overline{AE} :: 16 : 20 :: 8 : 10$

Se $AG = \frac{1}{3}$; $GB = \frac{2}{3}$; $AB = \frac{3}{3}$ *Fig.*

$AG = 1$; $GB = 2$; $AB = 3$; $AF = 1 \frac{1}{2}$

$AG = 2$; $GB = 4$; $AB = 6$; $AF = 3$

$AG : AF :: 2 : 3$

$AG = 2 = m$ $4 \cdot 6$
 $4 \cdot 5 \cdot 6$

$GB = 4$ $10 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20$

$AB = 6$

$AF = 3 = a$

$am = 2 \times 6 = 12$ | $aa + mm = \frac{36 + 16}{2} = 26$

$\overline{AI} = 12 \times 4 = 48$

$\overline{AI} = AG + GI = 16 + 36 = 52$

$\overline{AI} : \overline{AI} :: 48 : 52 :: 12 : 13$

cioè 12 mezzo armonico, e 13 contra.
 della ragione, sequalibera $1 : 1 \frac{1}{2} :: 2 : 3 :: 4 : 6$.

$BH = 5$; $AH = 1$; $AB = 6$; $BF = 3$ *Fig.*

$BH : AF :: 5 : 3$

$3 \cdot 4 \cdot 5$
 $12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 20$

$\overline{BC} = ABH = 5 \times 6 = 30$

$\overline{BE} = \overline{BH} + \overline{HE} = 25 + 9 = 34$

$\overline{BC} : \overline{BE} :: 30 : 34 :: 15 : 17$

100
 $BG = 2; AG = 1; BA = 3; AF = 1\frac{1}{2}$ *Fig.*

4

2

6

3

$$AF : BG :: 3 : 4 :: 6 : 8$$

$$AF = 6; BG = 8; AG = 4; BA = 12$$

$$AF : BG :: 6 : 8$$

$$6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$12 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 56$$

$$AI^2 = ABG = 12 \times 8 = 96$$

$$AI^2 = BG^2 + GI^2 = 64 + 36 = 100$$

$$AI : AI :: 96 : 100 :: 48 : 50$$

Peri armonico, e contrar.^o della
 ragione $3 : 4 :: 6 : 8$.

La corda è mezzo geometrico fra
 il seno vero, ed il diametro; ed il
 quadrato della corda è mezzo armo-
 nico fra il seno vero, ed il raggio,
 o sia della ragione espressa da queste
 due linee.

Il seno è medio geometrico fra
 i peri del diametro; ed il quadrato
 del seno è mezzo armonico della ra-
 gione espressa dai memi peri del
 diametro moltiplicati pel raggio.

Adunque la circonferenza del circolo
 determina le due linee AC, HC ad
 essere radici di medie armoniche; ed
 il quadrato le fa radici di medie arit-
 metiche, o contrarmoniche.

$$AB = 14; AH = 5; HB = 9.$$

$$\overline{AH} = 25; \overline{HB} = 81; \overline{HC} = AH \times HB =$$

$$5 \times 9 = 45. \overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC} = 25 + 45 = 70.$$

$$\overline{HE} = 49. \overline{AE} = \overline{AH} + \overline{HE} = 25 + 49 = 74.$$

Adunque $\overline{AC} : \overline{AE} :: 70 : 74 :: 35 : 37.$

Ma $5 \cdot 9$ in numeri primi

$$5 \cdot 7 \cdot 9$$

$$5 \cdot 7$$

$$5 \cdot 6 \cdot 7$$

$$5 \times 6 \cdot 5 \times 7 \cdot 6 \times 6 \quad 6 \times 7$$

$$30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 42$$

Adunque $\overline{AC}$ quadrato della corda

è mezzo armonico, ed $\overline{AE}$, cioè il

quadrato della diagonale, è medio arit-

metico della ragione $5 : 7$, cioè

della recisa AH al raggio AF .

Ma HC è il mezzo geometrico fra

AH, HB ; ed FM è il mezzo arit-

metico fra le stesse AH, HB , cioè

$$\therefore AH \cdot HC \cdot HB \therefore AH \cdot FM \cdot HB$$

$$5 \cdot \sqrt{45} \cdot 9$$

$$5 \cdot 7 \cdot 9$$

Adunque il mezzo geometrico ($HC = \sqrt{45}$)

è la radice del mezzo armonico della

ragione $5 : 9$; ed il mezzo aritmetico

7 fra $5, 9$ è la radice del mezzo

aritmetico della ragione stessa $5 : 9$.

Altro esempio

$$AH = 4; HB = 16. \overline{AH} = 16; \overline{HC} = AH \times HB =$$

$$4 \times 16 = 64. \overline{AC} = \overline{AH} + \overline{HC} = 16 + 64 = 80.$$

$$\overline{AE} = \overline{AH} + \overline{HE} = 16 + 100 = 116$$

$$\overline{AC} : \overline{AE} :: 80 : 116 :: 40 : 58.$$

$$102 \text{ } AH : HB :: 4 : 10 :: 2 : 5$$

$$2 \cdot 5 \cdot 8$$

$$2 \cdot 5$$

$$4 \cdot 10$$

$$4 \cdot 2 : 10$$

$$4 \times 7 \cdot 4 \times 10 \cdot 7 \times 7 \cdot 28 \cdot 7 \times 70$$

$$28 \cdot 40 \cdot 49 \cdot 58 \cdot 70$$

Adunque $\widehat{AC}$ è mezzo armonico;
 e $\widehat{AE}$ è mezzo contrarmonico della
 ragione $2 : 5 :: 4 : 10$, cioè della
 recisa, AH al raggio AF .

Il portare una ragione data a propor-
 zione g. d. non è un arbitrio, ma una
 necessità.

Egli è impossibile costruire un cerchio
 per apertura di compasso, senza fare
 una ragione doppia fra l'apertura
 del compasso, ed il diametro.

Prima adunque di dividere il diametro
 in qualunque delle infinite possibili
 ragioni, vi è antecedente nel diametro
 la ragion dupla intrinseca per modo al
 diametro meno, che quando non vi sia,
 non è, nè può esser diametro.

Quando adunque si divide il dia-
 metro, si divide intrinsecamente, ed ine-
 vitabilmente la ragion dupla, ch'è insepa-
 rabile dal diametro, in una ragione
 diversa, ch'è arbitraria, e posteriore,
 alla dupla, ch'è necessaria per modo, che
 senza di essa è impossibile la costruzione.

del diametro, e del cerchio.

In conseguenza egli è impossibile il separare la relazione della ragione arbitraria alla ragione necessaria, costituiva del diametro.

Da ciò ne viene, che dalla necessaria relazione delle due ragioni, cioè della dupla, ch'è di natura del diametro, e della formata ad arbitrio, debba risultare una terza forma di ragione, che geometricamente le congiunga, e in cui sia evidente, che la prima forma è sempre la ragione dupla.

Sia per es. la riduzione della ragione $AB:HB$ a proporzione geometrica discreta. Per ridurre è necessaria la somma de' due dati termini $a+b$, e però bisogna ritornare al diametro AB , di questa somma bisogna prendere la metà $\frac{a+b}{2}$, che $fo = r$; e per conseguenza si viene al raggio, o sia all'apertura del compasso, con cui si forma il cerchio; ed eccoci arrivati ai termini della ~~prop.~~ prima ragione, ch'è la dupla fra il diametro, ed il raggio, ch'è sempre il mezzo aritmetico necessario fra i peccati del diametro.

Ora si fa $ar \cdot ab \cdot rr \cdot br$, ed è formata la proporzione geom. dis. della ragione

Fig. 12

104
della ragione $a:b$, ossia $ar:br$, di
cui il mezzo armonico è ab , e l'arit-
medico rr . Si per tanto l'as-
segnazione del mezzo aritmedico (ch'è il
raggio = r) è dimostrativam^{te} necessaria,
e non può non esser l'apertura del
compasso. Non è adunque vero,
che passando dalla ragione $a:b$ alla
uguale $ar:br$, si passi ad una ragione
diversa; ma anzi è vero, che la ragione
arbitraria $a:b$, si riduce al suo principio
primo $ar:br$; perchè si riduce intrin-
secamente all'apertura del compasso, come
al suo centro, o principio indipendente
dal nostro arbitrio.

Si aggiunga, che il quadrato del seno
è sempre il mezzo armonico, ed il quadrato del raggio mezzo aritm^{ico}. In iper-
bol del diametro moltiplicati pel raggio.
Adunque il raggio sempre costante è il
genere, e principio primo

È chiaro per tanto, che gli estremi
 $ar:br$ uguali alla ragione $a:b$ sono
inseparabili dalla ragion dupla come
principio primo, e sono piani, cioè della
stessa categoria de' quadrati del raggio,
e del seno, che sono i mezzi armonico,
ed aritmedico.

1. 2	6 . 8 . 9 . 12	600 . 800 . 900 . 1200
1. 3	12 . 3 . 4 . 6	450 . 675 . 900 . 1350
1. 4	10 . 16 . 25 . 40	360 . 576 . 900 . 1440
1. 5	3 . 5 . 9 . 15	300 . 500 . 900 . 1500

100
B

Sarà dunque il quadrato BC^2
 del raggio = 900, cioè l'apertura del Fig. 10
 compasso, la misura comune delle
 ragioni; ed il quadrato OC^2 diagonale
 sarà = 1800*, a cui comparati gli
 estremi mag.^{ri} formano la seguente
 serie.

* e pertanto $AC^2 : AO^2 :: 900 : 1800$
 $1 : 2$

$AD^2 : AO^2 :: 1000 : 1800 :: 10 : 18 :: 5 : 9$	diviso il diametro come 1:2
$AE^2 : AO^2 :: 1350 : 1800 :: 3 : 4$	— — — — — 1:3
$AF^2 : AO^2 :: 1440 : 1800 :: 4 : 5$	— — — — — 1:4
$AG^2 : AO^2 :: 1500 : 1800 :: 5 : 6$	— — — — — 1:5

Dunque la risultata serie è uguale
 alla serie delle ragioni delle diff. ar=
 moniche, le quali ragioni sono formate
 dalla somma rispettiva per rapporto
 all'estremo, ch'è il diametro

60	30	20	15	12	10
30	10	5	3	2	
40	45	48	50		

40 : 60 :: 2 : 3	} come nella serie qui sopra accennata
45 : 60 :: 3 : 4	
48 : 60 :: 4 : 5	
50 : 60 :: 5 : 6	

$OD^2 : OA^2 :: 600 : 1800 :: 1 : 3$
$OE^2 : OA^2 :: 450 : 1800 :: 1 : 4$
$OF^2 : OA^2 :: 360 : 1800 :: 1 : 5$
$OG^2 : OA^2 :: 300 : 1800 :: 1 : 6$

Facciasi $OA \cdot OB \cdot OC \cdot OD \cdot OE \cdot OF \cdot OG$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ Fig. 10

E avranno: $\overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \overline{OF} \cdot \overline{OG}$,

perchè i quadrati delle corde stanno

come i seni verti

dunque $AO \cdot OC \cdot OD \cdot OE \cdot OF \cdot OG ::$

$1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$

Seni $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36$

E saranno $\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AG} ::$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

cioè come i seni verti :: $15 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

$1 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{8}{3} \cdot 3 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{10}{3}$

$3 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \frac{48}{5} \cdot 10$

$15 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

$60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$

$30 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$

Somme de' seni $30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50$

Adunque i quadrati delle corde $\overline{OA} \cdot \overline{OC} \cdot \overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \overline{OF} \cdot \overline{OG}$

stanno come la serie armonica

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$;

ed i quadrati delle corde de'

supplementi ad un semicircolo,

cioè $\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AG}$

stanno come le somme de' seni

$30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50$

$\overline{AC} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AG}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}$

Centri della tripla $3 \cdot 4$

della dupla $8 \cdot 9$

della superbipla $15 \cdot 16$

della sequialtera $24 \cdot 25$

della superbipla $35 \cdot 36$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 :: 1 \cdot 3$

$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 :: 1 \cdot 2$

$12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 20 :: 3 \cdot 5$

$10 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 30 :: 2 \cdot 3$

$30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 42 :: 5 \cdot 7$

$42 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 56 :: 3 \cdot 4$

168 L'Autore dice armonico il cerchio, soluzione di una difficoltà
 perché dai seni potresti BE tagliare proporzionalmente contro l'asserzione
 via il di più DE, onde resti BD dell'Autore nel suo Trattato
 seno, il cui quadrato, o sia il pro- di Musica: che il cerchio sia
 duto $AB \times BC$ è mezzo armonico armonico per intrinseca natura
 della ragione, che passa fra i pezzi della sua costruzione
 del diametro AB, BC, ovvero fra Fig. 14
 i rettangoli AE, EC.

Si oppone, che quanto ivi si di-
 mostra per numeri lineari aritme-
 tici ridotti a proporz. g. l., non
 regge al n.º aritmetico astratto da
 linee, figure, e proporzioni.

Perché dati due numeri qualunque
 moltiplicati fra loro, il lor prodotto
 è mezzo proporzionale de' quadrati de'
 numeri stessi. Dunque $BD (= AB \times BC)$
 è medio geometrico fra i quadrati
 de' pezzi del diametro per intrinseca
 natura del numero indipendente
 dalla figura circolare, perché è tale
 in virtù della moltiplica fra loro
 de' numeri astratti n.º 8; avantichè
 si applichi n.º ad AB, & a BC.

Dunque è falsa la dimostrazione
 del Trattato, perché è falso il
 principio, su cui si appoggia.

È vera una cosa, e l'altra,

cioè

cioè BD , ovvero $AB \times BC$ è medio fra
i quadrati AB, BC ; ed è medio armonico
della ragione $AE:EC$, ch'è la stessa
di $AB:BC$; nè in questo vi è contraddizione
alcuna.

Questa obiezione, ch'è la massima
delle possibili è fondata su di un falso sup-
posto. Poichè suppone, che i numeri astratti
 $2 \cdot 8$ siano la stessa cosa, che gli applicati
 $2 = AB, 8 = BC$. Sono gli stessi di quan-
tità. Ma passa fra gli astratti, e gli ap-
plicati questa differenza, che data la serie
de' numeri astratti $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ &c. la sua
intrinseca natura è di addizione continua
dell'unità, ch'è principio primo della
serie. Ma i numeri $2 \cdot 8$ applicati ad
 AB, BC si hanno per divisione, perchè
dividono AC , ch'è il primo dato.

$2 \cdot 8$ astratti nulla aggiungono avanti
di se, non han relazione a cosa veruna;
ma $2, 8$ applicati ad AB, BC hanno la
inevitabile relazione di essere $2 = \frac{1}{5}$ della
linea AC , ed $8 = \frac{4}{5}$ di essa linea, di cui
sono parti integrali: relazione, che nè
vi è, nè può esservi ne' numeri astratti;
vi è, e dev'esser vi ne' numeri applicati;
e vi è sì fattamente, che questa relazione
è anterior di natura delle relazioni co-
muni al numero astratto, essendo eviden-
te, che prima di riferirvi parte a par-
te, è forza supporre il tutto diviso in parti,

sicché

sicché AB, BC hanno il rapporto di parte a parte, ma prima hanno il rapporto di parti al suo tutto; onde qualunque data ragione applicata nel modo suddetto ad una data retta linea non è, nè può mai essere ragione semplice, ma è sempre inevitabilmente ragione composta di tre ragioni espresse nell'esempio qui sopra esposto dalle linee $AB : BC :: 1 : 8$

$$AB : AC :: 1 : 10$$

$$BC : AC :: 8 : 10$$

Da ciò sostanzialmente dipende la dimostrazione del cerchio armonico per intrinseca sua natura. Perchè essendo verissimo, che il quadrato del seno BD è mezzo proporzionale geometrico fra i quadrati AB, BC , e però in tale rispetto di geometrica natura. E poi altrettanto vero, che lo stesso quadrato BD^2 è relativo in proprietà di natura a tutto il diametro AC , di cui AB, BC son parti, e ciò vuol dire, che è relativo alla suppentupla AB, AC pria che sia relativo alla suppentupla AB, BC .

$$1 \cdot 8$$

In oltre si consideri la natura del numero aritmetico, ed è, che data la serie aritmetica infinita $1. 2. 3. 4$ &c. moltiplicati fra loro a due a due i termini vicini della serie, i quali sono in differenza

in differenza dell'unità, com'è la natura della serie: il terzo termine, che ne risulta (si eccettuino i due primi 1.2, formanti la ragione doppia) determina i due termini a serie armonica, e questa incomincia da una determinata armonica proporzione.

Ecco il fatto

Triplo determinata da armo. prop. 6. 3. 2		$1 \times 2 = 2$
Quadruplo in serie armon. manca il 2. 6. 12. 5. 4. 3		$2 \times 3 = 6$
Quintuplo armo. mancante 10. 6. $\frac{1}{2}$		$3 \times 4 = 12$
Sestuplo armo. manc. 15. 10. $7\frac{1}{2}$		$4 \times 5 = 20$
Septuplo armo. mancante de' 42. 21. 14. $10\frac{1}{2}$ $8\frac{2}{3}$ 7. 6		$5 \times 6 = 30$
quattro termini 21. 14. $10\frac{1}{2}$ $8\frac{2}{3}$		$6 \times 7 = 42$

$$\{ 10 \cdot 10 \cdot 6\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot$$

$$\{ 60 \cdot 30 \cdot 19 \cdot 15 \cdot 12$$

$$\{ 30 \cdot 15 \cdot 10 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5$$

$$\{ 60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$$

$$\{ 42 \cdot 21 \cdot 14\frac{1}{2} \cdot 10\frac{1}{2} \cdot 8\frac{2}{3} \cdot 7 \cdot 6$$

$$\{ 84 \cdot 42 \cdot 28 \cdot 21 \cdot 16\frac{2}{3} \cdot 14 \cdot 12$$

$$\{ 420 \cdot 210 \cdot 140 \cdot 105 \cdot 84 \cdot 70 \cdot 60$$

È dimostrativamente certo, che qui non vi entrano quadrati, e che il prodotto è primiera, ed immediata, relativo ai due termini, de' quali è prodotto; seconda, e mediata, è relativo al quadrato de' termini stessi. Perché prima è la ragione data p. es. 2:3, da cui si ha il prodotto 6, e non già la risultata 4:9, che risulterebbe a posteriori dai due termini 2.3, moltiplicati in se stessi in 4.9. E però la relazione



di 6 essendo immediata alla ragione,
mediata alla duplicata ragione, il ter-
mine 6 è immediato armonico, me-
diato geometrico.

Scolio

Per vedere la ricchezza di cognizioni,
che nascono dal cerchio intorno ai suoni. *Fig. 15*

Fatto centro in O estremo del
diametro OA cogli intervalli $OC, OD,$
 OE, OF, OG &c, e descritti gli archi
 CM, DN, EP, FG, GR , le linee $OA,$
 OM, ON, OP, OQ, OR , saranno esse
pure radicali armoniche della serie

$\sqrt{1}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$ &c. Ora col raggio OA
si descriva il semicerchio VAB , di cui
parleremo poi.

Le aree de' triangoli $AOB, MOB,$
 NOB &c sono ancor esse come $\sqrt{1}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$ &c,
giacchè tutti questi triangoli avendo la
base comune OB stanno come le altezze.

OA, OM, ON, OP, OQ, OR

$\sqrt{1}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \sqrt{\frac{1}{6}}$

$AOB, MOB, NOB, POB, QOB, ROB$

I quadrati delle ipotenuse poi di que'
triangoli $\overline{AB}, \overline{MB}, \overline{NB}, \overline{PB}, \overline{QB}, \overline{RB}$

$100 \cdot 90 \cdot 80 \cdot 75 \cdot 72 \cdot 70$

inverse :: $30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50$

queste ragioni sono inverse in quel
modo, in cui dell'armonica progressione
è inversa la progressione aritmetica.

$$\overline{AO} \cdot \overline{OM} \cdot \overline{ON} \cdot \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \cdot \overline{OR}$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

$$60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$$

$$30 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$$

$$30 \cdot 40 \cdot 45 \cdot 48 \cdot 50$$

$$\overline{OB} = 60 = \overline{OA}$$

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = 60 + 60 = 120$$

$$\overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB} = 30 + 60 = 90$$

$$\overline{NB} = \overline{NO} + \overline{OB} = 20 + 60 = 80$$

$$\overline{PB} = \overline{PO} + \overline{OB} = 15 + 60 = 75$$

$$\overline{QB} = \overline{QO} + \overline{OB} = 12 + 60 = 72$$

$$\overline{RB} = \overline{RO} + \overline{OB} = 10 + 60 = 70$$

$$30 : 40 :: 90 : 120 :: 9 : 12 :: 3 : 4$$

$$40 : 45 :: 80 : 90 :: 8 : 9$$

$$45 : 48 :: 75 : 80 :: 15 : 16$$

$$48 : 50 :: 72 : 75 :: 14 : 15$$

De' retti 30 . 10 . 5 . 3 . 2 ,
e delle somme 30 . 40 . 45 . 48 . 50
si parlerà diffusam^{te}, quando si tratterà
dell' armonia .

Lema

Ne' nel semicircolo BAV, il cui raggio
è = OA, si prolunghino le ipotenuse
de' triangoli BM DN BP BQ BR &c
fino al cerchio in BD BE BF BG, e
per D, E, F, G si tirino i seni DS,
ET, FK, GZ : dico, che saranno

$$VB \cdot VO \cdot VS \cdot VT \cdot VX \cdot VZ ::$$

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \text{ &c}$$

Proche

Poichè resta questa sezione armonica

$$\text{del diametro } BV, \text{ sarà } \overline{BD} = \overline{BS} + \overline{SD} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \\ = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Alla BMD tirata per M essa pure

da' $\overline{BD} = \frac{2}{3}$, poichè

$$\overline{BO} : \overline{BM} :: \overline{BS} : \overline{BD}$$

$$60 : 90 :: \frac{2}{3} : \overline{BD}$$

$$6 : 9$$

$$2 : 3 :: \frac{4}{9} : \overline{BD} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

Adunque BMD incontra il cerchio, e

la SD nel medesimo punto, in cui il cerchio è incontrato dalla SD seno tirato

dal punto S , in cui $BS = \frac{2}{3} \cdot VB$

Nello stesso modo si dimostra lo stesso delle altre linee BE, BF, BG .

$$\text{Poichè } \overline{BE} = \overline{BT} = \overline{TE} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \\ = \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Alla BNE tirata per N da' ancor

essa $\overline{BO} : \overline{BN} :: \overline{BT} : \overline{BE}$

$$60 : 80 :: \frac{3}{4} : \overline{BE}$$

$$3 : 4 :: \frac{9}{12} : \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$$

Adunque BND incontra il seno TE

nel medesimo punto, in cui questo seno incontra il cerchio.

Corollario

Avranno le BA, BD, BE, BF, BG

avranno dico $\overline{BA}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{BF}, \overline{BG}$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$$

$$3 \cdot 4$$

$$8 \cdot 9$$

$$15 \cdot 16$$

$$24 \cdot 25$$

$$120 \cdot 160 \cdot 180 \cdot 192 \cdot 200$$

$$40 \cdot 60 \cdot 12 \cdot 8$$

aumentî sempre decrescenti

$$60 \cdot 120 \cdot 160 \cdot 180 \cdot 192 \cdot 200$$

$$1 \cdot 2$$

$$3 \cdot 4$$

$$8 \cdot 9$$

$$15 \cdot 16$$

$$24 \cdot 25$$

Quadr. delle Potenti.

Medio

Quadr. delle Corde

Si deduce la seg. serie

$$\overline{AB} = 120$$

$$\overline{MB} = 90$$

$$\overline{NB} = 80$$

$$\overline{PB} = 75$$

$$\overline{QB} = 72$$

120

$$\overline{AB} = 120$$

$$\overline{DB} = 160$$

$$\overline{EB} = 180$$

$$\overline{FB} = 192$$

$$\overline{GB} = 200$$

$$120 \cdot 120 \cdot 120 --- 1.1$$

$$90 \cdot 120 \cdot 160 --- 3.4$$

$$80 \cdot 120 \cdot 180 --- 17.3$$

$$75 \cdot 120 \cdot 192 --- 5.8$$

$$72 \cdot 120 \cdot 200 --- 3.5$$

Del rapporto fra il diametro, e
la circonferenza del cerchio.

Archimede per via di poligoni inscritti,
e circoscritti dimostra, che il diametro
sta alla circonferenza come 7:22, ovvero

71:223. Questa proporzione si risolve
ne' 4 termini

$$497:1561::1562:4906$$

perchè $497:1561::7:22$, e più

e $497:1561::71:223$, e meno

Ma intanto si riceve comunemente la
ragione 7:22. Ne importa, che la

ragione di Archimede sia più imperfetta
della ragione di Merio, e che anzi

sia imperfettissima, se si paragona alla
ragione di Ludolfo da Ceileia se lo stesso

piano de' poligoni inscritti, e circoscritti
fino a cifre 36 colla differenza della

sola unità nell'ultima cifra, parti-
cella tanto minutai, che al dire del

Faguet ha minor proporzione al diametro,
di quello che ha un solo grano di sabbia

fra a tutta la Terra.

Gio', dico, nulla importa all'armonica

scienza

scienza, cui basta, che in qualsivoglia modo siano indicati i due termini, che formano la ragione; o sieno essi razionali, od irrazionali; o siano nel punto matematico della vera quantità, o si siano per approssimazione.

Ma questa scienza, le sue prove particolari per assicurarsi, se il grado della imperfezione arrivi ad alterar la ragione.

Averendo questa scienza delle ragioni, e proporzioni in se stessa il loro principio originale, rileva a prima vista la intrinseca natura della ragione, e comparando la ragione dalle altre scienze, debbata alla propria ragione, come simulacro all' idea, come cosa fatta alla legge, con cui deve farsi, conosce il grado dell' imperfezione, ne assegna la causa, e produce quella scienza, ch' è fondata nella natura di ciò, ch' è sempre lo stesso.

La figura circolare è una, per tutto lo stesso, sempre uniforme.

Perchè il raggio, o il diametro è misura del cerchio in qualunque punto della circonferenza; e ~~per~~ il cerchio in qualunque punto può aver principio, e fine.

Questa unità del cerchio nasce dall'

Nihil magnificentius predicari potest. Alim verum?

Il cerchio è uno di armonica unità.

17
19
dall' armonica proporzione, da cui
il cerchio è costruito: questa è
propor. dimostrata nel Trattato di
Musica Cap. 1^{do}. Ciò non ostante
se ne accenna ora una prova.

Si supponga il quadrato AB
pieno di linee rette, parallele alla
 CB , e fatto centro in C intervallo
in A si descriva il quadrante CAB
La circconf. AOB da ciascuna retta
linea parallela, ed uguale alla CB
levata una porzione NO , onde il quadrato
della linea NO terminata dalla cir-
conferenza del quadrante è sempre mezzo
armonico; il quadrato di tutta la MN
è sempre mezzo aritmetico di quella
ragione, in cui la stessa linea MN
ha diviso il diametro AD ; ridotta che
sia la ragione stessa a proporzione
geometrica divisa, costruita, e de-
terminata dai due mezzi armonico,
ed aritmetico.

Per esempio il diametro AD sia
diviso in tre parti uguali, delle quali
sia $AM = 1$, $MD = 2$, cioè in ragion
dupla $1:2$, ch'è nel suo principio
primo. Ridotta questa ragione a
propor. g. d., come si è insegnato altrove,
sara

sarà 6. 8. 9. 12, di cui 8 è mezzo armonico, 9 mezzo aritmetico. Il seno NO come armonico è determinato dalla circonferenza; il seno protetto = 10, come aritmetico, è determinato dal quadrato, e ciò si verifica in ogni seno. Dunque il cerchio è essenzialmente armonico, ed il quadrato essenzialmente aritmetico.

Da questi principj si vuole andare a ritrovar la proporzione fra il diametro, e la circonferenza.

Ma intanto si vuol qui riflettere, che le dimostrazioni di Archimede, di Merio, e di Cullen sono fondate sui poligoni circoscritti, ed iscritti al cerchio. Questi, come geometrialemente dimostrabili, sono confinati fra Aristotelici termini; perchè dette rettilinee regolari figure inscritte, e circoscritte al cerchio, sono in tutte quattro, cioè il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, e l'esagono. Tutte le rimanenti, che non dipendono da queste, e che sono di numero illimitato sono incapaci solo di meccanica costruzione.

Per il contrario di quante divisioni è capace

capace, il diametro, e' capace di al-
trettanti ragioni, e di altrettanti seni,
e di altrettante corde, e sottese agli
archi, in cui il semicerchio resta
diviso dal seno.

Essendo una tale capacita' illi-
mitata, a questo modo d'investi-
gar la ragione, che passa fra il
diametro, e la circonferenza, non pare
sia da paragonarsi per verun modo il
ristrettissimo confine di quattro soli
poligoni, come geomet^{re}. dimostrabili,
quando a confronto sono dimostrabili tut-
ti i seni, come merri armonici delle
indefinite ragioni, nelle quali e' capace
di esser diviso il diametro, e per con-
seguenza dimostrabili ugual^{te} corde,
e sottese, come relative a ciascun
seno, ed a ciascuna ragione ridotta
dal cerchio ad armonica proporzione
e natura.

E' certo, che le indefinite corde
del ^{comprendono} cerchio, e i quattro poligoni geomet^{re}.
dimostrabili, come pure tutti i possibi-
li ad inscrivere, e circoscrivere al cer-
chio, ma non geomet^{re}. dimostrabili.

Ma e' dimostrativa^{te} certo, che
a ciascuna corda corrisponde il suo
seno

seno; che il quadrato di ciascun seno
 è mezzo armonico della ragione, in cui
 si è diviso il diametro, sia pure il
 diametro diviso in parti razionali, o
 irrazionali.

Non vi è adunque confronto fra
 la scienza, che si ha dal breve con-
 fine, a cui sono ristretti i poligoni in-
 critti, e circoscritti, e quello, che può
 averci dall' illimitata estensione de'
 seni, corde, e sottere dell' armonica
 scienza.

I Geometri non han considerato
 finora i seni, se non come mezzi
 geometrici non solo, ma de' termini
 stessi della ragione, in cui si divide il
 diametro; ma non si sono accorti,
 che non i seni, ma i lor quadrati sono
 mezzi armonici della stessa ragione,
 ridotta a proporzione geometrica discreta,
 nè per tanto han saputo, che il
 cerchio sia armonico.

Se alcuno obiettasse, che il cerchio
 è geometrico, e non armonico, perchè
 nella circonferenza vanno a finire i
 seni, che sono mezzi geometrici fra i
 perimetri del diametro; onde la circonferenza
 è geometrica, perchè passa per gli estremi

ms
61

di tutti i merri geometrici. Anzi è
geometrica a più forte ragione di quello
sia armonica; perché non i seni, ma i
quadrati de' seni sono merri armonici, e
la radice è sempre prima del quadrato.

Se uno così obiettasse: egli è pre-
gato avvertire, che qui non si tratta di tro-
var merri fra due termini, ma merri d'una
ragione; non si tratta un mezzo solo,
ma tutti i possibili merri; volendosi
trovare di quante proporzioni possano
esser estremi quegli estremi, che stano
fra loro in una data ragione. E man-
cando quella scienza, che di queste
proporzioni non ne sa trovare se non una
sola, cioè la geometrica.

Via data la ragione, $1:2$. Facilmente
dice il Geometrico, fra 1 e 2 il medio
geometrico è $\sqrt{2}$, e sa trovare la pro-
porzione geometrica continua, $1:\sqrt{2}:2$.

Ma se uno vuol tutti i merri
possibili fra i due estremi, che stano
fra loro $:: 1:2$. Egli la discorre così:
 $1:2:: 2:4$, fra $2:4$ il mezzo arit-
metico è 3 , e si ha $:: 2:3:4$ pro-
porzione aritmetica.

Le dico $2 \times 3 \cdot 2 \times 4 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 4$
cioè $6 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 12$

e ci aggiungo in oltre il 10 fra $9 \cdot 12$, ho 6

ho 8 mezzo armonico; 9 mezzo aritmetico;
 10 contrai^{do}; e $\sqrt{8 \times 9} = \sqrt{72}$ mezzo geom^{ico}.

Da gli estremi $6:12::1:2$. Ecco
 trovati tutti i mezzi, e tutte le propor-
 zioni.

Vorro legger^{le} queste cose, perché
 spiegate in principio.

Or si rifletta, che dati gli estremi
 $2 \cdot 4$ della proporzione aritmet^{ica} continua
 $2 \cdot 3 \cdot 4$ il prodotto di $2 \times 4 = 8$ dà non
 il seno, ma il quadrato del seno, dal
 quale potrà cavar il seno come ra-
 dice. La prima cosa data è la

ragione $2:4$; la 2^a cosa è il qua-
 drato del seno (medio armon^{ico}); la
 terza il seno (medio geom^{ico}); l'ulti-
 mo a trovarsi è il medio geom^{ico}. Dun-

que il cerchio prima di tutto è ar-
 monico, e per renderlo geometrico ho
 bisogno di moltiplicare il mezzo ar-
 monico, ch'è il 3^o a trovarsi per il
 mezzo aritmetico, che si trova dopo il
 armonico, e poi da questo prodotto de-
 durre la radice, la quale non è
 in questa operazione prima del qua-
 drato; ma si deduce dal quadrato.

Onde il cerchio non è geometrico, se
 non per deduzione, cioè perché il
 prodotto del mezzo armon^{ico} pel mezzo aritmet^{ico}

aritm.^{co} è sempre il quad.^{ro} del mezzo
geomet.^{co}

105
62

Sia la ragione di Archimede $7:112$
la più imperfetta rispetto alla quantità;
non è però falsa.

La ragione $7:112$ è di tutte
la più imperfetta.

Quanto a quella di Merio $113:355$
è certo, che 11 non è parte aliquota
di 355, come lo è di 112. Ma se
si confronti con quella di Celen (tutte
due fondate ne' poligoni) succede la
loro risoluzione in due termini, che
formano una ragione. Si faccia
questa comparazione, e poi si ra-
gionerà su que' termini.

La rag.^e di Merio $113:355$

Non ha trovata la circonfer.^a
 355 moltiplicata da 11 = $6+3+12$
somma armonica.

La ragione di Archimede di $7:112$
nel più, e di $71:1123$ nel meno si
risolve nella propor.^e g. di $497:1561 \cdot 1562:4906$.

Si chiama centro la congiunzione
de' due meri $1561 \cdot 1562$, i quali
moltiplicati fra loro, producono quanto
gli estremi moltiplicati fra loro. È
chiaro, che i suddetti due termini so-
no le diff.^e del più, e del meno delle
due ragioni $7:112$, e $71:1123$. È
dunque chiaro, che la sostanza della
dimostrazione consiste nelle differenze,
le quali formano il centro della

$$\begin{array}{r} 71 \quad 1123 \quad 71 \quad 1123 \\ 7 \quad 7 \quad 112 \quad 112 \\ \hline 497 \cdot 1561 \cdot 1562 \cdot 4906 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 71 \cdot 1123 \\ 7 \\ \hline 1561 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \cdot 112 \\ 71 \\ \hline 112 \\ 154 \\ \hline 1562 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 71 \\ 7 \\ \hline 497 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1123 \\ 112 \\ \hline 1445 \\ 146 \\ \hline 4906 \end{array}$$

proporzione

proporzione. Ma questo centro è composto da due termini estremi di ragione, in cui consiste l'essenza della proporzione. Ora comparando la ragione di Merio con quella di Cullen si operi nello stesso modo

$$\begin{array}{r}
 497 \cdot 1561 \cdot 1562 - 4906 \\
 \hline
 1562 \\
 \hline
 3122 \\
 9366 \\
 7805 \\
 \hline
 1561 \\
 \hline
 12438282
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 497 \\
 \hline
 34342 \\
 44154 \\
 \hline
 19624 \\
 \hline
 12438282
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 113 \cdot 355 \cdot 100000000 \cdot 314159265 \\
 \hline
 100000000
 \end{array}$$

$$35500000000$$

$$34499996945$$

$$-3055$$

$$11600293$$

$$\begin{array}{r}
 11600293 \text{ avanzo } 1830 \\
 11600294 \quad 3055
 \end{array}$$

$$942477795$$

$$314159265$$

$$314159265$$

$$34499996945$$

$$-394$$

$$1894$$

$$619$$

$$89$$

$$2854$$

$$1099$$

$$1830$$

$$\begin{array}{l}
 355 : 314159265 :: 35500000000 : 35499996945 \\
 113 : 100000000 :: 11600294 : 11600293
 \end{array}$$

Risulta in cifre 8 la differenza dell'unità, di cui la ragione di Merio eccede quella di Cullen, potendo intendersi trascurarsi gli avanzi per quanto in seguito si deve operare; ed è, che proseguendo la stessa operazione aggiungendo ai numeri di Cullen un num. di cifre sempre mag. l'operazione final. si risolve ne' due termini differenti di un'unità: quello di Merio in 11776666 quello di Cullen in 11776665, nei quali due termini rimane per sempre determinata la ragione differenziale;

cosicchè

105
63

carichi se si voglia fare la grave fatica di adoperare tutti i 36 termini della circonferenza di Cullen, si alteravano bensì le frazioni degli avanzi, ma non mai la suddetta ragione differenziale, la quale resterà perpetua costante ne' due termini suddetti $11776666 : 11776665$.

Adunque in questi due termini la ragione è ridotta al suo principio primo.

Ma di 11776666 è aliquota il termine 11, che per sè solo è misura completa della circonferenza di Merio. Adunque nel suo principio primo differenziale si trova realmente il termine 11, come parte aliquota, e misura completa.

$$\begin{array}{r} 11776666 \quad | \quad 11 \\ \hline 1070606 \\ 1070606 \\ \hline 11776666 \end{array}$$

Si vuol aggiungere una osservazione; ed è, che se si sommino le cifre de' due termini costituenti la ragione differenziale, in cui, come in suo principio primo, si risolve la comparazione delle due ragioni di Merio, e di Cullen delle cifre 11776665 la somma è = 39, e delle cifre — 11776666 la somma è = 40,

si aggiunga in serie aritmetica il 5.° termine 41, il di cui duplo 82, qui sopra dimostrato somma dei cinque termini 11. 14. 17. 18. 12, su' quali si son risolti, dividendole per 5 le somme delle colonne 55. 70. 85. 90. 110

3 tre termini

tre termini 39. 40. 41 come forma
di ragione, costituita dagli estremi
39. 41, siano ridotti a proporzione
g. d.

1560. 1599. 1600. 1601. 1640

Il centro della proporzione sarà for-
mato dal mezzo armonico 1599, e dal
mezzo aritmetico 1560, i quali mol-
tiplicati fra loro producono quanto
gli estremi fra loro moltiplicati, e
fin qui il mezzo contrarmonico 1601
non ha azione veruna nella propor-
zione. Si prenda questo 1601 per
mezzo geometrico relativo a quegli es-
tremi, che per uguagliare il quadrato
di questo mezzo, dovranno dedursi dagli
estremi 1560. 1640. Moltiplicato

$$39 \times 40 \cdot 39 \times 41 \cdot 40 \times 40 \cdot 40 \times 41$$

$$1560 \cdot 1599 \cdot 1600 \cdot 1601 \cdot 1640$$

$$\begin{array}{r} 1599 \\ 1600 \\ \hline 459400 \\ 1599 \\ \hline 2558400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1560 \\ 1640 \\ \hline 62400 \\ 936 \\ 155 \\ \hline 2558400 \end{array}$$

per se stesso questo ~~mezzo~~ 1601, si ha
2563201. Per approssimare il prodotto
2558400 al quadrato di 1601, dovranno
accorrersi gli estremi di $1\frac{1}{2}$, diven-
tando $1561\frac{1}{2}$. $1641\frac{1}{2}$, il cui prodotto
è 2563202 $\frac{1}{4}$, nel qual prodotto vi è la
minima diff. di $\frac{3}{4}$ di una milionesi-
ma parte, da trascurarsi.

Ma, il centro della proporzione di
Archimede debb'essere da 7.22 eccedente
nella circonferenza, e da 71.223 man-
cante, e' 1561. 1562, de' quali e' mezzo
aritmetico il qui risultato estremo minore $1561\frac{1}{2}$

Adunque

Adunque qui si vede il giro di questa scienza, che conduce tutte le diverse posizioni ad un principio primo di centro di ragione, in cui si trovan congiunte le posizioni di Archimede, di Merio, e di Eulen.

Si ritornerà poi alla ragione 39.41 per decidere la impossibilità della quadratura del circolo. Intanto si osservi, che $39 + 41 = 80$ mezzo armonico di quella stessa proporzione, di cui 8.12 è mezzo contrarmonico formata dai tre mezzi della dupla 6.8.9.10.12

Osserviamo i fatti dalle dottrine.

1.^o fatto. Nell'ultima proporzione congiunta 25.30.35.36.42 vi sono i due numeri quadrati 25.36, e la proporzione 9. di ultima della seconda serie ha per estremi 30:42 :: 5:7, da cui nasce detta proporzione 30.35.36.42

La circonferenza di Eulen si faccia mezzo dei due quadrati 25.36; aggiungendo a questi tratti zero, quante cifre di Eulen si vogliono adoperare, e si deducano le diff. fra il mezzo, e gli estremi.

250000000000	31415926535	360000000000	
diff. de	6415926535	4584075456	:: 7 : 5
	5	7	
32079632675	32088514255		

$$\begin{array}{r}
 32079632675 \\
 5434892 \\
 1059446 \\
 1712887 \\
 8247295
 \end{array}$$

$$32084514255$$

$$32079632675$$

$$8881580$$

$$3611$$

$$8247295$$

$$3612$$

$$8881580$$

Se dalla propor^{te} g. d. 30. 35. 36. 42
 si tolga il medio aritmet^{ico} 36, e ri-
 manga il solo aritmet^{ico} 35, resta la
 propor^{te} aritmet^{ica} 42. 35. 30
 5 . 7

Se adunque si deducono le stesse
 diff^{erenz} dalla circonfer^{enza} di Eulen, posta
 come mezzo de' due quadrati 25. 26,
 bensì relativi alla propor^{te} congiunta
 25. 30. 35. 36. 42, ma nella loro
 origine merzi aritmetici, 25 della
 sesquialtera g. d., e 36 della superbi-
 pariente quinta g. d., dove conchiudersi
 armonica in grado eminente la natura
 di quel mezzo (cioè della circonfer^{enza} di
 Eulen), che converte in armonica na-
 tura le diff^{erenz} di due estremi, che in
 origine sono merzi aritmet^{ici}.

Si osservi in oltre in questo fatto, V
 che le diff^{erenz} dei due quadrati sono in
 inversa di quelle, che nascono, se fra
 30. 42 s'interponga il mezzo con-
 trarmonico 37, così 30. 37. 42,
 7 . 5

inversa.

Si osservi in oltre in questo fatto, che le diff.^{le} dei due quad.^{ri} sono in inverza di quelle, che nascono, se fra 30 . 42, s'interponga il merro contr.^{do} 37; così 30 . 17 . 42, inverse delle dedotte dagli stessi estremi col merro armonico 30 . 35 . 42. E però in questo fatto sono attribuite da un tal merro le armoniche diff.^{le} in genere, ma si trovano poi convertite, e determinate alla contrarmonica natura.

Si dimostra la cagione, e l'effetto.

Fatti per serie i numeri quadrati 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 &c.; sommando i due primi $1+4=5$; il suo doppio $=10$ è merro contr.^{do} della dupla g. d. Somando $4+9=13$; il suo doppio 16 è merro contr.^{do} della sesquial.^a Somando $9+16=25$; il suo doppio 50 è merro contrarmonico della sesquiter.^a 2a g. d. Sommati adunque i due termini $25+36=61$; il suo doppio 122 deve dare un merro contr.^{do}

Eccolo 110 . 120 . 121 . 122 . 132

Adunque la contrarmonica origine

è nella somma

$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$$

$$20 \cdot 44 \cdot 25 \cdot 16 \cdot 30$$

$$42 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 56$$

$$10 \cdot 11 \cdot 12$$

$$10 \times 10 \cdot 10 \times 12 \cdot 11 \times 11 \cdot 11 \times 12$$

$$110 \cdot 120 \cdot 121 \cdot 122 \cdot 132$$

130
De' due quadrati $25 + 36$ convertiti da
merri in estremi.

Ma la rivoluzione dell' analisi si
trova nella forma $10 \cdot 11 \cdot 12$, in cui la
azione principale è del merro 11 , e ques-
to è il termine risultante dalla somma
dei termini della tripla armo.^{ica} $6 + 3 + 1 = 10$.
Adunque si trova in effetto la insepara-
bile originale relazione di questo termine
 11 nell' assegnazione della circonf.^a di Cullen,
come merro dei due quadrati $25 \cdot 36$, ben-
chè non appaia il termine ridotto.

Ma qui si chiederà, come vi entri la
circonf.^a di Cullen fra i due quadrati
 $25 \cdot 36$. Vi entra, perchè il termine
relativo alla suddetta circonf.^a è il p.^o 10
della sequenza g. d., di cui il quadrato
 25 è il merro armo.^{ica}. Si aggiungano
al termine 10 tanti eeri quanti vi sono
aggiunti ai quadrati $35 \cdot 36$, e sarà il
quadrato inscritto al cerchio circoscritto

$\therefore 100000000 \text{ & } : 31415926 \text{ &}$

In oltre la circonf.^a di Cullen come
tripla del diametro 100000000 & lo
super della ragione $300000000 \text{ & } : 31415926 \text{ &}$.

Il termine 300000000 & è il primo
della superbiaricente g. d. di
più il diametro di Cullen è 100000000 & .

Al primo termine della forma $10 \cdot 11 \cdot 12$,
da cui si è dedotto il merro contr.^o 122 è $= 10$.

$20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 30$

$30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 42$

Fra tanti diametri adoperati dall'au-
tore, ancora non si sa quale sia il de-
terminato da questa scienza. Se quello
di Arch. 7. n. o quello di Merio
113.355, o quello di Euler 10000000000.
31415926 &c. Da questa molteplicità,
d'incertanza non può formarsi scienza
veruna, anzi resta divisa qualunque
scienza. In oltre il termine $11 = 6 + 3 + 2$,
si trova reale nella circonferenza di Archi-
mede; non si trova in 355 circonferenza di
Merio, nè in 31415926 &c. circonferenza
di Euler; nè il diametro relativo
1000000000 &c. ha misura, o relazione
alcuna col diametro 7. di Archimede.

Secondo fatto. Si incomincia dai
diametri denominati da termini diversi.
Si prendono come estremi 7 di Archimede, e
10 di Euler fra se relativi di principio,
e di natura; 5 della prop. tripla g. d.,
e questo è principio, perchè il suo du-
plo 10 lo è della dupla g. d., la quale
si congiunge con la tripla g. d. nella
proporzione congiunta 4. 6. 8. 9. 12; e
di questa il termine 10 è mezzo contrar.
comune, e 50 è mezzo contrar. della
sequenza g. d. 41. 46. 49. 50. 56. Indi
è, che 5 mezzo contrar. della tripla
moltiplicato per 10 mezzo contrar. della
dupla, produce 50 mezzo contrar. della
sequenza.

Obiezione presa dalla multipli-
cità de' diametri adoperati dall'
Autore.

Lequiterza; e che sommati i 72
 $5 + 10 + 50 = 65$, questa somma è
 mezzo contrarm.^{co} della supertripara^{lla}
 g. d. 56. 63. 64. 65. 72, la quale
 ha la sua forma in 7. 8. 9.

Lascio di annoverare altri mezzi
 contrarmonici divisibili per 5, giacché
 ora non si tratta di questo. Il 72
 ora assegnati 5. 10, e $5 \times 10 = 50$
 son congiunti nell'essenza della
 proporzione congiunta 4. 6. 8. 9. 10. 12,
 in cui i due mezzi contrar.^{ci} origi-
 nali, 5 della tripla, 10 della dupla,
 si congiungono in 10 mezzo contrar-
 monico comune, e di cui rimanendo
 centro di proporzione 6. 8; della
 Lequiterza. $4 : 3 :: 6 : 5$ è mezzo con-
 trar.^{co} 50. Questa essenza de' mezzi
 contrarmonici è fondata in quella stessa
 proporzione 4. 6. 8. 9. 12, da cui
 () si è dedotta la particella
 di Gladone, la qual ha i termini
 del num.^{ro} al num.^{ro}, come 256. 143.

Ora si vuol dimostrare, che i due
 diametri 7:10 sono essenzial.^{te} con-
 giunti nella sudetta proporzione, e
 lo sono in virtù de' due mezzi origi-
 nali contrarm.^{ci} 5 della tripla, e
 10 della dupla. La cosa è patente
 ne' due

$$7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$\begin{array}{r} 7 \times 8 \cdot 7 \times 9 \cdot 8 \times 8 \cdot 8 \times 9 \\ 56 \cdot 63 \cdot 64 \cdot 65 \cdot 72 \end{array}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$$

$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$$

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$$

$$\begin{array}{r} 42 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 56 \\ 3 \cdot 4 \end{array}$$

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12$$

$$6 \times 8 = 48 = 4 \times 12$$

è patente nei due termini 5.7 radici della dupla; avendosi dalla lor divisione i tre termini 2.3.4, dai quali si ha 6.8.9.10.12, di cui 10 è il mezzo contrarm.^{co} comune alla proporzione congiunta 4.6.8.9.10.12, la quale rispetto agli estremi tripli è in origine 2.3.4.5.6, di cui 5 è il mezzo contrarm.^{co} subduplo di 6.

Se adunque nelle radici dedotte dalle forme delle ragioni, si trova 7 radice dupla fra 5.10 estremi dupli, è patente la essenziale congiunzione di 7 mezzo con 5.10 estremi.

Trovandosi per tanto mezzi contrarm.^{co} 5.10.7, ch'è il loro mezzo duplo radicale di ragione non può non essere della stessa contrarm.^{co} natura. Ma s'è diam.^{to} d'Archimede, 10 di Geulea, adunque son fra loro essenzial.^{de} congiunti, in genere nella contrarm.^{co} natura; in specie, e precisione in ragione dupla radicale di ragione, che vuol dire nel prin.^{do} primo a priori di tutte le possibili semplici ragioni radicali.

Quindi è, che nel quadrato AM , Fig.^a 12 e nel triangolo AFM , ch'è un quarto del quadrato inscritto si trovano comuni i punti A, F, M , e le linee AF, FM, MA ,

5.7

$$1 \times 3 : 3 \times 4 :: 12 : 4 : 1 : 2$$

5.7.10

25.49.100

più della metà di 49

più del doppio di 49



Natura in duplo consistente

delle quali AM è $= \sqrt{AFM^2}$, la quale AM è insieme corda del quadrante, e base del triangolo, o sia diagonale del quadrato.

Quindi è, che delle dette radici dupli 5.7 formando il progresso fino al 4.^o grado, ed al medesimo grado sommando, e sottraendo 9.10 formata dai due mezzi aritmetico 9, e contrar.^{do} 10 della dupla 6.8.9.10.12 s'incontra precisa: la rap.^{ta} di Archimede fra il cerchio, ed il quadrato.

Le radici dupli nel loro primo grado sono 5.7.10, ma per gradi indefiniti si vanno approssimando sempre più alla vera quantità con la seguente operazione.

Supposto $AB=10$, $AD=7$, AD manca d'un cinquantesimo. Posto $AB=14$;

$AD=17$, $AC=12$; AD manca di $\frac{1}{248}$.

Posto $AB=58$, $AD=41$, $AC=19$,

AD mezzo manca di $\frac{1}{1682}$.

Posto $AB=140$, $AD=99$, $AC=70$;

AD mezzo eccede di $\frac{1}{9800}$.

Ad si crida più volte la radice del 4.^o grado nel mezzo $AD=99$ della radice del primo grado $AD=7$. Sono tutte uguali.

5 . 7 . 10

5 . 7

12 . 17 . 24

12 . 17

29 . 41 . 58

29 . 41

70 . 99 . 140

Fig. 17

$AB=10$ $5 \times 10 = 50$

$AD=7$ $7 \times 7 = 49$

$AC=5$

$AB=14$ $14 \times 12 = 168$

$AD=17$ $17 \times 17 = 289$

$AC=12$

$AB=58$ $19 \times 58 = 1082$

$AD=41$ $41 \times 41 = 1681$

$AC=19$

$AB=140$ $70 \times 140 = 9800$

$AD=99$ $99^2 = 9801$

$AC=70$

105
8

L'iscrizione delle rettilinee regolari
figure nel cerchio porta necessariamente alla
divisione armonica della circonferenza.

in $1. \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} . \frac{1}{6}$

Sia la circonferenza circolare; si conduca un diametro AB , la circonferenza sarà divisa in due parti uguali. Ma poi il solo diametro non basta alla formazione di una rettilinea regolare figura.

Si divida la circonferenza per serie in tre parti uguali, sarà AC lato del triangolo equilatero, e questa sarà la prima rettilinea figura regolare, che può inscrivere nel cerchio. Si seguiti a dividere per serie la circonferenza in 4 parti uguali, sarà AD lato del quadrato inscritto, seconda figura regolare inscrivibile al cerchio.

Si divida la circonferenza in 5 parti uguali, si avrà il lato del pentagono regolare.

Si divida la circonferenza in 6 parti uguali, si avrà il lato dell'esagono, e queste due sono la terza, e quarta figura regolare inscritta al cerchio.

È adunque manifesto, che la determinazione de' lati delle figure regolari dipende per serie da $1. \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5} . \frac{1}{6}$ della circonferenza. Ma questa serie è di fatto la armonica; adunque per

costruire nel suo principio primo la serie delle rettilinee regolari figure inscritte nel cerchio, deve dividerli la circonferenza per l'armonica serie continua.

Si vuol osservare, che quando si è arrivato ad $\frac{1}{6}$ della circonferenza, si ha $AF =$ al raggio del cerchio, onde si ritorna da capo al cerchio.

In quel modo che nel prender tutte le ragioni co' merzi determinati, la ragione dupla è il principio della serie, e 5.7 è la fine della serie; ma 5.7 danno le radici della ra-

gione dupla, tornano adunque da capo alla dupla; poichè, come si è detto altrove 5.7 numeri dispari sono composti de' termini 2, 3 della sequialtera ragione, e di 3, 4 della sequiterza.

Fatti adunque i diametri $AD = 5$, ed Fig. 5.

$AE = 7$, e diviso il primo ne' suoi componenti 2.3; ed il 2° ne' suoi 3.4, si hanno i seni $BF; CG :: \sqrt{2 \times 3} : \sqrt{3 \times 4}$

$:: \sqrt{6} : \sqrt{12}$, cioè si hanno le radici della dupla 6:12, le quali radici della dupla riconducono alla dupla; come il raggio del cerchio riconduce al cerchio.

La prima regolare rettilinea figura, ch'è il triangolo equilatero, è determinata

1. 2	1. 2	
1. 2. 3	2. 3. 4. 5. 6	1. 3
2. 3. 4	6. 8. 9. 10. 12	2. 4
3. 4. 5	12. 15. 16. 17. 20	3. 5
4. 5. 6	20. 24. 25. 26. 30	4. 6
5. 6. 7	30. 35. 36. 37. 42	5. 7

5. 7 danno
 $\sqrt{6}$ $\sqrt{12}$ radici della
 dupla 6 : 12

è determinata dalla ragion tripla,
razionale nel suo principio primo, ch'è
 $AC = \frac{1}{3}$ della circonferenza; e nel suo
effetto, ch'è il diametro AB , diviso
dal seno CF in modo che $BE = 1$,
e $FA = 3$, ch'è la ragion tripla.
Ed in oltre il quadrato di AC è ugua-
le a tre quadrati del raggio, ch'è
pure ragion tripla; e si noti la
natura delle due triple armonica
nella circonferenza $:: 1 : \frac{1}{3}$, perchè
è per divisione; aritmetica nel diame-
tro, perchè è per somma.

Se poi si considerino le due rette
 AB , AC diametro, e lato del trian-
golo equilatero, queste sono fra loro
come le radici della sesquiterza;
perchè il quadrato del diametro
è uguale a 4 quadrati del rag-
gio, ed il quadrato del lato
del triangolo equilatero è uguale
a tre quad. del raggio; onde

$$AB^2 : AC^2 :: 4 : 3 ; AB : AC :: \sqrt{4} : \sqrt{3}$$

Dalle cose fino a qui esposte,
pare si possa dedurre, che la ricerca

Fig. 19

Giorno alla tripla

1. 3. 4. 5

per cercare il raggio del diam.
alla circonferenza.

della ragione: che passa fra il
 diametro, e la circonferenza traspor-
 tar si possa dai poligoni inscritti,
 e circoscritti alla serie armonica da
 cui nascono que' poligoni; e precisat:
 alla tripla $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ co' merzi ar-
 monico 3, ed aritmetico 4 a causa
 dell' armonica natura del cerchio,
 e della tripla principio primo delle
 rettilinee regolari figure, e pri-
 ma di tutte le armoniche pro-
 porzioni $6 \cdot 3 \cdot 2$ la qual pro-
 porzione $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ è insepara-
 bile dall' armonica natura del
 cerchio; poichè il primo poligono
 regolare (cioè il triangolo equila-
 tero) è determinato dal cerchio ar-
 monico: diviso nella tripla $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$,
 e da questo primo poligono si ri-
 solve il diametro nella ragion tri-
 pla; ed i due quadrati del diame-
 tro, e del lato del triangolo equi-
 latero si risolvono nella ragion
 sesquiterza: e tutto ciò si risolve,
 e si rinchiude

109
70

e si rinchioda, come in suo principio primo nella tripla g. d. 2.3.4.6, di cui estremi 2.6 sono in tripla, ed i di cui meri 3.4, formanti il centro della proporzione, sono fra loro in ragion sesquiterza, cioè di 3 mezzo armonico, e 4 mezzo aritmetico.

In oltre $\overline{CE}^a = AFB = 3 \times 1 = 3$, ed il quad. del seno protratto (ch'è il semidiametro) = 4, mezzo aritmetico di questa proporzione 2.3.4.6; di cui 3 è il mezzo armonico

Non si vuol far caso per ora della materiale indicazione del lato dell' esagono uguale al raggio del cerchio; e della tripla, indicata da 2. 1/2 del diametro alla circonferenza.

Si vuole bensì osservare, che dovendo assegnarsi per diametro 7 somma di 3+4 centro della tripla g. d. questo termine si assume come mezzo aritmetico fra 3.4, ch'è $3\frac{1}{2}$, $3.3\frac{1}{2}.4$,

e raddoppiando tutto $6 \cdot 7 \cdot 8$ che $12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$,
 4 è mezzo aritmetico; fra $3 \cdot 4$ il
 mezzo aritmetico è $3 \frac{1}{2}$.

Il centro della tripla $g. d.$
 $12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ è la sequiterza $3 \cdot 4$,
 ed il diametro dov'esser di arit-
 metica estrinseca natura; adunque
 non può esser, che $3 \frac{1}{2}$.

Ma la circonfer.^{ea} è indicata nel
 suo principio primo dalla tripla
 armonica. Adunque non può esser,
 se non la somma di $6+3+12=21$,
 da cui resta necessariamente escluso
 il mezzo aritmetico 4. Ma
 $3 \frac{1}{2} \cdot 11 :: 7 \cdot 12$; e questa è la
 ragione dimostrata da Archim.^e co' po-
 ligoni. Adunque è bene ricorrere alla
 tripla $12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ per cercare il rap-
 porto del diametro alla circonfe-
 renza.

Il calcolo dell'armonica scienza è
 intrinsecamente armonico, perchè è fondato
 nella divisione della circonfer.^{ea}, non già nell'
 arit.^{ica} serie delle parti ugli, ma nell'arm.^{ica}
 serie delle ragioni, espresse dalla serie

Il calcolo dell'arm.^{ica} scienza
 è intrinsecamente armonico
 delle frazioni

-
g
x
=
x
d
e
a
e
p
s
g
co
pe
gu
la
a
a
si
rag
la
po
se
pe

147
91
dalla serie delle frazioni $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$,
come si è dimostrato col fatto nella
formazione delle rettilinee regolari figure.

Le frazioni $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c. non sono
parti uguali nè pel loro denominatore,
nè per il loro numeratore; è chiaro,
che nel primo loro ~~contatto~~ non possono
intendersi, che come forme di ragioni;
perchè non s'è fra loro uguaglianza
di termini.

È chiaro, che trasportando le ragioni
dall'armonico sistema delle ragioni all'
aritmetico sistema del numero, le ragioni
cambiano luogo, quantità, e natura.

Luogo, perchè data l'unità principio
comune, qualunque armonica ragione
è dentro dell'unità, e però intrin-
seca; qualunque aritmetica ragione
è fuori dell'unità, e però estrinseca.

Quantità, perchè sommando p.g. i due
termini della dupla della serie armo-
nica $1 \cdot \frac{1}{2}$; la somma è $1 \frac{1}{2}$; somman-
do i due termini della ~~della~~ subduple
 $1 \cdot 2$ della serie aritmetica, la somma
è $= 3$.

Natura, perchè l'armonica serie
procede dal più al meno per diffe-
renze disuguali, e l'aritmetica serie
dal meno al più per differenze
uguali.

uguali; e però sono di natura op-
posta, della quale intrinseca diver-
sità diremo a suo tempo, e luogo

Quindi è, che il calcolo comune
istituito per la misura del diame-
tro, e della circonferenza, essendo in-
teramente aritmetico, perchè si risol-
ve nella divisione del diametro in
parti uguali, alle quali tenta di ri-
durre la circonferenza divisa nelle
stesse parti con sempre maggior
approssimazione all'uguaglianza della
minima particella, che nel diametro
è la unità aritmetica, come misura
comune delle parti del diametro, e
della circonferenza: è ben chiaro, che
se con questo calcolo fondato sul dia-
metro si trova la irrazionalità nella
circonferenza; fondandosi il calcolo ar-
monico sulla circonferenza, deve in esso
trovarsi la irrazionalità nel diametro.
Da ciò nasce, che qui si pianta di
primo l'ancora nella tripla g. d. la qua-
lità della circonferenza come cognita, e ra-
zionale, e inalterabile nella somma
di tre termini 6. 3. 2 formanti
la tripla armonica. Per conseguenza
il diametro, che da geometri si suppone

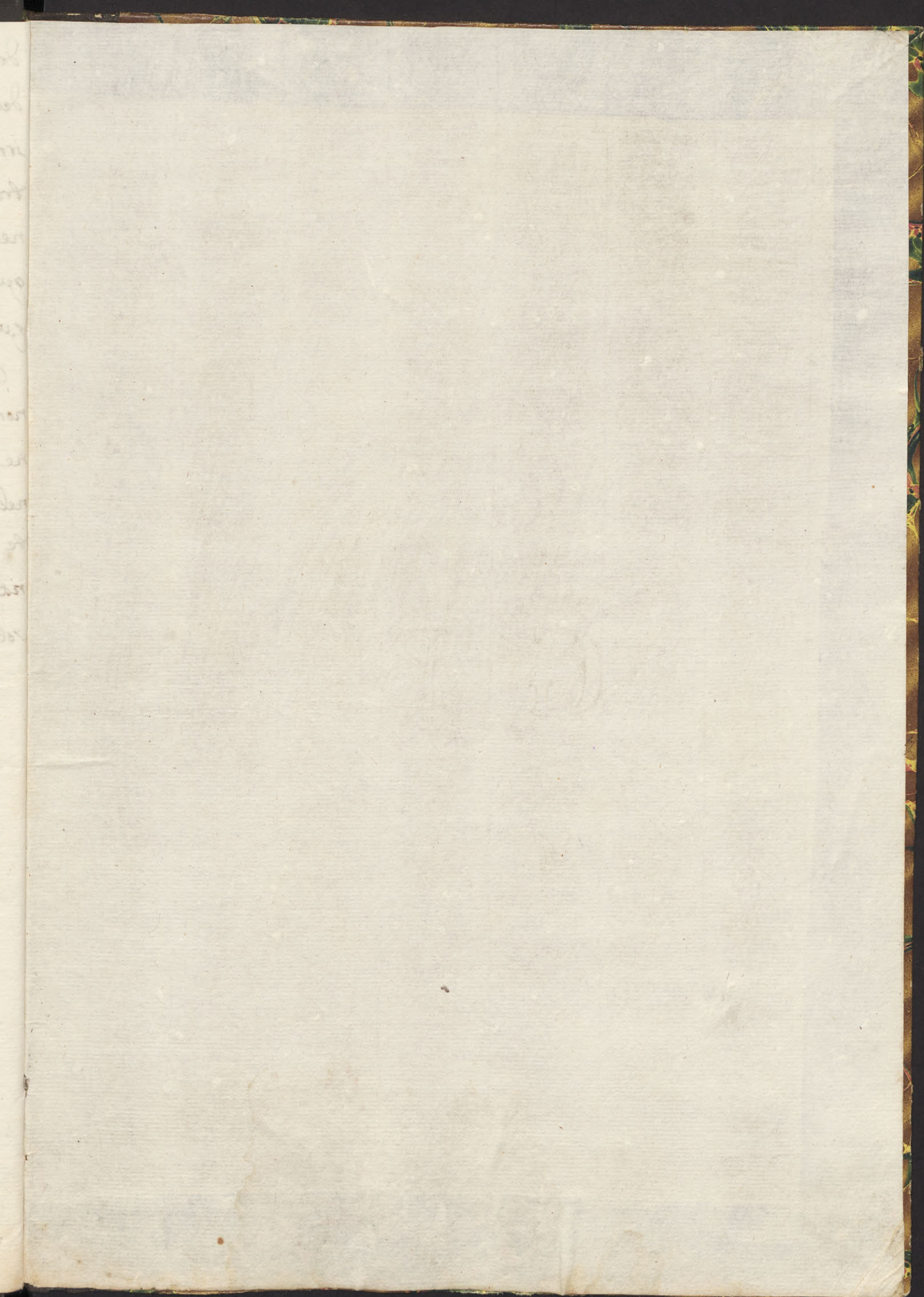
247
72

di quantità nota, e razionale, qui
deve suporsi di quantità incognita, ed
irrazionale; e però nella geometria
trovandosi l'eccesso d'incognita quantità
nel termine π della circonferenza,
qui si trova il difetto d'incognita
quantità nel termine r del diametro.

Ma la difficoltà di questo affare
non consiste altrimenti nella conversio-
ne dell'irrazionalità della circonferenza
nell'irrazionalità del diametro. Consiste
bensì nella retta intelligenza della
natura delle ragioni, che si ha dalla
sola musica. V. del 2.^o suono.







179

