Sulle "Ragioni e Proporzioni" Libri VI
dedotti dagli scritti
di G. Tarloni, ordinati
e dimostrati e con molte
regg. illus. dal Co.
Pro. G. Colombo

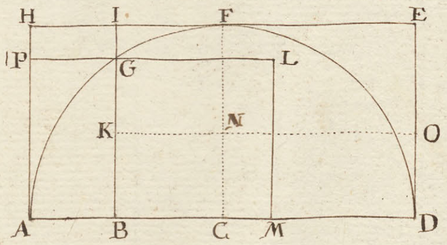
Trap.

R. ARCHIVIO DI STATO
PARMA

Archivio Parm.
Arm. A. Sez. 2ª
Mss. Colombiani
N 3

Tavola I.

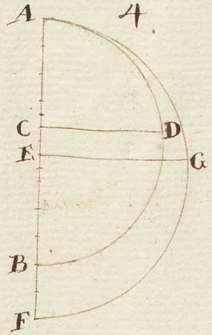
1



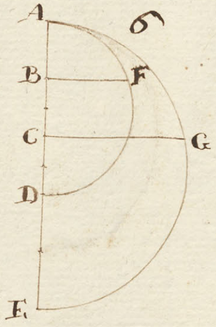
2

3

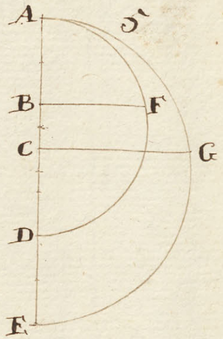
4



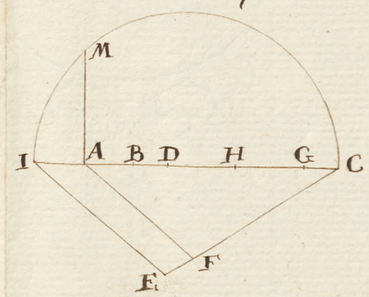
6



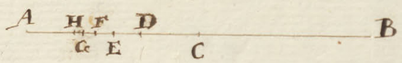
5



7

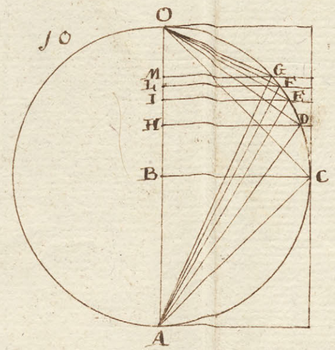


8

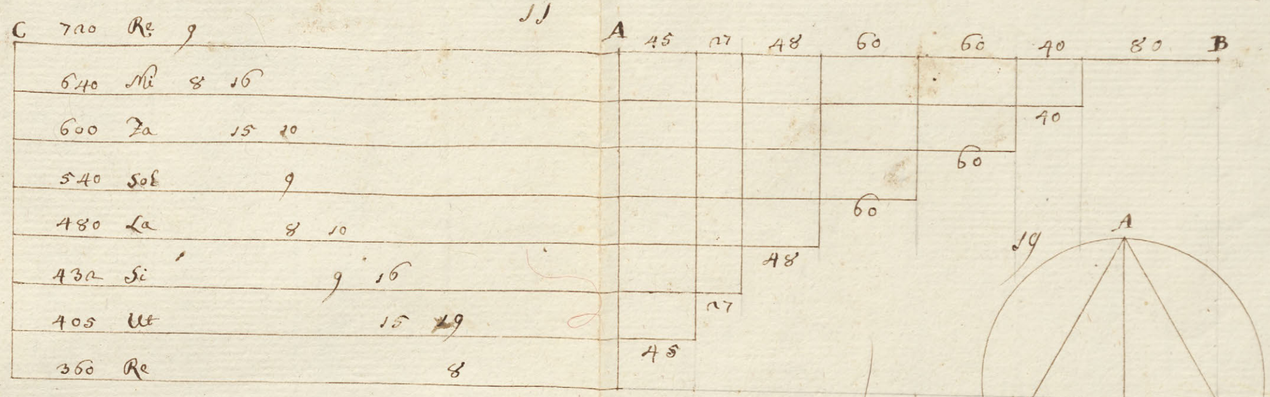


Fronte 9

10

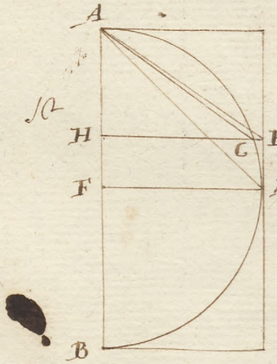


11



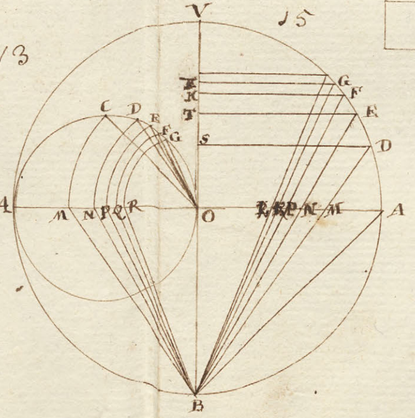
Questa scrivebbe una sola figura

12

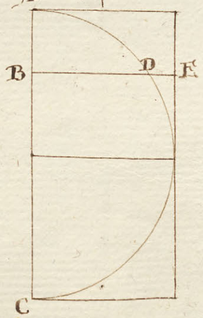


13

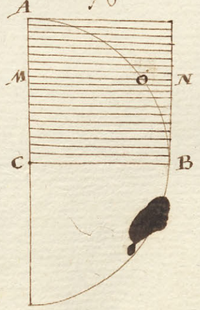
15



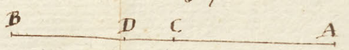
14



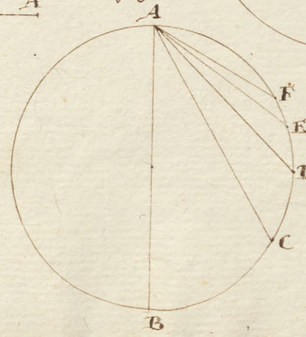
16



17



18



19

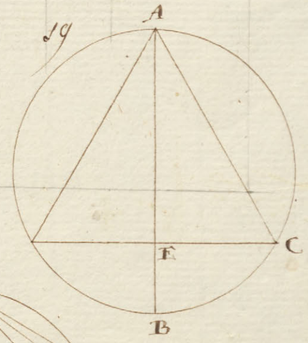
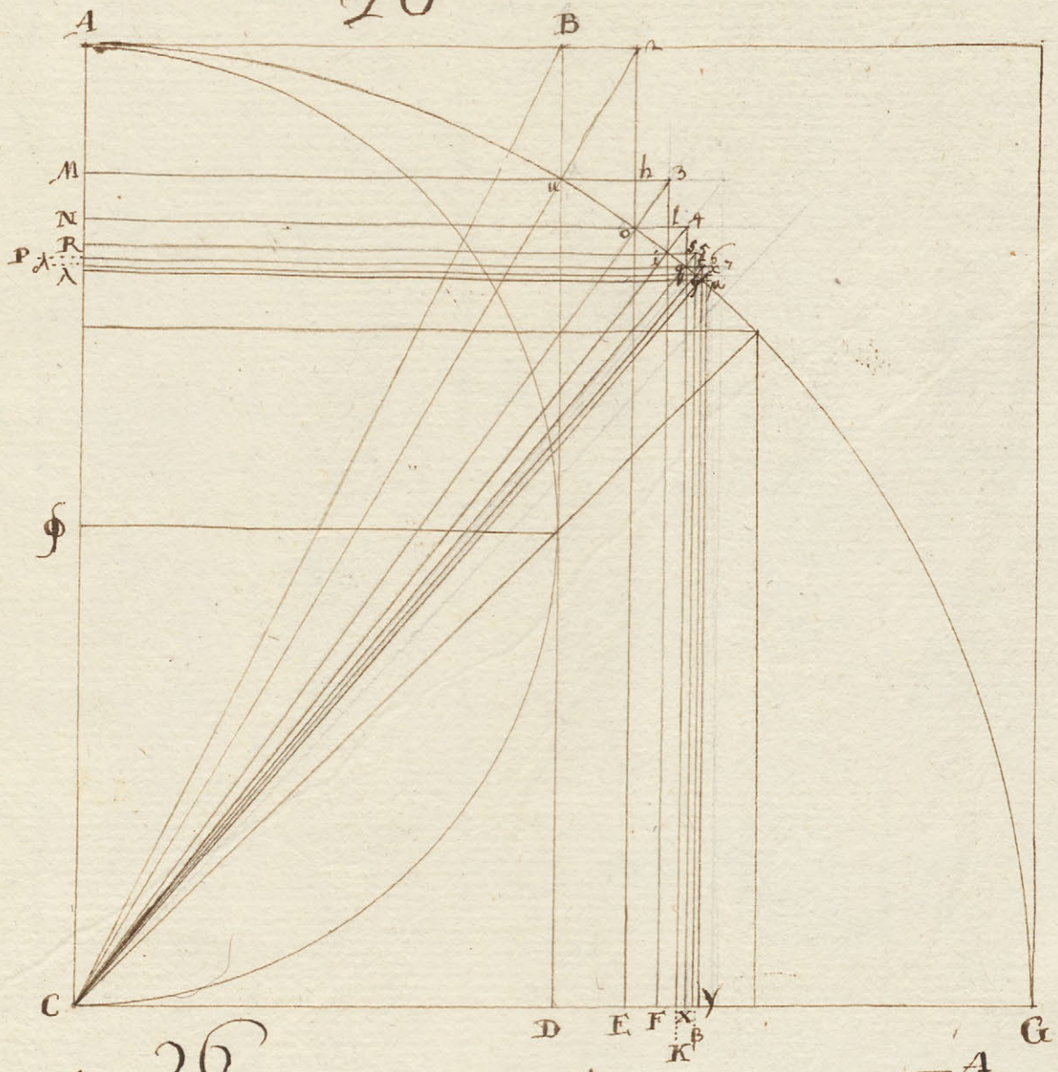
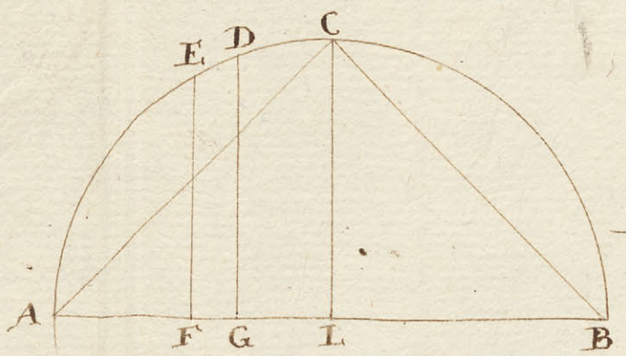


Tavola II.

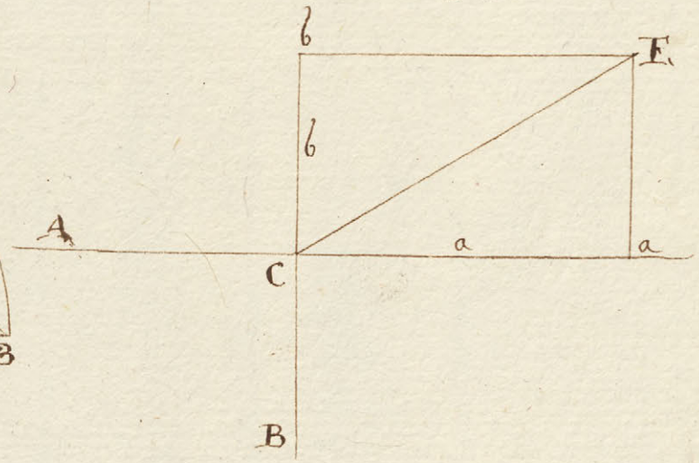
20



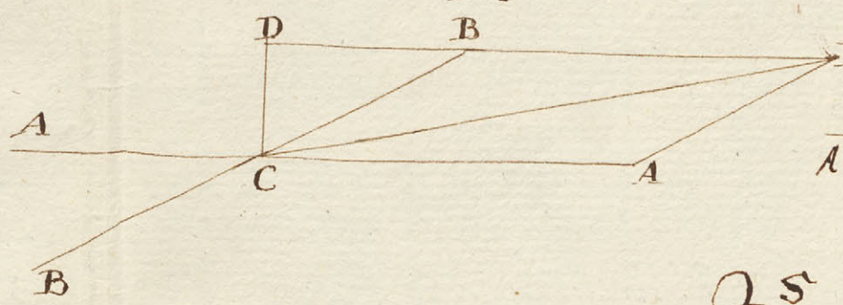
21



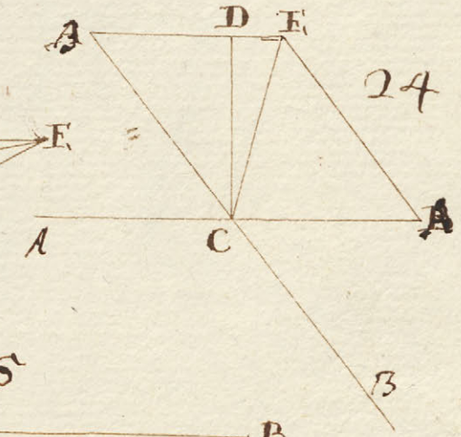
22



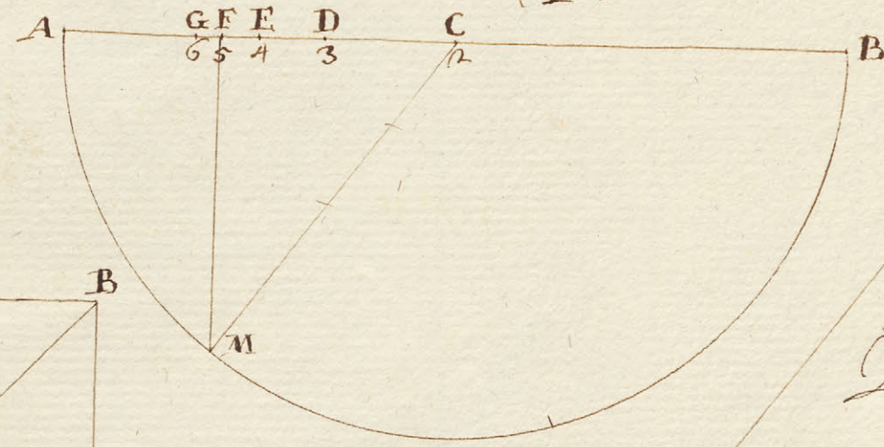
23



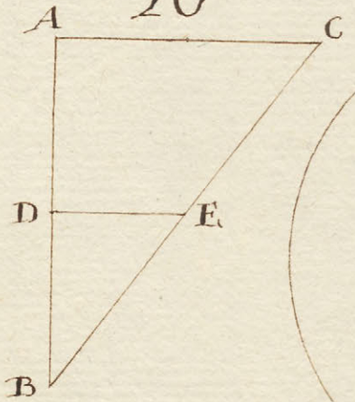
24



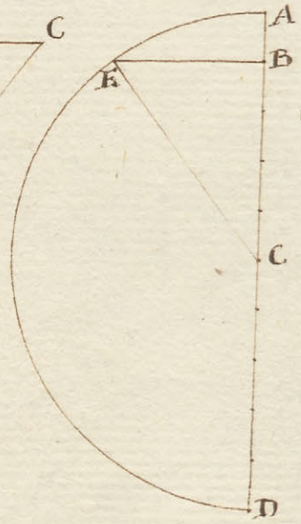
25



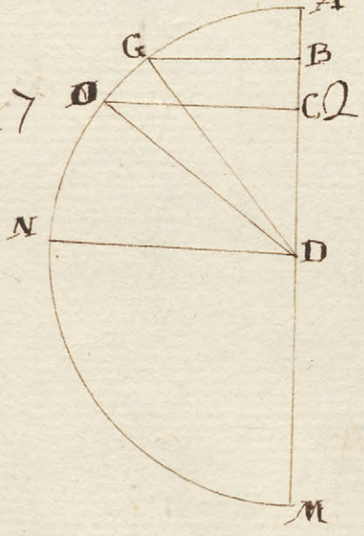
26



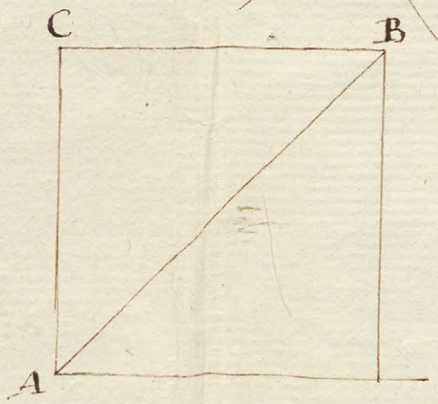
27



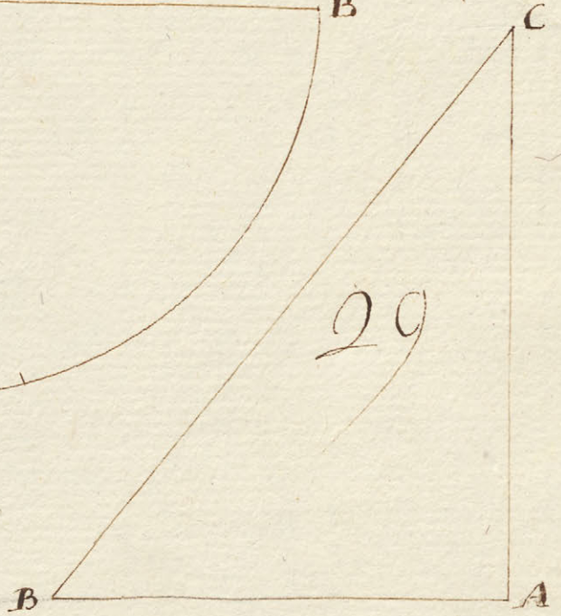
28



29



29



Delle Ragioni, e Proporzioni

Libri Sei

Tradotti dagli scritti

Di Giuseppe Tartini

Ordinati, dimostrati, e con molte aggiunte illustrati

Da D. F. A. Colombo.

Indice

Prefazione — — — f. 1
Lib. 1.° Definizioni — — — f. 7
Lib. 2. delle ragioni co' loro mezzi determinati, term.co Geometrico, Arithm.co, e constructivo f. 17
Lib. 3.° Osservazioni su le ragioni co' loro mezzi determinati — — f. 35
Lib. 4.° dell'ordine delle cose naturali — — — f. 172
Lib. 5.° Osservazioni sul cerchio e sul detto primo — f. 201
Lib. 6.° de' triangoli Diagonii f. 249
Lib. 7.mo della ragione che passa fra il diametro e la circonferenza del cerchio — — — f. 277

Prefazione

Avendo io letto la Risposta di un Anonimo al celebre Sig.r Rousseau circa al suo sentimento in proposito d'alcune proposizioni del Sig.r Giuseppe Tavolini, stampata in Venezia appresso Antonio de Casovo nel 1769: m'invogliai grandemente d'intendere con quali principj fosse arrivato il celebre Sig.r Tavolini a quei Teoremi, de' quali in quella Risposta si ovatta: Esposto al Tavolini istesso questo mio desiderio, Egli con la naturale sua cortesia mi permise di essere con Lui qualche giorno della settimana ed io ne approfittai metodicamente fino che di vitte. Dopo ch'Egli mancò (mancanza immatura per i suoi scritti, e da non rammentarsi mai senza lagrime) dal suo corrispondente Erede e Nipote, mi furono consegnati i suoi scritti, attinenti alle Ragioni, e Proporzioni, le che avea pensato di fare l'Autore stesso, mentre viveva. Di tal uso mi furono quei primi lumi dalla viva voce dell'Autore comunicatimi, quale è l'uso dello specchio cilindrico nel guardare dentro di quello certe figure, le quali all'occhio

n Sr. Cosmiano Pietro Tavolini esecutore testamentario e prediletto Nipote dell'Autore

modo altro non pajono che cose o dele sporcate da colori gettativi senza regola; ma dallo specchio med.mo sono regolate per modo, che le parti buche reflettute ai nei luoghi, rappresentati vedono una figura perfetta, e con le sue giuste proporzioni dipinta. Breji pratica pure in quei discorsi del modo di parlare, e di scrivere dell' Autore, che era nuovo.

Con questi lumi mi sia posto ad esaminare attentamente gli scritti di questo Autore, e con fatiche non indifferenti in mezzo ad altre mie ~~noiose~~ occupazioni, ho procurato d'impossessarmi delle cose contenute ne' scritti med.mi, non interrompendo mai simili applicazioni, come è mio costume, fino che non mi è parsuto di aver ben compreso una tale facenda.

Nacque questa mia costanza, che qualchiamerei ostinazione, dall'esserm.i io posto in capo da molto tempo che niuna cosa apporti un danno magg.re all'~~opera~~ avanzamento delle scienze, e delle arti, di quello che le arreca quella legierezza, ed incostanza con cui gli uomini sogliono passar sopra ~~a~~ ai inconsideratamente a ciò che si ~~offre~~ presenta ai loro sensi, o alla loro mente

per modo che appena vi riflettono
a menove sempre cercano
cose nuove, ovasuvano le cose
che lov si pavano avanti, e
contenti di una leggiera superfi-
cie delle cose, non ricercano
l'intimo delle ~~medesime~~,
da cui però solamente aver
si potrebbe e scienza, ed
abilità.

Coloro che per buona lovo e nostra
fovtuna hanno imparato a
vatenere co' freni e con le cavene
della prudenza e della costanza
la leggierezza dell'animo, e la
brama, o sia il furove, di
veder sempre cose nuove; e
si son avvezzati a meditare
molto, ed ad esaminar lungamente
le cose ~~che si offrono alla~~
~~lovo mente, ed a considerarle~~
è maravigliosa cosa il vedere
quante cose, quando sublimi
quando vili abbiano ritro-
vate, le quali servono o
ad ornive, e perfezionare
la facoltà di pensare, ovvero
avvanzare le arti ed i comodi
della umana società.
Il volgo intanto si vale di
quei comodi e di quei vantaggi,
e qualche volta ancora ne
abusa, senza non sapersi
di sapere da chi, e in qual via
e con quante vigilie e fatiche
tutte queste cose siano state da-

uomini valentissimi ritrovate
Senza mai per tanto cosiavvili
ritirare dalla fatica, ne infas-
tidire dalla lunghezza dell'opera
con la meditazione e con una
~~costanza che avrebbe potuto~~
~~parere ecces~~ ferma ostinata, ho
seguitato sempre la impresa
non imitando i giovanetti, che
ognora si mutano di parere,
e ciò che ora amano perdu-
tamente, poco tempo dopo
lo abbandonano e gettan via.
Un grand'esempio di costanza
erano per me gli scritti,
de' quali ora ~~[illegible]~~; e' buoni
de' quali, uomo di acutissimo
ingegno, applicatosi da
giovanetto alla musica,
divertì in essa tutto; e mentre
andava in traccia di quelle
cose che a quella sua arte
apparteneve potessero, si
abbatte in certi generi di
proporzioni, le quali non
solo sono utili e necessarie
alla musica, di cui mostrano
i veri fondamenti; ma vedendo
più in oltre più ampia la
dottrina delle proporzioni;
mostrano alcune proprietà
del cerchio, che prima erano
ignote. Ed indicano di più
il principio, che nelle opere
naturali adoperava la Natura.
Le quali cose quell'uomo acuto
e diligente

e diligente, onde in anni 60 costantemente, e le raccolse poi in uno scritto, ch'è quello appunto che fu a me consegnato; acciò lo ponessi in chiaro, e lo pubblicassi.

Ho già compito una parte di questa opera faticosa; ed è questa, cortese Lettore, che ora vi presento; e secondo il giudicio che voi ne farete, io mi determinerò poi o a proseguirla, ovvero ad abbandonarla.

Ho diviso questa operetta in sei libri. Il primo contiene alcune premesse. Nel secondo si tratta delle ragioni co' mezzi determinati, armonico, geometrico, e contrarmonico, e si mostra in qual modo nelle ragioni razionali si trovino questi mezzi in numeri, e si trovino per via del cerchio. Il mezzo Geometrico non si ha in un numero solo, ma è indicato da due, cioè ha fra il mezzo armonico, e l'aritmetico. Nel terzo si contengono molte osservazioni su la ragione co' mezzi determinati, e molti corollarj, attinenti alle medesime. Questi tre libri somigliano come il tronco dell'albero, da cui nascono tre rami, che sono i seguenti libri.

Nel 4°. Libro si parla dell'ordine delle cose naturali.
Nel 5°. si ovvata del terzo suono, e del cerchio, in cui c'è la ~~formola~~ del terzo suono
Nel 6°. de' Triangoli Diagonici
e nel 6°. si espongono molte cose relative alla ragione che passa fra il diametro, e la circonferenza del cerchio.

Premetteremo qui alcune prenozioni di cui faremo molto uso.

1. Quanto al 5°. Libro: Il grande ingegno del Tavolini ha trovate molte cose, attinenti alle ragioni, e proporzioni; le quali cose tutte nascono, come da lor fonte, da questo problema: Data una qualunque ragione, trovare fra i termini di questa ragione, i mezzi armonico, Geometrico, Aritmetico, e Contr=armonico

Questi mezzi tutti egli li trova per mezzo del cerchio, avvivel cerchio.

~~Ridotta la ragione data ad una ragione razionale, e trovati i mezzi Aritmetico, Geometrico, e Contr=armonico ritrovare il mezzo armonico per mezzo del cerchio, poi ridotta la ragione data ad una ragione razionale, e trovati i mezzi Aritmetico, Geometrico, e Contr=armonico,

Proposizioni

I. La scambievole relazione fra due quantità di un medesimo genere, si chiama Ragione. Può esservi ragione fra tutte quelle cose, che hanno quantità come tempi, suoni, voci, luoghi, moti, pesi, gravezze, velocità, forze, resistenze, azioni, cause, effetti &c. Indi è chiaro che la scienza delle ragioni e proporzioni è una scienza universalissima, madre di tutte le Matematiche, e di tutte le buone Filosofie.

II. In due maniere ragionar fra loro si possono le quantità, cioè 1°. per via di sottrazione, cosicchè apparisca la differenza, o l'eccesso di una quantità sopra l'altra, come se dicesi il 5. eccede il 3. di due unità, e questa si chiama ragione aritmetica

III. oppure per via di divisione cosicchè apparisca quante volte l'una contiene l'altra quantità, o qualche parte di essa. E questa ragione si chiama geometrica.

IV. Il coziente di questa divisione o di questa ragione si chiama esponente della med.ma per es. $\frac{6}{3} = 2$; 2 è l'esponente della ragione 6 a 3, la qual ragione per questo appunto si chiama dupla. $\frac{6}{2} = 3$. Ove è l'esponente della ragione 6 a 2, che per questo si chiama ragione tripla.

V. Ragione composta è quella che nasce fra due grandezze composte, o sia moltiplicate per es. $2 \times 4 . 3 \times 8$ è ragion composta delle ragioni di $2 . 3$, e di $4 . 8$. Cioè se avessi due ragioni $2 . 3$, e $4 . 8$, e moltiplicassi fra loro gli antecedenti ed i conseguenti cioè $2 \times 4 . 3 \times 8$ ne nascerebbe la ragione $8 . 24$ composta delle due ragioni $2 . 3$, e $4 . 8$.

$$\begin{array}{c} 2 . 3 \\ 4 . 8 \\ \hline 2 \times 4 . 3 \times 8 \\ 8 . 24 \end{array}$$

VI. Se le due ragioni componenti sono uguali, come $2 \times 2 . 3 \times 3$, la composta si chiama duplicata di una di esse, in questo caso duplicata di $2 . 3$.

Se vi fossero tre componenti uguali $2 \times 2 \times 2 . 3 \times 3 \times 3$, la composta si chiama triplicata di una di esse, in questo caso di $2 . 3$.

$$\begin{array}{c} 2 . 3 \\ 2 . 3 \\ \hline 2 \times 2 . 3 \times 3 \\ 4 \quad 9 \\ 2 . 3 \\ \hline 8 . 27 \end{array}$$

VII. La vagione che passa fra la prima, e la ultima di ove grandezze continue proporzionali (nelle quali cioè la vagione della 1ª alla 2da grandezza è la stessa che passa fra la 2da grandezza e la 3za) come saranno ∴ 2. 4. 6; sarà 2. 8 vagione duplicata di 2. 4, ovvero di 4. 6.

E se continuasse la stessa vagione ∴ 2. 4. 8. 16. 32 fino a cinque termini, la vagione del 1º all'ultimo è quadruplicata della vagione del 1º al 2do, o del 2do al 3º; cioè composta di quattro uguali

2. 4. 8. 16. 32

$\frac{2}{4} \times \frac{4}{8} \times \frac{8}{16} \times \frac{16}{32} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

VIII. Da ciò si vede, che il significato di duplicata, triplicata &c è molto diverso da quello di dupla, tripla &c In queste si paragonano fra loro le quantità 4. 2; 6. 3; In quelle si paragonano fra loro le vagioni; ficchè le vagioni composte chiamar si devono vagioni di vagioni; o sia vagioni, e vapporti che passano non fra le grandezze che formano le vagioni, ma fra le vagioni, che esse fra loro sono quantità o grandezze.

Lom

IX. Due ragioni geometriche si dicono uguali quando anno il med.mo esponente, come $\frac{6}{2} = \frac{3}{1}$, perche' due e due anno il med.mo esponente 3. Cosi' $\frac{100}{100} = \frac{2}{1}$ perche' hanno il med.mo esponente. Sicche' la quantita' delle ragioni non dipende dalla grandezza de' termini, ma dal loro rapporto.

X. Due ragioni aritmetiche si dicono uguali quando hanno la med.ma differenza come $5-3 = 6-4$, perche' hanno la med.ma differenza

XI. Le quattro grandezze che formano due ragioni uguali, si chiamano grandezze proporzionali, e questa uguaglianza di due ragioni si chiama una proporzione. La propor. aritmetica si scrive cosi' 5. 3 :: 6. 4. La Geometrica cosi' 6. 2 :: 3. 1

XII. E' chiaro che ove tre grandezze formar possono una proporzione, quando la 2da fa due figure, cioe' di conseguente della prima ragione, e di antecedente della 2da $5 \cdot 3 :: 3 \cdot 1 \;\Big|\; \therefore 5 \cdot 3 \cdot 1$

$6 \cdot 4 :: 4 \cdot 2 \;\Big|\; \therefore 6 \cdot 4 \cdot 2$

Questa si chiama proporz. continua; l'altra di 4. termini discreta

XIII. Se prosseguisse la continua proporzione, oltre i ove devvnini, si chiama progressione ∴ 7.5.3.1.
∴ 6.4.2.1.

XIV. oltre alle due proporzioni Aritmetica, e geometrica, ve ne sono altre due; l'una è l'armonica, l'altra la contrarmonica

XV. Tre grandezze (2.3.6) delle quali la prima sta alla terza (2.6) come la differenza fra la prima, e la seconda (1) sta alla differenza fra la seconda, e la 3ª (3) si chiamano grandezze in proporzione armonica

2.3.6
2.6 :: 3-2.6-3
2.6 :: 1 . 3

2.3.6
2.6 :: 3-2.6-3
2.6. si chiamano gli estremi della proporzione.
3. si chiama, ed è il mezzo proporzionale armonico della med.ma proporzione
6.3.2

XVI. La proporzione contrarmonica è quella, in cui ove grandezze (2.5.6) sono tali che il terzo termine sta al primo (6.2) come la differenza fra il 1º ed il 2do (5-2=3) sta alla differenza fra il 2do, ed il terzo (6-5=1)

2.5.6
6.2 :: 5-2.6-5
:: 3 . 1

Cassa 2.5.6
6.2 :: 5-2.6-5 :: 3.1

~~1135~~

sta della differenza fra
il 2do ed il 3°. (6−5=1)
~~6. ai. 5 = ai. 6−5 :: a. 1~~

XVII ~~sol.~~ Dalle sovrapposte definizioni
apparisce che fra 2, e 6
in. 2. 3. 4. 5. 6
il. 3. è mezzo armonico,
il. 4. mezzo aritmetico
il. 5. mezzo contrarmonico.
Similmente 6. 8. 9. 10. 12
fra 6. 12. (ragion suddupla)
l'8. è medio armonico,
il. 9. è mezzo aritmetico,
il. 10. è mezzo contrarmonico
e √72. sarebbe il mezzo geometrico

2 √72. sarebbe il mezzo geometrico

√8×9

XVIII Si osservi che il prodotto
del medio armonico
il mezzo aritmetico
è uguale al prodotto
degli estremi
8×9 = 6×12 = 72 = al
quadrato del medio Geometrico di cui dongon il luogo, e fan le veci i mezzi armonico, ed aritmetico

1. 4
2. 6
2. 5. 6
10. 16. 25. 34. 40

XVIIII. Quindi s'intende che il
mezzo armonico, et il
mezzo aritmetico costituiscono con gli estremi
una proporzione Geometrica discreta 2. 3 :: 4. 6
16. VI°. di eucl. 6. 8 :: 9. 12

25×16 = 400 = 40×10

1. 5
1. 3. 5
3. 5. 9. 15

5×9 = 45 = 3×15

della progressione
Aritmetica.

XX Ecco la formola generale di tutte le progressioni aritmetiche nelle quali tutte la differenza fra un termine, ed il suo ~~altro~~ antecedente deve essere la ragione.

$\therefore a \cdot a \pm b \cdot a \pm 2b \cdot a \pm 3b \cdot a \pm 4b \cdot a \pm 5b \cdot a \pm 6b \cdot$ ~~ecc~~

ogni esempio numerico di progressione crescente o decrescente può adattarvi a questo esemplare, e però quanto si troverà vero nell'esemplare stesso, sarà vero di ogni qualunque numerica progressione.

Bassa guardare questa formola con attenzione, acciò subito salti agli occhj che la somma del primo ed ultimo termine è uguale alla somma del secondo, e penultimo, del terzo, e terz° ultimo, e generalmente di due dal primo, ed ultimo egualmente distanti: e se i termini sono caffo

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9

1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 + 4 + 6 = 2 × 5

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

1 + 6 × 3 = 3 × 7 = 21

6 = 1 + 5 × 1 / ulto = a + n − 1 × b

/ somma = ½ n × 2a + n − 1 × b

= na + ½ nn − n × b

la somma del primo, ed ultimo vale il doppio di quel, di mezzo

Quindi è che la somma di tutti i termini di ogni Aritmetica progressione è uguale alla somma del primo, e dell'ultimo termine, moltiplicata per la metà del numero de' termini

Ed un qualunque termine è uguale al primo termine più tante differenze quanti sono i termini, che lo precedono

Dalla formola generale posta da principio ~~de~~ in=feriori si possono molte ~~giocondissime~~ conseguenze intorno alle ~~Geom~~ Aritmetiche progressioni.

1. Fra due termini (3 . 9) trovare un mezzo proporzionale aritmetico. Aggiungi 3 + 9, avrai 12; prendine la metà 6: questo sarà il mezzo aritmetico che cercavi. Infatti = 3 . 6 . 9 .

2°. Essendo vero, che non solo nelle progressioni, ma ancora nelle proporzioni eppresse da questa formola

a · a+b :: c · c+b

si verifica, che la somà degli estremi è uguale alla somà de' mezzi: si vede chiaramente, che due sono i modi, date tre grandezze aritmeticamente proporzionali, di ritrovarne la quarta. Un modo si è di aggiungere al secondo la differenza che passa fra il primo, ed il 2do. L'altro modo è di sommare il 2do ed il secondo termine e dalla loro somma ritrovare il primo

a · 3 :: 5 · x
3+3 − a = 6 − a = b

3°. Dati due termini di una progressione è facilissimo ritrovare il 3°. in due modi. 1°. aggiungendo al 2do la differenza che passa fra il 1°. ed il 2do. 11°. Raddoppiando il 2do, e da questo doppio sottraendo il 1°.

XXI [illegible]

Della Progressione Geometrica

XXI. Ogni progressione Geometrica si può esporre così
∴ a . ab . ab². ab³. ab⁴. ab⁵. ab⁶. ecc
poiche vi è sempre fra due termini consigui il medesimo esponente b.

Quindi è che il prodotto del p°. e dell'ultimo termine è eguale al prodotto di due altri qualunque dal primo, e dall'ultimo egualmente distanti, ed al quadrato di quel di mezzo, se il numero de' termini è caffo. poichè
a × ab⁶ = ab × ab⁵ = ab² × ab⁴ = ab³ × ab³. le quali quantità ridotte ad una ad una prese sono a²b⁶

Facilmente si vede che il mezzo proporzionale geometrico fra a . b. è = √a × b ; fra a . b. è = √ab.

In ogni proporzione di quattro termini, che si chiama proporzione geometrica diretta, e si può esprimere così a . ab :: c . cb, il prodotto degli estremi a × cb è eguale al prodotto de' mezzi ab × c. , essendo l'uno e l'altro = abc
onde apparisce

Onde apparisce, che se il prodotto degli estremi, $r \times 6$, è uguale al prodotto de' mezzi, 3×4, le quattro grandezze $r \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$ sono proporzionali; altrimenti se esse non lo fossero, vi sarebbe un'altra $\cdot x \cdot$ tale, che $x \cdot 3 :: 4 \cdot 6$; adunque $6x = 12$; adunque $x = r$

Ecco dunque un certo segno di conoscere se quattro grandezze siano proporzionali, ed è quando il prodotto degli estremi è uguale al prodotto de' mezzi

Da questa proposizione, ch'è la 16ª del VI° di Eucl., si possono con somma facilità dedurre quasi tutte le proposizioni del V° lib. del medesimo Euclide cioè

Se $a \cdot ab :: c \cdot cb$; sarà alternando $a \cdot c :: ab \cdot cb$; ed invertendo $c \cdot a :: cb \cdot ab$; e componendo $c \pm a \cdot a :: cb \pm ab \cdot ab$ (o dividendo e convertendo) $c \cdot c - a :: cb \cdot cb - ab$ moltiplicando di sé $c \cdot a :: cb \cdot ab$

sarà $cd \cdot ad :: cb \cdot ab$

$cd \cdot ad :: cbd \cdot abd$

$cd \cdot ad :: cbe \cdot abe$ dividendo di d

se $c \cdot a :: cb \cdot ab$

sarà $\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} :: cb \cdot ab$

$\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} :: \frac{cb}{b} \cdot \frac{ab}{b}$

$\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{b} :: \frac{cb}{e} \cdot \frac{ab}{e}$

Inoltre $a + ab \cdot a - ab :: c + cb \cdot c - cb$

Se a · ab :: c · cb
et ab · abe :: cb · cbe ; sarà ex æquo
a · abe :: c · cbe

Se a · ab :: c · cb
et ab · abe :: $\frac{c}{e}$ · c ; sarà ex æquo perturbata
a · abe :: $\frac{c}{e}$ · cb

Finalmente se a · ab :: c · cb
et e · ef :: g · gf ; sarà
ax e · abxef :: cxg · cbxgf
et $\frac{a}{e}$ · $\frac{ab}{ef}$ :: $\frac{c}{g}$ · $\frac{cb}{gf}$

Le quali cose debbono sono vere, perchè in debbe queste mutazioni resta sempre il prodotto degli esteremi uguale al prodotto de' mezzi

Trovare un 3°. proporzionale

XXII

Della Proporzione e Progressione Armonica

Si sa il n°. XV, che ove grandezze, delle quali la 2ª. sta alla 3ª. come la differenza fra la prima, e la 2da alla differenza fra la 2da e la 3ª. si dicono, e sono in proporzione armonica.

Probl°. I.

Date due ragioni a · b dicesi proporzione armonica, trovarne il terzo · x ·

È adunque a · b. x · una proporzione armonica ·

1°. Se la proporzione va crescendo, sarà la definiz°. ova data

a · x :: b − a · x − b

$a \cdot x :: b - a \cdot x - b$

$ax - ab = bx - ax$

$2ax - bx = ab$

$x = \frac{ab}{2a - b}$

Sia $a = 2$; $b = 3$; sarà

$x = \frac{2 \times 3}{4 - 3} = \frac{6}{1} = 6$

2. 3. 6 sarà un'arm.ca propor.

2°. Se la proporzione va scemando

sarà $a \cdot x :: a - b \cdot b - x$

$ab - ax = ax - bx$

$ab = 2ax - bx$

$x = \frac{ab}{2a - b}$ come prima

Sia $a = 6$; $b = 3$; sarà

$x = \frac{6 \times 3}{2 \times 6 - 3} = \frac{18}{9} = 2$

6. 3. 2. proporz.l arm.ca

3°. Se a fosse il p.o termine,

b il 3°, ed x quel di mezzo

sarebbe $a \cdot x \cdot b$ prop. arm.ca

Se la proporz.l va crescendo

sarà $a \cdot b :: x - a \cdot b - x$

$ab - ax = bx - ab$

$2ab = ax + bx$

$x = \frac{2ab}{a + b}$

Se la proporz.l va scemando

sarà $a \cdot b :: a - x \cdot x - b$

$ax - ab = ab - bx$

$ax + ax = 2ab$

$x = \frac{2ab}{a + b}$ come p.a

Se $a = 6$; $b = 2$, sarà

$x = \frac{2 \times 6 \times 2}{2 + 6} = \frac{24}{8} = 3$

6. 3. 2. prop. arm.ca

Se $a = 2$; $b = 6$; sarà

$x = \frac{2 \times 2 \times 6}{2 + 6} = \frac{24}{8} = 3$

Svoll.to 2do

Continuare una progres. armonica dove il terzo termine quanto uno vuole

Siano $\frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d}$ i due primi termini di una propors. arm.ca: è chiaro, che p svovare il terzo termine x, bisogna invece di a, e di b tor: scrive i due primi termini ova posti, e dopo fatto il calcolo si svoverà

$$\frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d} \cdot \frac{c}{f+3d}$$

Se ova io fo $g = f+d$; la propors. arm.ca precedente diventa $\frac{c}{g} \cdot \frac{c}{g+d} \cdot \frac{c}{g+2d}$; ma p ciò che ova si è detto: $\frac{c}{g+d} \cdot \frac{c}{g+d} \cdot \frac{c}{g+3d}$ fanno una propors. arm.ca adunque $\frac{c}{g} \cdot \frac{c}{g+d} \cdot \frac{c}{g+2d} \cdot \frac{c}{g+3d}$ fanno un' armonica progressione.

Ova supponendo $h = g+d$, i tre termini

$$\frac{c}{h+d} \cdot \frac{c}{h+2d} \cdot \frac{c}{h+3d}$$

sono in propors. arm.ca e così seguitando sempre adunque una serie infinita di frazioni, che abbiano sempre un num.o antecedente ed abbiano per conseguenti i termini p ordine di una aritmetica progressione, fovà una progressione armonica

$$\frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d} \cdot \frac{c}{f+3d} \cdot \frac{c}{f+4d} \cdot \frac{c}{f+5d} \cdot \frac{c}{f+6d} \cdot \frac{c}{f+7d} \cdot \frac{c}{f+8d} \&$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \&$$

della

$$\frac{a}{f} \cdot \frac{b}{f+d} \cdot \frac{ab}{2a-b} = \frac{cc}{f \times f+d}$$
$$\frac{2c}{f} \cdot \frac{c}{f+d}$$

$$= \frac{cc}{ff+df}$$
$$\frac{2cf+2cd-cf}{ff+df}$$
$$= \frac{cc}{cf+2cd} = \frac{c}{f+2d}$$

$$\frac{ab}{2a-b} = \frac{cc}{f+d \times f+2d}$$
$$\frac{2c}{f+d} - \frac{c}{f+2d}$$

$$= \frac{cc}{f+d \times f+2d}$$
$$\frac{2c \times f+2d - c \times f+d}{f+d \times f+2d}$$

$$= \frac{cc}{2c \times f+2d - c \times f+d}$$

$$= \frac{c}{2f+4d - f-d}$$

$$= \frac{c}{f+3d}$$

XXIII. Della Proporzione Convarmonica

Si sa che la proporzione convarmonica è quella, in cui il secondo termine sta al pr. come la differenza fra il pr. ed il sdo sta alla differenza fra il sdo, ed il 3°.

Probl.a

Dati due termini a · b di una proporz.e convarmonica, trovarne il 3°. x

a · b · x

x · a :: b − a · x − b

$xx - bx = ab - aa$

$xx - bx + \frac{bb}{4} = \frac{bb}{4} + ab - aa$

$x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{bb}{4} + ab - aa}$

$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{bb}{4} + ab - aa}$

Sia a = 2; b = 5, sarà

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 10 - 4}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

non ha luogo il − √ affchè verrebbe un negativo.

2 · 5 · 6 proporz.e convar.

Se si cercasse il medio proporzionale convarmonico

a · x · b

b · a :: x − a · b − x

$bb - bx = ax - aa$

$bb + aa = ax + bx$

$x = \frac{bb + aa}{a + b}$

Se a = 2; b = 6, sarà

$x = \frac{36 + 4}{2 + 6} = \frac{40}{8} = 5$

Si ottervi che la convarmca proporz.e non può continuarsi nè in interi, nè in rotti,

Reciso

a b x

6 5 2

2 · 6 :: 1 · 2

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{30 - 36 + \frac{25}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{6 + \frac{25}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$

$= \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

2 · 5 · 6

5 · 6 · x

a b

$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{ab - aa + \frac{bb}{4}}$

$x = \frac{6}{2} \pm \sqrt{30 - 25 + \frac{36}{4}}$

$x = 3 \pm \sqrt{30 - 25 + 9}$

$x = 3 \pm \sqrt{14}$

x incommensurabile, o sorda

XXIV.

come più la armonica, per serie.

Corollario universale

Da tutte le cose premesse si deduce, che fra a · b.

N.° XXII Il medio armonico è = $\frac{2ab}{a+b}$

N.° XXI Il medio geometrico è = $\sqrt{ab}$

N.° XX Il medio aritmetico è = $\frac{a+b}{2}$

Il medio contrarm.co è = $\frac{aa+bb}{a+b}$

Adunque

1.° a · $\frac{2ab}{a+b}$ · $\sqrt{ab}$ · $\frac{a+b}{2}$ · $\frac{aa+bb}{a+b}$ · b

meni arm. geom. arit.co contrarm.co

e se farò $a+b = 2r$, e sarà $\frac{a+b}{2} = r$, avrò

2.° a · $\frac{2ab}{2r}$ · $\sqrt{ab}$ · r · $\frac{aa+bb}{2r}$ · b

e moltiplicando tutti i termini per 2r

3.° 2ar · 2ab · 2r × $\sqrt{ab}$ · 2rr · $\frac{aa+bb}{2}$ · 2br

e dividendo per 2r avrà

4.° ar · ab · r × $\sqrt{ab}$ · rr · $\frac{aa+bb}{2}$ · br

Se connettessi il medio geometrico avrebbe

5.° ar · ab · rr · $\frac{aa+bb}{2}$ · br

arm. arit. contrarm.co

Connettendo poi ancora il medio contrarmonico, verrebbe la proporzione geometrica discreta

ar. ab

6.° $av.\ ab :: vv.\ bv$

in cui ab sarà il medio armonico, ed vv il medio aritmetico.

7.° Per ridurre una qualunque ragione $a.b$ a proporzione geometrica dijcreta co' medij armonico, ed aritmetico: Ritrovisi il medio aritmetico $\frac{a+b}{2}$ (che chiamo v) fra i termini della data ragione sicchè si abbia la forma

$$a.\ v.\ b$$

Si moltiplichi il primo termine (a) per il rdo e medio $(v.b)$ e si moltiplichi similmte il rdo termine (v) per il rdo, e medio $(v.b)$ così

$$a \times v.\ a \times b :: v \times v.\ b \times v$$

e si avrà la proporzione geometrica dijcreta che si cercava

$$av.ab :: vv.bv$$

cioè medij, armonico ab, ed aritmetico vv. cui è facile (quando un voglia) aggiugnere il medio contrarmonico $\frac{aa+bb}{a+b}$, od il medio geometrico $v\sqrt{ab} = \sqrt{abvv}$

Delle cose contenute in questo Corollario faremo molto uso nel 2.° e 3.° libro.

Libro Secondo

Delle Ragioni co' mezzi loro determinati, Armonico, Geometrico, Aritmetico, e contr'armonico

Teorema I.

Date tre grandezze continue proporzionali geometriche: il quadrato della loro media è medio armonico fra le estreme, moltiplicate per la loro media aritmetica

Siano le tre continue proporzionali geometriche

$\div$ a . ab . abb

sarà $a \times \frac{a+abb}{2} \cdot aabb \cdot abb \times \frac{a+abb}{2}$

$\frac{aa+aabb}{2} \cdot aabb \cdot \frac{aabb+aab^4}{2}$

cioè $\frac{aa+aabb}{2} \cdot aabb \cdot \frac{aabb+aab^4}{2}$

sarà, dico, un'armonica proporzione.

Ciò sarà vero, se il 1° termine sta al terzo come la differenza fra il 1° ed il 2do sta alla differenza fra il 2do ed il 3°. Si prova che così è

$\frac{aa+aabb}{2} \cdot \frac{aabb+aab^4}{2} :: aabb - \frac{aa+aabb}{2} \cdot \frac{aabb+aab^4}{2} - aabb$

$:: \frac{aabb-aa}{2} \cdot \frac{aab^4-aabb}{2}$

$1 \cdot bb :: 1 \cdot bb$

Dunque è vero che date tre continue proporzionali geometriche

Q. che si voleva dimostrare.

Esempio 1.° $1 \cdot \sqrt{1 \times 3} \cdot 3$

$1 \cdot \sqrt{3} \cdot 3$

$1 \times \frac{1+3}{2} \cdot 3 \cdot 3 \times \frac{1+3}{2}$

$1 \times 2 \cdot 3 \cdot 3 \times 2$

$2 \cdot 3 \cdot 6$ arm.ca

Es. do $2 \cdot 4 \cdot 8$

$2 \times 5 \cdot 16 \cdot 8 \times 5$

$10 \cdot 16 \cdot 40$ arm.ca

Covollario

Fig. 1.ª

Poichè il seno BG per la 8.ª del lib. VI. di Euclide, è mezzo proporzionale geometrico fra i pezzi del diametro $AB \cdot BD$: sarà il quadrato del seno, cioè $\overline{BG}^2$ mezzo proporzionale armonico fra i pezzi med.ni $AB \cdot BD$, moltiplicati per il raggio AC cioè $AB \times AC \cdot \overline{BG}^2 \cdot BD \times AC$ ovvero $BH \cdot \overline{BG}^2 \cdot BE$ saranno in armonica proporzione

lib. I Prop. N.° XXIV

Sia $AB = a$ $a \times v \cdot a \times b \cdot b \times v$

$BD = b$ $av \cdot ab \cdot bv$

$AC = r = \frac{a+b}{2}$

Infatti $av \cdot bv :: ab - av \cdot bv - ab$

$a \cdot b :: ab - a \times \frac{a+b}{2} \cdot b \times \frac{a+b}{2} - ab$

$:: ab - \frac{aa-ab}{2} \cdot \frac{ab+bb}{2} - ab$

$:: \frac{ab-aa}{2} \cdot \frac{bb-ab}{2}$

$:: a \cdot b$

Es. 1.° Sia $AB = 1$ sarà $= 1 \cdot \sqrt{1} \cdot r$

$BD = r$ $1 \times \frac{3}{2} \cdot r \cdot r \times \frac{3}{2}$

$BG = \sqrt{1 \times r}$ $\frac{3}{2} \cdot r \cdot \frac{6}{2}$

$3 \cdot 4 \cdot 6$ arm.ca

Es. do $AB = 1$ $= 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 3$

$BD = 3$ $1 \times 2 \cdot 3 \cdot 3 \times 2$

$BG = \sqrt{3}$ $2 \cdot 3 \cdot 6$ arm.ca

Es. 3.°

C. 3. BB = 3 — 3 · √15 · 5
BD = 5 — 3×4 · 15 · 5×4
BE = √15 — 12 · 15 · 20 avon.ca

Teorema 2do

Date tre grandezze continue proporzionali geometriche: Il rettangolo fatto dalla somma delle estreme per la metà di essa somma, meno il quadrato della loro media, è medio proporzionale contraarmonico fra il 1°. termine, ed il 3°., moltiplicati per la loro media proporzionale antiarmonica, cioè per la metà della loro somma

Siano le tre continue proporzionali geometriche

∴ a . ab . abb

sarà ~~aa×aa+abb . aa+abb aa+ab - aabb~~

$a \times \frac{a+abb}{} \cdot a+abb \times \frac{a+abb}{} - aabb \cdot \frac{abb+ab}{}$

cioè

$\frac{aa+aabb}{} \cdot \frac{aa+2aabb+aab4}{} - aabb \cdot \frac{aabb+aab4}{}$

$\frac{aa+abb}{} \cdot \frac{aa+aab4}{} \cdot \frac{aabb+aab4}{}$

questa, dico, sarà una contraarmonica proporzione; poiché il 3°. termine sta al 1°. come la differ.a fra il 1°. e 2do alla differ.a fra il 2do, ed il 3°.

aabb + aab4 . aa+aabb :: aa+aab4 − aa − aabb . aabb+aab4 − aa − aab4

bb + b4 . 1+bb :: aab4 − aabb . aabb − aa

bb . 1 :: b4 − bb . bb − 1

:: bb . 1

dunq. è vero che date tre &c. &c.

~~444~~ 170

Fig. 1ª

Lib. I ~~Prop~~ N°. XXIV

Cor. 1

Si è veduto nella dimostrazione che il mezzo contrarmonico è la metà della somma dei quadrati degli estremi, cioè = $\frac{aa+ab}{2}$

Cor. 2°

Fig. I

Dato il semicerchio $\beta\gamma\delta$ col semi-quadrato circoscritto $\beta\varepsilon$: Il mezzo contrarmonico sarà $\delta\varepsilon - \overline{\beta\zeta}^2$; e gli estremi saranno $\beta\vartheta \cdot \overline{\beta\delta}$, cioè

$\beta\beta\zeta \times \beta\zeta\vartheta \cdot \delta\beta \times \alpha\eta - \beta\beta\zeta \times \beta\zeta\delta \cdot \beta\zeta\delta \times \beta\zeta\vartheta$

$a\nu \cdot r\nu - ab \cdot b\nu$

saranno in contrarm.ª proporz.ne

Infatti

$b\nu \cdot a\nu :: r\nu\nu - ab - a\nu \cdot b\nu - r\nu\nu + ab$

$b \cdot a :: r \times \frac{a+b}{2}^2 - ab - a \times \frac{a+b}{2} \cdot b \times \frac{a+b}{2} - r \times \frac{a+b}{2}^2 + ab$

$:: r \times \frac{aa+rab+bb}{4} - ab - \frac{aa-ab}{2} \cdot \frac{ab+bb}{2} - r \times \frac{aa+rab+bb}{4} + ab$

$:: \frac{aa+rab+bb}{2} - ab - \frac{aa-ab}{2} \cdot \frac{ab+bb}{2} - \frac{aa-rab-bb}{2} + ab$

$:: \frac{aa+bb}{2} - aa - ab \cdot \frac{ab+bb}{2} - aa - bb$

$:: bb - ab \cdot ab - aa$

$:: b \cdot a$

Cor. 3°.

$r\nu\nu - ab = r \times \frac{a+b}{2}^2 - ab$

$= r \times \frac{aa+rab+bb}{4} - ab$

$= \frac{aa+rab+bb}{2} - ab$

$= \frac{aa+bb}{2}$

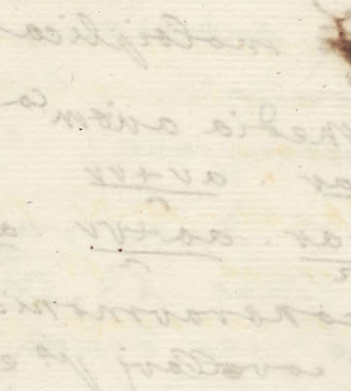
Lib. I ~~Prop~~ N°. XXIV

cioè il mezzo contrarmonico è eguale alla metà della somma de' due quadrati degli estremi, come si è osservato altrove nel cor. 1°.

Teorema 13°.

Teorema 3°.

Fig. 13



Date due grandezze ... in proporz.e aritm.co cotinue ∴ a . v . b :
dico che il quadrato del minor estremo $\overline{bG}^2 = aa$ insieme con la media proporzionale armonica fra le estreme bG, BG moltiplicate per la metà della loro somma (la qual media è = ab) vale a dire aa + ab sarà il doppio del mezzo proporzionale arm.co fra la vera bG, ed il raggio b7, moltiplicati per la loro media aritmetica, cioè

$$a \times \frac{a+v}{2} \,.\, aa+ab \,.\, v \times \frac{a+v}{2}$$

ovvero $\frac{aa+av}{2} \,.\, rav. \,.\, \frac{av+vv}{2}$

Si deve provare che rav è il doppio del mezzo arm.co fra $\frac{aa+av}{2}$ ed $\frac{av+vv}{2}$, e per conseg.a av sarà il medio armonico fra questi estremi

$\frac{aa+av}{2} \,.\, av \,.\, \frac{av+vv}{2}$

$$\frac{aa+av}{2} \,.\, \frac{av+vv}{2} :: av - \frac{aa-av}{2} \,.\, \frac{av+vv}{2} - av$$

$$a \,.\, v :: \frac{av-aa}{2} \,.\, \frac{vv-av}{2}$$

$$:: av-aa \,.\, vv-av$$

$$:: a \,.\, v$$

Adunque date due grandezze la media arm. fra esse è tanto rav. quanto $a \times \frac{a+v}{2} \,.\, v \times \frac{a+v}{2}$ Cor.

Tirata la GI perpendicolare ad BG sicchè $\overline{GI} = ab$, sarà il quadrato di $\overline{bI} = aa+ab = \overline{a+b} \times a = av \times a = rav$. Adunque il quadrato di $\overline{bI}$ sarà doppio del medio proporz.le arm.co fra

Fig. 13

Teorema 4°

Date due grandezze aritmeticamente proporzionali $\overline{bG}.\overline{bF}.\overline{GB}$ $\div a.v.b$:

dico che il quadrato di $\overline{bG}=aa$ insieme col quadrato di $\overline{G}=vv$ sarà il doppio del medio proporzionale conovarmonico fra $\overline{bG}.\overline{BC}$ moltiplicato per la $\frac{a}{2}$ somma aritmetica cioè fra $\frac{aa+ar}{2}.\frac{av+vv}{2}$

Poiché $\frac{aa+ar}{2}.\frac{aa+vv}{2}.\frac{av+vv}{2}$ sono in conovarmonica proporzione per i corollarj 1° e 3° del Teor. 2do. adunque $aa+vv$ sarà il doppio di questo mezzo conovarmonico che si

Cor. 1.

Tirata la $\overline{bL}$ perpendic. ad $\overline{bF}$ poiché $\overline{GL}^2=vv=\frac{a+b}{2}^2$, sarà $\overline{bL}^2=aa+vv$, eguale al doppio del medio conovarmonico fra $\overline{bG}.\overline{bF}$ moltiplicato per $\frac{a+v}{2}$

Cor. 2do

Abbiam provato nel 3° e 4° Teorema, e nei corollarj che il quadrato della corda $\overline{bG}$ è doppio del mezzo armonico, ed il quadrato della diagonale $\overline{bL}$ è doppio del medio conovarmo. fra la recisa $\overline{bG}$ ed il raggio $\overline{BC}$ di queste due linee si moltiplicano per la metà della somma

dunque la circonfa del cerchio è il luogo de' mezzi arm.ci ed il lato del quadrato circoscritto è il luogo de' medj contrarmonici; come la circonfa determinava il Luogo il cui quadrato è il mezzo armonico; ed il lato del quadrato circoscritto determinava la GH il cui quadrato dà il mezzo aritmetico.

Esempj de' Teor.i III.o e IV.o

Es. 1.o sia AB = 14 = a+b

AG = 5 = a 5 · 9
GB = 9 = b 5 · 7 · 9
5 · 7
5 · 6 · 7
70 · 35 · 36 · 37 · 42

$\overline{AJ}^2$ = BAG = 2va
= 14×5 = 70 doppio di 35

$\overline{AL}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GL}^2$ = aa+vv = 25+49
= 74 doppio di 37.

Es. 2.o AG = 1/6 1 | 1 · 2
GB = 5/6 2 | 1 · 2 · 3
AB = 6/6 6 | 2 · 3 · 4 · 5 · 6
AJ = 3

$\overline{AG}^2$ = BAG = 2va = 6×1 = 6
doppio del mezzo arm.co 3

$\overline{AL}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GL}^2$ = 1+9 = 10
doppio del contrarm.co 5.

Es. 3. AG = 1/4 1 | 1 · 2
GB = 3/4 3 | 2 · 4
AB = 4/4 4 | 2 · 3 · 4
5 · 6 · 8 · 9 · 10 · 12
AC = 2

$\overline{AJ}^2$ = BAG = 6×2 = 12 doppio di 6
$\overline{AL}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GL}^2$ = 4+16 = 20 doppio di 10

Fig. 1°

Problema I°

Data una qualunque ragione, o sia essa razionale, o sorda: fra due termini esprimenti questa ragione, ritrovare per mezzo del cerchio, i mezzi proporzionali, armonico, geometrico, aritmetico, e contrarmonico.

Costruzione

Sia espressa la data ragione dalle due linee AB. BD. Queste si prolunghino per diritto, e sulla BD si pigli in mezzo in C, e fatto centro in C, ed intervallo in B descrivasi il semicircolo BFD, e si tiri il raggio CF, ed il seno FG perpendicolari ad BD. Si tirino poi le due tangenti al descritto semicerchio in B, F, D, e siano AH, HE, ED, e si prolunghi il seno FG fino alla tangente in I. Finalmente si faccia il quadrato BL del seno BG, e si faccia il parallelogramo CL, tirando per il punto I la parallela IK al diametro BD

Soluzione

Dico che fra BH. BE, che hanno fra loro :: BB. BD:
1° il quadrato del seno sarà il mezzo armonico. II° Il quadrato del raggio ($\overline{CF}^2 = \overline{BG}^2$) sarà il mezzo aritmetico. III°

III°. La differenza fra il rettangolo (BE) del diametro e il raggio, ed il quadrato del seno ($\overline{BS}^2$), cioè $BE - \overline{BS}^2$, che vuol dire la ipotenusa figura SBAHEdMdS, sarà il mezzo conoarmonico. IV. e finalmente il rettangolo (CP) del seno e il raggio sarà il mezzo Geometrico.

Dimostrazione di questi 4 mezzi

I. dimostreremo in primo luogo (oltre la dimostrazione del Teorema 1° e suo Corollario) che $\overline{BS}^2$, cioè il quadrato del seno, è mezzo proporzionale armonico fra BH · BE che stanno fra loro nella data ragione di BB · BD; cioè dimostreremo che

BH · $\overline{BS}^2$ · BE

sono in armonica proporzione

Per provare ciò facciasi BK = BB, e tirisi KO parallela a BD. Sarà BO = $\overline{BS}^2$ = ABD e per tanto BN = BO − CO
= $\overline{BS}^2$ − CO
= $\overline{BS}^2$ − BH
e sarà KE = BE − BO = $BE^2 - \overline{BS}^2$
adunque BN : KE :: $\overline{BS}^2$ − BH · BE − $\overline{BS}^2$
ma BN : KE :: BK : KO (poiché BN, KE hanno la stessa altezza CB = BI − BK)
:: AB : BD
:: BH : BE
adunque BH : BE :: $\overline{BS}^2$ − BH · BE − $\overline{BS}^2$
adunque BH · $\overline{BS}^2$ · BE sono in armonica proporzione, poiché il

p.o sta al 3.o come la differ.a
fra il p.o ed il 2do alla differ.
fra il 2do ed il 3.o

Il quadrato del seno per tanto
è medio proporzionale armonico
fra BH · BC, che stanno
come AB · BD; lo che è ciò
che in primo luogo si dovea
dimostrare

II. Passiamo ora a dimostrare
il 2do punto, cioè che il
quadrato del raggio è medio
proporzionale aritmetico
fra BH · BE, che esprimono
la ragione data fra AB · BD.
Fra BH · CH · BE regna la stessa
differenza BF. dunque
BH · CH · BE sono in arit-
metica proporzione, ossia
CH, cioè il quadrato del
raggio ($\overline{CF}^2$) è medio arit-
metico fra BH · BE :: AB · BD
lo che in 2do luogo dovea
dimostrare.
ovvero ÷ AB · AC · BD
÷ AB × AC · $\overline{AC}^2$ · BD × AC
÷ BH · $\overline{AC}^2$ · BE

III. Si proverà in 3.o luogo che
il mezzo contrarmonico
fra BH · BE sia BE − $\overline{BF}^2$,
cioè che BH · BE − $\overline{BF}^2$ · BE
sono in contrarmonica
proporzione, e ciò oltre la
dimostrazione del 2do.2do
e 2do cor.o 2do.
lo faranno, se il 3.o termine
sta al primo, come la differenza
fra

fra il primo ed il secondo sia alla differenza fra il secondo, ed il Terzo.

Per deve adunque

$\overline{BC} \cdot \overline{BH} :: \overline{BC} - \overline{BG}^2 - \overline{BH} \cdot \overline{BC} - \overline{BC} + \overline{BG}$

ma $\overline{BC} - \overline{BH} = \overline{BE}$, ed $\overline{BC} - \overline{BC} = -\overline{BH}$

adunque $\overline{BC} \cdot \overline{BH} :: \overline{BE} - \overline{BG}^2 \cdot \overline{BG}^2 - \overline{BH}$

ma così è infatti, come si è dimostrato nel p.° punto.

adunque $\overline{BC} - \overline{BG}^2$ è il mezzo contrarmonico fra $\overline{BH} \cdot \overline{BE}$ che stanno come $\overline{BB} \cdot \overline{BD}$;

lo che in terzo luogo si dovea dimostrare.

IV. Resta da provarsi in quarto, ed ultimo luogo, che il rettangolo del seno per il raggio è il mezzo Geometrico fra $\overline{BH} \cdot \overline{BE}$ che stanno come $\overline{BB} \cdot \overline{BD}$

Per la 8.ª del VI.° Lib. di Euclide

$\div \overline{BB} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{BD}$ adunque moltiplicando per 7 raggio

$\div \overline{BB} \times \overline{C7} \cdot \overline{BG} \times \overline{C7} \cdot \overline{BD} \times \overline{C7}$

ovvero $\div \overline{BH} \cdot \overline{BG} \times \overline{C7} \cdot \overline{BE}$

lo che in quarto luogo si dovea dimostrare

Adunque fra due termini, esprimenti una qualunque ragione, o sia essa razionale, o sorda, si sono trovati i mezzi, Armonico, Aritmetico, contrarmonico, e Geometrico lo che si era proposto di fare.

Covollario I.°

Essendo per il problema 9.°, ova provato,

$\overline{BH} \cdot \overline{BG}^2 \cdot BG \times CF \cdot \overline{CF} \cdot AC^2 - \overline{BG}^2 \cdot BC$

Arm. Geom. arion. Contrarm

$\overline{BG \times CF} \cdot \overline{BG \times BD} \cdot CF \overline{BG \times BD} \cdot \overline{CF} \cdot \overline{nCF - BG \times BD} \cdot \frac{BD}{CF}$

f.6.1 ~~2.16~~ XXIV. 4.°

se favò $BG = a$; $BD = b$, $CF = \frac{a+b}{2} = v$, sarà

$av \cdot ab \cdot vvab \cdot vv \cdot nvv - ab \cdot bv$

I due esterni adunque $a \cdot b$ si sono moltiplicati per il vaggio, lo che era necessario per poter avere il mezzo armonico uguale al quadrato del seno di quel cerchio, per il cui vaggio si sono moltiplicati gli esterni.

Cov.° II.°

Prendendo gli esterni co' soli mezzi armonico, ed aritmetico, si avrebbe

$av \cdot ab :: vv \cdot bv$

cioè, essendo $= a \cdot v \cdot b$; i due primi de' quadro termini ~~della proporzione geometrica discreta~~, $av \cdot ab$ avrebbero il 9.° ~~per il~~ moltiplicato per il secondo e terzo b; ed i due altri termini $vv \cdot bv$ avrebbero il secondo $\cdot v \cdot$ moltiplicato similmente per il 2do, e 3.° e per tanto $av \cdot ab :: vv \cdot bv$ è una proporzione geometrica discreta, i cui mezzi sono il mezzo armonico $\cdot ab \cdot$ ed il mezzo aritmetico $\cdot vv \cdot$ fra i due termini della vagion data

moltiplicati

moltiplicabi pel vaggio,
cioè per la media armone=
tica fra essi termini

Cov. III.

Chiameremo a.v.b la formu
della proporzione

av. ab. vv. bv

e la formola ne sarà la
moltiplica del primo ter=
mine per il secondo, e
terzo della formu; e poi
del secondo termine della
formu per il secondo
e terzo della med^ma

a. v. b

a×v. a×b. v×v. v×b

av. ab. vv. bv.

Cov. IV

Se volessi per esempio ridurre
la ragione 1.3 di numero
a numero a proporzione
geometrica discreta, ne
troverei il mezzo armo=
nico 2. per avere la formu

1. 2. 3, e poi farei

1×2. 1×3. 2×2. 2×3

2. 3 :: 4. 6

e della ragione tripla 1.3
ovvero 2.6, sarebbe 3.
il mezzo armonico, e 4. il
mezzo aritmetico; e la ragione
1.3, ovvero 2.6. sarebbe
ridotta alla proporzione
geometrica discreta: 2.3::4.6

in numeri interi

Cov. V.

Se volessi ridurre la ragione

1. 3. a proporzione geometrica
discreta senza cambiarla in 2. 6.
farei così: dividerei per 2.
tutti i termini
2. 3. 4. 6, ed avrei
1. $\frac{3}{2}$ :: 2. 3
e $\frac{3}{2}$ sarebbe il mezzo ar-
monico fra 1. 3; ma doven-
doli far sparire la frazione
si ritornerebbe a. 2. 3. :: 4. 6

Cor. VI.

È chiaro per la formola che
il mezzo aritmetico deve essere
sempre un quadrato. vv. del
mezzo aritmetico della forma
a. v. b.; ed è pur chiaro
che il mezzo armonico. ab.
è sempre il prodotto degli
esponenti della forma. a. v. b.

Cor. VII.

Se la data numerica ragione
fosse fra due numeri, il cui
mezzo aritmetico fosse una
frazione: Essa frazione si
farà svanire, moltiplicando
tutti e due i termini della
forma, per il divisore del
mezzo aritmetico di essa.
Per es. dati 1. 2
1. $\frac{3}{2}$. 2 si fa
2. 3. 4 e poi
2 × 3. 2 × 4. 3 × 3. 3 × 4
6. 8 :: 9. 12
Vero è per altro che si potrebbe
a dirittura adoperare per forma
1. $\frac{3}{2}$. 2

1. $\frac{3}{r}$. r facendo

$1 \times \frac{3}{r} \cdot 1 \times r \cdot \frac{3}{r} \times \frac{3}{r} \cdot \frac{3}{r} \times r$

$\frac{3}{r} = r \cdot \frac{9}{4} \cdot 3$

ma egli è altresì vero che volendo ora far sparire le frazioni, moltiplicando tutto per 4., si avrebbe come prima

6. 8 :: 9 . (r

Ancor qui il mezzo armonico 9 della proporzione geometrica discreta è il quadrato del medio aritmetico della forma ridotta r . 3 . 4 ; ed il mezzo armonico 8. è il prodotto degli estremi . r x 4 . di essa.

Cor. VIII.

Che se si avesse una proporzione geometrica discreta

r . 3 :: 4 . 6 nata dalla forma 1 . r . 3 . $\frac{9}{2}$ la solita formola ; sicchè . 3 . fosse il mezzo armonico, e 4 il mezzo aritmetico fra gli estremi ; e si volesse aggiugnervi il mezzo contraarmonico ; basta esprimere co' numeri il valore di esso che è . rvv - ab

r x 4 - 1 x 3 = 8 - 3 = 5

ovvero il valore $\frac{aa+bb}{r} - b$

lib. 1. ~~Prop.~~ XXIV

il Cor. I. e III. del Teorema

do. $\frac{aa+bb}{r} = \frac{1+3\times3}{r} = \frac{10}{2} = 5$

Basterebbe ancora per trovarlo, moltiplicare il primo termine della forma per il rdo, ed al prodotto aggiugnervi il 3.° così

$av+b = 1\times 2+3 = 5$

e ciò quando fra i termini della forma vi corre differenza 1.

Ma se fra i termini della forma vi corresse la differenza due come in 1. 3. 5, da cui nasce la proporzione geometrica discreta

$1\times 3 . 1\times 5 . 3\times 3 . 3\times 5$

$3 . 5 . 9 . 15$

bisognerebbe al prodotto av aggiugnervi il doppio del 3°. termine così

$av + a\times b$

$1\times 3 + 2\times 5 = 3+10 = 13$

onde avere $3 . 5 . 9 . 13 . 15$

Se la differenza fra i termini della forma fosse 3. così

1. 4. 7 da cui viene

4. 7. 16. 26 Bisognerebbe al prodotto av. aggiugnere il triplo del 3°. termine così $av + 3b = 1\times 4 + 3\times 7 = 25$

E generalmente, posta nella forma a. v. b la differenza d, sicchè sia a. a+d. a+2d, sarà sempre il mezzo convenuto $av + bb$; cioè uguale al prodotto de' due primi termini della forma, più il terzo termine della forma stessa, moltiplicato per la differenza della med.ma

Poichè il mezzo convenuto è $2vv - ab = \frac{aa+bb}{2} = \frac{aa + a+2d^2}{2}$

$= \frac{2a + aa + 4ad + 4dd}{2} = aa+2ad+2dd$

Ma $av+bb$

ma $av+db = a \times a+d + d \times a+nd$
$= aa+ad+ad+ndd$
$= aa+nad+ndd$
adunque $nvv-ab = av+db$

Cor. IX.

Perchè $a+b = nv$ (XX lib. 1.), sarà $a+b \times v = nvv$; le vado di comune ab, rittulta $av+bv-ab = nv^2-ab$ = al mezo convarmonico (cor. 1.). si ovorerà adunque il mezo convarmonico se nella proporzione geometrica discreta $av.ab::vv.bv$ dalla somà del p.o e ult.o termine $av+bv$, si tolga il rdo, che è il mezo armonico

$a \cdot n \cdot 4 \cdot b$
$n+b-3 = 5$

Cor. X

Perchè i primi due termini della propor.e geometrica discreta, vengono dal prodotto del p.o termine per ciascheduno de' due ultimi della forma di cui il mezo termine b. è = al rdo più la differenza de' due primi, cioè $b = a+nd$: se sarà data una proporzione g.d p.e es. $12 \cdot 15 \cdot 16.$ to e si voglio far nota la forma da cui essa proporzione sia nata; basterà ritrovare il massimo comun divisor.e de' due primi, e p.e 3 lo divide il p.o 12, ed al cociente 4 aggiugnerò la differenza 1.

de' due primi termini 3.4, or trovati, e si avrà la forma 3.4.5 producente quella proporzione .1.3.6.10.

Cor XI.

Si osservi che arrivati alla forma 1.3.4, potiamo trovare tutti i mezzi, moltiplicando quei tre termini della forma per la differenza che vegna in essa così

1.3.4

1×1 . 1×3 . 1×4

1 . 3 . 4

e poi fra gli estremi

1×3 / 3×4 / 1

si hanno i mezzi, aggiungendo al primo estremo .6. que' prodotti così

6 . 6+1 . 6+3 . 6+4 . 10

6 . 6 . 9 . 10 . 10

Poichè la forma .a.v.b. dà

a . a+b . a+2b

av. ab. vv. 2vv − ab. 6v

a×a+b . a×a+2d . a+d . 2×a+d . 2a+2d − a×a+2d . a+d×a+2d

aa+ad . aa+2ad . aa+2ad+dd . 2aa+4ad+2dd . aa+3ad+2dd

− aa − 2ad

aa+ad . aa+2dd . aa+2ad+dd . aa+2ad+2dd . aa+3ad+2dd

differ. dal p° ad . ad+dd . ad+2dd

a×d . a+d×d . 4×1 . 2×2+3×2×1+2×1 / 4+6+2 = 12 = 3×4

1×1+2×1 . 2×1 . 3×3

4+2 = 6 = 2×3

6 . 6+2 . 6+3 . 6+4 . 10

Cor. XII

Le differ. poi da termine a termine sono ad. dd. dd. ad. dunque al pr°. si aggiunge ad, al 2do dd; al 3°. ancora dd; al 4°. ad

Si ha la proporzione g. d

2 . 3 . 4

2 x 3 3 > 4

6 . 6+1x2 . 6+1x1 . 9+1x1 . 12

6 . 6 . 9 . 10 . 12

Cov. XIII

Si possono ancor ovocave tutti i merzi di una fra-
gione espressa per frazioni

$$1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \frac{1+\frac{1}{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}$$

$$1 \times \frac{3}{4} \cdot 1 \times \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{3}{8}$$

Si levino le frazioni, molti-
pliano per 16, e si avrà

12 . 6 . 9 . 6 ; 6 arm; ganom.

Il contrarmonico si ovoca
come nei corollarj precedenti

Cov. XIV

Nelle proporzioni ovocabili
ne' precedenti modi, cioè
nelle ragioni co' loro merzi
determinati, armonico, geo-
metrico, e contrarmonico
per es. in . 2 . 3 . 4 . 5 . 6
si ovocano tutte queste cose

2 . 3 . 4 . 5 . 6 ragion tripla co' merzi determ.
2 . 3 . 6 proporzione armonica
2 . 4 . 6 proporzione geometrica
2 . 5 . 6 propor.ne contrarmonica
2 . 3 :: 4 . 6 . propor.ne geometrica diretta
2 . 3 :: 5 . 6 propor.ne aritm.ca diretta
3 . 4 è il centro della g. d

Cov. XV.

Quando il mezzo armonico è minore del quadrato, che è il mezzo aritmetico; allora tanto è di questo magg.re il mezzo contr'armonico; questa diff.a è dd quadrato della differenza della forma. Poiche, come si è osservato nel cov. XII. le differenze de' termini sono ad . dd . dd . ad cioè al mezzo armonico si deve aggiugnere dd, quadrato della differenza per aver il mezzo aritmetico; ed al mezzo aritmetico si deve aggiungere parimenti dd, quadrato della differenza per aver il mezzo contr'armonico

1 . 8
1 . 4½ . 8
2 . 9 . 16 differ.a 7

18 . 32 . 81 . 130 . . 144

9×9 = 81 medio aritmetico
81 − 7×7 = 32, medio armonico
81 + 49 = 130 medio contr'armonico

32	81	130
32	81	130
64	81	3900
96	648	13
1024	6561	16900
	1024	
	7585	

Cov. XVI

Quindi s'intende che per aver il mezzo contr'armonico in una proporz.e g.d; basta aggiugnere tanto al mezzo aritmetico, quanto di esso è minore il mezzo armonico, cioè dd quadrato della differ.a della forma.

Cov. XVII

Del mezzo geometrico qui non si parla, perchè non si ha in un termine solo; ma è indicato da due cioè dai mezzi arm.co et ariom.co fra i quali si trova

Scolio 2.

Si vuole osservare, che in tutte le operazioni indicate di sopra per trovare i mezzi armonico, aritmetico, e contrarmonico fra due numeri indicanti una data ragione p. es. 1. r.; Non solo non si è alterata la ragione, trovando i mezzi fra 6. 12. ma neppure se ne sono alterati i termini poiche siano le due quantità AB. CD: Che vogliano le stesse, sebbene io concepisca la AB divisa in sei parti, e la CD divisa in dodici delle medesime parti. AB, CD sono ancora le stesse di prima. Il mezzo armonico 8. contiene otto di quelle parti nelle quali si son divise AB, CD; Il mezzo aritmetico ne contiene 9; Il mezzo contrarmonico 10. E chi non vede che 6. 8. 9. 10. 12 dan le stesse ragioni che $\frac{6}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{6}$ ovvero che $1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$

Ma $\frac{4}{3}$ è medio armonico fra $1 \cdot 2$; $\frac{3}{2}$ è medio aritmetico fra $1 \cdot 2$; $\frac{5}{3}$ è medio contrarmonico fra $1 \cdot 2$. Ora riducendo a comun denominatore

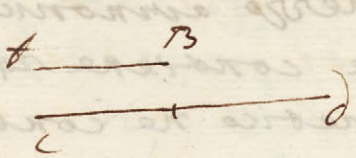
$1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$

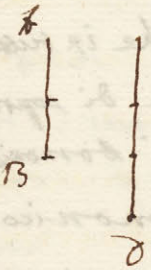
Lita $\frac{18}{18} \cdot \frac{24}{18} \cdot \frac{27}{18} \cdot \frac{30}{18} \cdot \frac{36}{18}$

che trasformate $18 \cdot 24 \cdot 27 \cdot 30 \cdot 36$

$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$

$1 \cdot 2$
$2 \cdot 4$
$2 \cdot 3 \cdot 4$
$2 \times 3 \cdot 2 \times 4 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 4$
$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$





2 . 3
4 . 5 . 6
10 . 12 . 15 . 20 . 30

solo è da osservarsi che in quest'ultima espressione si sottintende che tutti i numeri

6 . 8 . 9 . 10 . 12

sono alcrettante tutte parti della unità.

Altro esempio. Siano AB = 2; CD = 3 Chi impedisce che AB non si concepisca divisa in 20 parti, e di conseguenza CD in 30 delle medesime parti? di queste parti il mezzo armonico fra AB. CD. ne contiene 24; il mezzo aritmetico ne contiene 25; il mezzo contrarmonico ne contiene 26.

Se AB = 2 ne contiene 20; adunque la unità ne contiene 10. adunque il mezzo armonico contiene 12 decime della unità; il mezzo aritmetico contiene 15 decime della unità; il mezzo contrarmonico 10. contiene 16 decime della unità.

Adunque in queste operazioni non solo si trovano i mezzi della data ragione, ma si trovano fra i dati termini, cui altro non si fa che concepirli divisi in quel numero di parti, che viene indicato dalla stessa operazione. Cioè avevamo 2 . 3, e lo abbiam ridotto a 4 . 6, adunque abbiam diviso le due unità del 2 ciascuna in due

in due parti; ma posto 4·5·6· abbiam moltiplicato 4×5· adunque ciascuna unità del·2· è restata divisa in 10· parti; e 2·3· è diventato 10·30; delle quali decime della unità i mezzi armonico, aritmetico, e contrarmonico ne contengono 14·15·16

Così nella duplà 1·2· passando a·2·4· la unità si è divisa in due parti; ma posto 2·3·4· nel div·2×3· ciascuna di queste parti si è presa tre volte; adunque la unità si è divisa in·6· parti, delle quali i mezzi armonico, aritmetico, e contrarmonico ne contengono 8·9·10·

Cioè quando nelle operazioni si moltiplica l'uno, in altrettante parti bisogna per necessità concepirlo diviso; e così non ne resta punto alterata la quantità, e si hanno i mezzi non solo della data ragione, ma ancora fra i dati estremi; perchè si viene a ottenere con la divisione, quella mutazione che si era introdotta nei estremi con la moltiplicazione.

$$\frac{1\cdot}{6}\ \frac{2\cdot}{6}\ \frac{3\cdot}{6}\ \frac{4\cdot}{6}\ \frac{5\cdot}{6}\ \frac{6\cdot}{6}\ \frac{7\cdot}{6}\ \frac{8\cdot}{6}\ \frac{9\cdot}{6}\ \frac{10\cdot}{6}\ \frac{11\cdot}{6}\ \frac{12\cdot}{6}$$

$$2\cdot 3 \qquad \frac{20}{10} \qquad \frac{30}{10}$$

$$4\cdot 6$$

$$4\cdot 5\cdot 6$$

$$4\times 5\cdot$$

$$\frac{20}{10}\ \frac{14}{10}\ \frac{15}{10}\ \frac{16}{10}\ \frac{30}{10}$$

Per ridur la cosa a formola
generale. Siano i dati termini
a. a+nd, si ponga il medio arit-
metico a+d così a. a+d. a+nd
e si facciano le solite opera-
zioni; si avrà
aa+ad . aa+nad . aa+nad+dd . aa+nad+ndd . aa+nad+ndd
ma se poi si volessero trovare
i mezzi precisamente fra i
due termini dati: bisogne-
rebbe distinguere due casi;
cioè 1° quando fra i termi-
ni dati passa differenza caffo,
come fra 1. 2; 1. 4; 2. 5; 3. 8;
e quando vi passa differen-
za pari, come fra 1. 3; 2. 4; 3. 5
Nel 1° caso bisogna dividere
i termini della trovata
formola per 4b+4d; poichè

1. 2
1. 1½. 2 b=1; d=½
2. 3. 4 a=2; d=1

In questo passaggio si raddoppia
il primo ed il 2do termine
dato, per lo che il loro pro-
dotto è quadruplo di quello
sarebbe senza questa mutazio-
ne cioè a×a+d = aa+ad
= 2b×2b+2d
= 4bb+4bd
Per lo che bisogna dividere
il prodotto del primo per
il 2do cioè aa+ad per il
quadruplo del secondo, e ver-
rà $\frac{aa+ad}{4b+4d} = \frac{4bb+4bd}{4b+4d} = b$
cioè verrà il 1° termine
e si avrà

e si avrà questa formola generale

$$\frac{aa+ad}{4\#+4D} \cdot \frac{aa+nad}{4\#+4D} \cdot \frac{aa+nad+dd}{4\#+4D} \cdot \frac{aa+nad+ndd}{4\#+4D} \cdot \frac{aa+3ad+nd}{4\#+4D}$$

$$A \cdot \# + nd$$

$$1 \cdot n$$

$$\# \cdot \# + D \cdot \# + nD \qquad \# = 1;\ D = \tfrac{1}{n}$$

$$1 \cdot 1\tfrac{1}{n} \cdot n$$

$$n \cdot 3 \cdot 4$$

$$a \cdot a+d \cdot a+nd$$

$$\frac{4+n}{4\times 1 + 4\times\frac{1}{n}} \cdot \frac{4+n\times n\times 1}{4+n} \cdot \frac{4+4+1}{4+n} \cdot \frac{4+4+n}{4+n} \cdot \frac{4+3\times n\times 1+n}{4+n}$$

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{8}{8} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{6}$$

Ma nel caso, in cui le differenze de' dati termini della ragione sono pari, bisogna dividere i termini della formola per a+d così

$$\frac{aa+ad}{a+d} \cdot \frac{aa+nad}{a+d} \cdot \frac{aa+nad+dd}{a+d} \cdot \frac{aa+nad+ndd}{a+d} \cdot \frac{aa+3ad+nd}{a+d}$$

$$1 \cdot 3$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \qquad a = 1;\ d = 1$$

$$\frac{2}{a+d}\ \frac{3}{1+1}\ \frac{4}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{6}{2}$$

$$1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3$$

$$1 \cdot 5$$

$$a \cdot b \cdot 5a \qquad a = a;\ d = b$$

$$\frac{3}{a+d}\ \frac{5}{1+2}\ \frac{9}{3}\ \frac{13}{3}\ \frac{15}{3}$$

$$1 \cdot \frac{5}{3} \cdot 3 \cdot \frac{13}{3} \cdot 5$$

La ragione di questa divisione per a+d in questo caso si è, perchè si moltiplica a dividendo il p°. a $\frac{4}{4}$ il rdo a+d; onde $\frac{4}{4}$ avere il p°. a·

Cappa divideva quel proposito a+d (e così gli altri)
per a+d

In questi due i capi il numeratore del mezzo aritmetico è sempre un quadrato. Il numeratore del mezzo armonico è sempre minore, ed il numeratore del mezzo contrarmonico è sempre maggiore del mezzo aritmetico quanto vale il quadrato della differenza della forma ridotta. Sicchè il numeratore del mezzo armonico è sempre la differenza di due quadrati; ed il numeratore del medio contrarmonico è la somma di due quadrati.

In quelle proporzioni, in cui la differenza ~~è un numero~~ pari degli estremi della forma è un numero pari della proporzione ridotta il mezzo aritmetico, è un no. intiero, ed è quello stesso della forma

$$\frac{av}{v} \cdot \frac{ab}{v} \cdot \frac{vv}{v} \cdot \frac{vv-ab}{v} \cdot \frac{bv}{v}$$

$$a \cdot \frac{ab}{v} \cdot v \cdot \frac{vv-ab}{v} \cdot b$$

$$1 \cdot 3$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{2}$$

$$1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3$$

$$2 \cdot 4$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\frac{6}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{12}{3}$$

$$2 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot \frac{10}{3} \cdot 4$$

In quelle in cui la differenza fra il p°. e 5°. termine della forma è un numero caffo il mezzo

il mezzo aritmetico è una frazione col divisore = al quadruplo del mezzo aritmetico della forma cioè = 4R · [illegible] +

$$\frac{av}{4R} \cdot \frac{ab}{4R} \cdot \frac{vv}{4R} \cdot \frac{2vv-ab}{4R} \cdot \frac{bv}{4R}$$

+ sparite le frazioni

$$1 \cdot 2 \quad \frac{x}{1} \cdot \frac{\pi}{1+\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{6}$$

$$1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$$

sicchè il mezzo aritmetico della proporzione ridotta è quello stesso, cioè quella stessa frazione che sarebbe il mezzo aritmetico della forma prima di farne sparire la frazione.

$$2 \cdot 3$$

$$2 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3 \qquad 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\frac{20}{10} \cdot \frac{24}{10} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{26}{10} \cdot \frac{30}{10}$$

$$2 \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{13}{5} \cdot 3$$

$$\frac{5}{2}$$

$$1 \cdot 4$$

$$1 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 4$$

$$2 \cdot 5 \cdot 8$$

$$\frac{10}{4R} \cdot \frac{16}{4 \times 2\frac{1}{2}} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{34}{10} \cdot \frac{40}{10}$$

$$1 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{17}{5} \cdot 4$$

$$2 \cdot 7$$

$$2 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 7$$

$$4 \cdot 9 \cdot 14$$

$$\frac{56}{4R} \cdot \frac{56}{4 \times 4\frac{1}{2}} \cdot \frac{81}{14} \cdot \frac{106}{14} \cdot \frac{126}{14}$$

$$2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{53}{7} \cdot 7$$

Nelle proporzioni ~~sidette~~, col divisore che lor conviene, i numeratori de' mezzi armonico, e contrarmonico, hanno sempre per differenza il quadrato della differenza dal medio aritmetico che regna nella forma ~~sidetta~~ come si vede nè precedenti esempj.

Problema II.°

Data una linea retta AB, tagliata in qualunque luogo in G, e tirata una perpendicolare GI (che chiamo y): Si cerca il luogo di tutte le y, tali che y^2 sia medio proporzionale armonico fra AG, e GB moltiplicata per $\frac{AB}{a}$.

Fig. 13

Si metta, che posto $AG = x$
$AB = ra$
$AC = a$
$GI = y$
$BG = ra - x$

Sia $ax \cdot yy \cdot raa - ax$ una proporzione armonica sarà adunque

$$ax \cdot raa - ax :: yy - ax \cdot raa - ax - y^2$$
$$x \cdot ra - x :: \frac{y^2}{a} - x \cdot + ra - x - \frac{y^2}{a}$$
$$rax - xx - x\frac{y^2}{a} = ryy - x\frac{y^2}{a} - rax + xx$$
$$rax - xx = ryy - rax + xx$$
$$4ax - rxx = ryy$$
$$rax - xx = yy$$

equazione del cerchio sul diametro

Su'l diametro AB = na si faccia un cerchio. Si pigli il diametro in qualunque luogo F, sarà

$$FI^2 = AF \cdot FB$$
$$yy = nax - xx$$

Problema III.

Fig. 13

Data una linea retta AB, bagliata in qualunque luogo F, e tirata la perpendicolare FC, che chiamo y: si cerca il luogo di tutte le y, tali che y^2 sia medio proporzionale aritmetico fra AF · FB moltiplicate per $\frac{AB}{C}$.

Posto $AF = x$
$AB = na$
$AC = a$
$FG = y$
$FB = na - x$

Si vuole che $AG \times AH \cdot \overline{FK}^2 \cdot FB \times FA$ siano in aritmetica proporz.

$$\div\ ax \cdot yy \cdot naa - ax$$

adunq. $naa + ax - ax = ayy$
$naa = ayy$
$aa = yy$
$a = y$

Fatta $FG = a$, e tirata per G una parallela ad AB, questa parallela, che è il lato del quadrato circoscritto, sarà il luogo di tutte le y, cioè di tutte le medie aritmetiche &c. lo che &c

Problema IV

Fig. 103

Data una linea retta AB, vagliasi in qualunque luogo in G, e tirasi la perpendicolare GI = y, e la ipotenusa AI: si cerca il luogo geometrico di tutti i punti I, tali, che $\overline{AI}^2$ sia medio proporzionale armonico fra AG, e $\frac{1}{2}$ AB moltiplicate per la loro somma.

Posto AG = x

AB = na ; AF = a

Si vuole che $x \times \overline{a+x} \cdot \overline{AI}^2 . a \times \overline{a+x}$

$ax + xx \cdot \overline{AI}^2 . aa + ax$

siano in armonica proporzione

Ma $ax + xx \cdot nax \cdot aa + ax$

sono in armonica proporzione perchè il p.° al 3.° stanno fra loro, come la differ.a fra il p.° ed il 2.do alla differ.a fra il 2.do ed il 3.°

$ax + xx \cdot aa + ax :: nax - ax - xx \cdot aa + ax - nax$

$:: ax - xx \cdot aa - ax$

$aa + ax \quad ax + xx$

$a^3x - aaxx - ax^3 \mid a^3x - aaxx - ax^3$

$+ aaxx \quad + aaxx$

dunque $\overline{AI}^2 = nax$

ma $\overline{AI}^2 = xx + yy$

dunque $nax = xx + yy$

$nax - xx = yy$

equazione al cerchio

Col diametro = na si descriva il cerchio AIB, esso sarà il luogo di tutti i punti I, tali che $\overline{AI}^2$ sia il medio proporzionale armonico fra AG, e $\frac{1}{2}$AB moltiplicate p.a la loro somma. Poichè $\overline{AI}^2 = BA \cdot AI = nax$.

Problema V.

Fig. 13

Data la retta $\overline{AB}$, e tagliata in qualunque luogo G, da cui sia tirata la perpendicolare $G\gamma$ (= y) e la Ipotenusa $A\gamma$: si cerca il luogo di tutti i punti γ, tali, che $\overline{A\gamma}^2$ sia medio contraarmonico fra $\overline{AG}$, e $\overline{AB}$, moltiplicabile per la loro somma

Posto $AG = x$

$AB = a$ · $A\beta = a$

si vuole che $x \cdot \overline{a+x} \cdot \overline{A\gamma}^2 \cdot ax+xx$
$ax+xx \cdot \overline{A\gamma}^2 \cdot aa+ax$

siano in contraarmonica proporzione

ma $\cdot ax+xx \cdot aa+ax \cdot aa+ax$

sono in contraarmonica proporzione, perche il 3°. termine sta al primo come la differenza fra il 2°. ed il 1mo sta alla differenza fra il 1mo ed il 3°.

$aa+ax \cdot ax+xx :: aa+xx-ax-xx \cdot aa+ax-aa-xx$
$:: aa-ax \cdot ax-xx$

$ax+xx$ | $aa+ax$

$a^3x-aaxx-ax^3$ | $a^3x-aaxx-ax^3$
$+aaxx$ | $+aaxx$

adunque $\overline{A\gamma}^2 = aa+xx$

ma $\overline{A\gamma}^2 = yy+xx$

adunque $aa+xx = yy+xx$

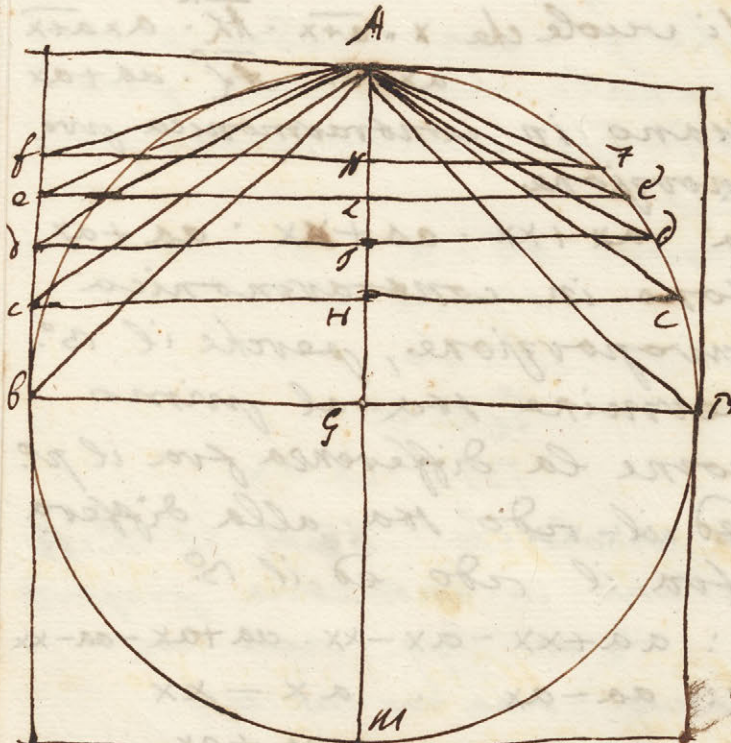
$aa = yy$; $a = y$

Adunque fatta $G\gamma = a$, e $\beta\gamma$ tirata una parallela ad $\overline{AB}$, questa parallela che è il lato del quadrato circoscritto, sarà il luogo di tutte le contraarmoniche ricercate. Lode

Cor. I

De' mezzi armonici, è sempre il luogo il cerchio, fatto col diametro AB; e de' medj bisonetici, e contrarmonici il luogo è sempre la retta che serve di lato del quadrato circoscritto al cerchio, descritto col diametro AB. Dico un nuovo vi= conveo del cerchio sempre armonico, e della retta non mai armonica, ma o arisonetica, o contrar= monica.

Cor. II.



AM = 120
AG = 60
AH = 40 — HM = 80
AI = 30 — IM = 90
AL = 24 — LM = 96
AN = 20 — NM = 100

$\overline{AB}^2 = 7200$ — $\overline{Ab}^2 = 7200$
$\overline{AC}^2 = 4800$ — $\overline{Ac}^2 = 5200$
$\overline{Ad}^2 = 3600$ — $\overline{Ad}^2 = 4500$
$\overline{Ae}^2 = 2880$ — $\overline{Ae}^2 = 4176$
$\overline{AF}^2 = 2400$ — $\overline{Af}^2 = 4000$

$\overline{AC}^2 : \overline{Ac}^2 :: 4800 : 5200 :: 12 : 13$
$\overline{Ad}^2 : \overline{Ad}^2 :: 3600 : 4500 :: 4 : 5$
$\overline{Ae}^2 : \overline{Ae}^2 :: 2880 : 4176 :: 20 : 29$
$\overline{AF}^2 : \overline{Af}^2 :: 2400 : 4000 :: 3 : 5$

$\overline{AC}^2 : \overline{Ac}^2 :: 12 : 13 :: 24 : 26$ | 20 · 24 25 · 26 · 30
$\overline{Ad}^2 : \overline{Ad}^2 :: 4 : 5 :: 8 : 10$ | 6 · 8 · 9 · 10 · 12
$\overline{Ae}^2 : \overline{Ae}^2 :: 20 : 29 :: 40 : 58$ | 28 · 40 · 49 · 58 · 70
$\overline{AF}^2 : \overline{Af}^2 :: 3 : 5$ | 12 · 13 · 4 · 5 · 6

Teoremi 12 · 13; 12 · 4 · 12 · 5; 12 · 6.

Adunque

$\overline{AB}^2 = \overline{Ab}^2 = \overline{bG}^2 + \overline{bG}^2 = 2600 + 3600 = 7200$
$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 = \overline{40}^2 + AHM = 1600 + 40 \times 80 = 4800$
$\overline{Ac}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{Hc}^2 = \overline{40}^2 + \overline{60}^2 = 1600 + 3600 = 5200$
$\overline{Ad}^2 = \overline{bI}^2 + \overline{Id}^2 = \overline{30}^2 + IM = 900 + 30 \times 90 = 3600$
$\overline{Ad}^2 = \overline{bI}^2 + \overline{Id}^2 = \overline{30}^2 + \overline{60}^2 = 900 + 3600 = 4500$
$\overline{Ae}^2 = \overline{bL}^2 + \overline{Le}^2 = \overline{24}^2 + LM = 576 + 24 \times 96 = 2880$
$\overline{Ae}^2 = \overline{bH}^2 + \overline{He}^2 = \overline{24}^2 + \overline{60}^2 = 576 + 3600 = 4176$
$\overline{AF}^2 = \overline{bN}^2 + \overline{NF}^2 = \overline{20}^2 + NM = 400 + 20 \times 100 = 2400$
$\overline{Af}^2 = \overline{bN}^2 + \overline{Nf}^2 = \overline{20}^2 + \overline{60}^2 = 400 + 3600 = 4000$

Dunque relativamente ai quadrati delle corde che appartengono al circolo, ed ai quadrati delle Ipotenuse che appartengono al quadrato circoscritto: si trova il quadrato circoscritto di natura contrarmonica, ed il circolo inscritto di natura armonica.

Le stesse cose si possono esprimere con le frazioni così

$AM = 1$
$AG = \frac{1}{2}$
$AH = \frac{1}{3}$
$AI = \frac{1}{4}$
$Ad = \frac{1}{5}$
$AN = \frac{1}{6}$

$HM = \frac{2}{3}$
$IM = \frac{3}{4}$
$dM = \frac{4}{5}$
$NM = \frac{5}{6}$

$\overline{AB}^2 = \frac{1}{2} \cdot \overline{bb}^2 = \frac{1}{2} :: \quad :: 1 \cdot 1$

$\overline{bC}^2 = \frac{1}{3} \cdot \overline{Fc}^2 = \frac{13}{36} :: 1 \cdot \frac{13}{12} :: 12 \cdot 13 :: 24 \cdot 26$

$\overline{AD}^2 = \frac{1}{4} \cdot \overline{bd}^2 = \frac{5}{16} :: 1 \cdot \frac{5}{4} :: 4 \cdot 5 :: 16 \cdot 20$

$\overline{Ae}^2 = \frac{1}{5} \cdot \overline{Ae}^2 = \frac{29}{100} :: 1 \cdot \frac{29}{20} :: 20 \cdot 29 :: 40 \cdot 58$

$\overline{AF}^2 = \frac{1}{6} \cdot \overline{Af}^2 = \frac{10}{36} :: 1 \cdot \frac{10}{6} :: 6 \cdot 10 :: 3 \cdot 5$

Tutto come prima.

Scolio

Poi si disse che il seno è medio geometrico fra i pezzi del diametro: si avverta che nasce il seno dalla ragione $1 \cdot 3 :: AH \cdot HB$ de' quali termini il prodotto è $1 \times 3 = 3$, quadrato del seno, il qual quadrato è medio armonico di detta ragione ridotta a proporzione g.d. Per avere poi il seno in linea, bisogna

$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GB}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \overline{bb}^2$

$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\overline{Fc}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{Hc}^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+9}{36} = \frac{13}{36}$

$\overline{bD}^2 = \overline{bI}^2 + \overline{ID}^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1+3}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

$\overline{AD}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{ID}^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1+4}{16} = \frac{5}{16}$

$\overline{Ae}^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{de}^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$

$\overline{Fe}^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{de}^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{4} = \frac{4+25}{100} = \frac{29}{100}$

$\overline{bF}^2 = \overline{bN}^2 + \overline{NF}^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{1+5}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\overline{bf}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{Nf}^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{1+9}{36} = \frac{10}{36}$

Fig. 12

V

Scolio

estrarre la radice di 3.
e questa radice è la linea
HE, cioè il seno
Prima è la ragione
2°. Poi sono i termini, che la
esprimono
3°. è il prodotto di questi
termini, cioè il quadrato
del seno, medio armonico
della ragione
4°. è la radice di quel prodotto,
cioè il seno lineare, medio
geometrico fra i perni del
diametro esprimenti quella
ragione.
Il cerchio adunque è prima
armonico che geometrico

Cor. III

Le ragioni si riducano a proporzioni

1. 2.	6. 6. 9. 12
1. 3.	2. 3. 4. 6
1. 4.	10. 16. 25. 40
1. 5.	3. 5. 9. 15

Se il quadrato del raggio
sia 30×30 = 900, le reddette
proporzioni saranno

600.	600.	900.	1200
450.	675.	900.	1350
360.	576.	900.	1440
300.	500.	900.	1500

Sarà adunque il quadrato
($\overline{CB}^2$) del raggio = 900, sarà
dico, la misura delle ragioni
ed il quadrato di $\overline{OI}^2$ sarà
= 1800; cioè $\overline{OB}^2 : \overline{OE}^2 :: 900 . 1800$
Ma $\div \overline{OB} . \overline{OE} . \overline{DA}$; e però
$\div \overline{OB}^2 : \overline{OE}^2 : \overline{DO}^2$; adunque

Fig. 10

$\overline{OE} . \overline{DO}$

$\overline{OC}^2 \cdot \overline{OA}^2 :: 900 \cdot 1600$

Lavagonando adunque ad $\overline{AO}^2$ gli esponenti delle sovraposte ragioni, si avrà la seguente serie

	divisi pel diam.
$\overline{BC}^2 \cdot \overline{AO}^2 :: 900 \cdot 1600 :: 9 \cdot 16$	
$\overline{BD}^2 \cdot \overline{AO}^2 :: 1200 \cdot 1600 :: 12 \cdot 16$	$3 \cdot 4$
$\overline{BE}^2 \cdot \overline{AO}^2 :: 1350 \cdot 1600 :: 27 \cdot 32$	$1 \cdot 3$
$\overline{BF}^2 \cdot \overline{AO}^2 :: 1440 \cdot 1600 :: 9 \cdot 10$	$1 \cdot 4$
$\overline{BG}^2 \cdot \overline{AO}^2 :: 1500 \cdot 1600 :: 15 \cdot 16$	$1 \cdot 5$

Adunque la risultata serie è eguale alla serie delle ragioni delle differenze armoniche; le quali ragioni sono formate dalla somma rispettiva per rapporto all'esponente che è il diametro

60 · 30 · 20 · 15 · 12 · 10

Diffze 30 · 10 · 5 · 3 · 2

Somme 40 · 45 · 48 · 50

Ecco le ragioni tolte dalla serie quì sopra esposta

40 · 60 :: 2 · 3

45 · 60 :: 3 · 4

48 · 60 :: 4 · 5

50 · 60 :: 5 · 6.

Cor. IV.

Facciasi $OA \cdot OB \cdot OH \cdot OI \cdot Od \cdot OM$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

saranno :: $\overline{OA}^2 \cdot \overline{OC}^2 \cdot \overline{OD}^2 \cdot \overline{OE}^2 \cdot \overline{OF}^2 \cdot \overline{OG}^2$

perchè i quadrati delle code stanno come i seni versi

adunque $OA \cdot OC \cdot OD \cdot OE \cdot OF \cdot OG$

saranno :: $1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$

quadrati de' N.i Na turali $1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36$

$\overline{OC}^2 \cdot \overline{OA}^2 :: 900 \cdot 1600 :: 1 \cdot 2$

$\overline{OD}^2 \cdot \overline{OA}^2 :: 600 \cdot 1600 :: 1 \cdot 3$

$\overline{OE}^2 \cdot \overline{OA}^2 :: 450 \cdot 1600 :: 1 \cdot 4$

$\overline{OF}^2 \cdot \overline{OA}^2 :: 360 \cdot 1600 :: 1 \cdot 5$

$\overline{OG}^2 \cdot \overline{OA}^2 :: 300 \cdot 1600 :: 1 \cdot 6$

Fig. 10

$\overline{OA}^2 = 4\overline{OB}^2$

$\overline{OC}^2 = 2\overline{OB}^2$

$\overline{OA}^2 \cdot \overline{OC}^2 :: 4 \cdot 2 :: 1 \cdot \frac{1}{2}$

$4 \cdot 1 :: 1 \cdot \frac{1}{2}$

$1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \quad 1 \cdot \frac{1}{2}$

$4 \cdot 1$

Saranno $\overline{bf}^2 \cdot \overline{bc}^2 \cdot \overline{bd}^2 \cdot \overline{be}^2 \cdot \overline{bf}^2 \cdot \overline{bg}^2$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

cioè come i seni versi

15 · 30 · 40 · 45 · 48 · 50

Poichè $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

moltip.ti $1 \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{3} \cdot 3 \cdot \frac{16}{5} \cdot \frac{10}{2}$

p.i $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \frac{48}{5} \cdot 10$

ϕ 15 · 30 · 40 · 45 · 48 · 50

dunque $\overline{bc}^2 : \overline{bd}^2 : \overline{be}^2 : \overline{bf}^2 : \overline{bg}^2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7}$

estremi

1 · 3 · 4 · 6 :: 1 · 3 :: 1 · 3

6 · 8 · 9 · 12 :: 1 · 2 :: 3 · 6

12 · 15 · 16 · 20 :: 3 · 5 :: 6 · 10

20 · 24 · 25 · 30 :: 2 · 3 :: 10 · 15

30 · 35 · 36 · 42 :: 5 · 7 :: 15 · 21

42 · 48 · 49 · 56 :: 3 · 4 :: 21 · 28

1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21 · 28

30 · 10 · 5 · 3 · 2

Gli estremi de' proporz.i g.d. hanno in inversa de' vetti della serie armonica

di 1 · 3 . . 3 · 4

di 1 · 2 . . 6 · 9

di 3 · 5 . . 15 · 16

di 2 · 3 :: 4 · 6 . . . 24 · 25

di 5 · 7 . . . . . 35 · 36

quadrati delle coode

$\overline{oa}^2 : \overline{oc}^2 : \overline{od}^2 : \overline{oe}^2 : \overline{of}^2 : \overline{og}^2$

stanno :: 1 · $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{3}$ · $\frac{1}{4}$ · $\frac{1}{5}$ · $\frac{1}{6}$

60 · 30 · 20 · 15 · 12 · 10

ed i quadrati delle coode de' supplementi ad un semicerchio $\overline{bc}^2 : \overline{bd}^2 : \overline{be}^2 : \overline{bf}^2 : \overline{bg}^2$

stanno :: 30 · 40 · 45 · 48 · 50

come le forme de' vetti

Fig. 15

Cor. V.

Fatto centro in O, e spazio del diametro oa, con gl'intervalli $oc \cdot od \cdot oe \cdot of \cdot og$ che stiano :: $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$ e descritti gli archi $cm \cdot dn \cdot ep \cdot fq \cdot gr$; le linee

$oa \cdot om$

Le linee OA . OM . ON . OP . OQ . OR
saranno pure :: $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{7}$
Ora co'l raggio OB si descriva
il cerchio VBTS ; di cui parle-
remo poi .
Le aree de' triangoli
AOB . MOB . NOB . POB . QOB . ROB saranno pure
:: 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$
giacchè tutti questi triangoli,
avendo la base comune OB,
stanno come le altezze p^e del V.°
I quadrati delle Ipotenuse poi di quei tri-
angoli $\overline{AB}^2$. $\overline{MB}^2$. $\overline{NB}^2$. $\overline{PB}^2$. $\overline{QB}^2$. $\overline{RB}^2$
saranno 100 . 90 . 80 . 75 . 72 . 70
invece di 30 . 40 . 45 . 48 . 50
che sono le serie delle
differenze della serie armonica
Queste ragioni sono inverse
in quel modo in cui dell'
armonica progressione è in-
versa la progressione aritme-
tica

Teorema V.

Se nel semicerchio BAV
(il cui raggio è OA) si pro-
lunghino le Ipotenuse de'
triangoli BM . BN . BP . BQ . BR
fino al cerchio in BM[D] . BN[E] .
BP[F] . BR[G] , e per D . E . F . G
si tirino i semi DS . ET . FX . GZ :
dico che saranno VB . VO . VS . VT . VX . VZ
come 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$

Dimostrazione

Poichè posta questa sezione
armonica del diametro BV, sarà

~~60~~ 64

$\overline{BD}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{SD}^2 = \overline{\frac{2}{3}}^2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{C}$

$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{C}$

ma la BMD, tirata fino M, ~~essa~~ pure dà $\overline{BD}^2 = \frac{2}{3}$; poichè

$\overline{BO}^2 : \overline{BM}^2 :: \overline{BS} \cdot \overline{BD}^2$

$60 \cdot 90 :: \overline{\frac{2}{3}}^2 \cdot$

$6 \cdot 9$

$2 \cdot 3 :: \frac{4}{9} \cdot \overline{BD}^2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

Adunque BMD incontra il cerchio e la SD nel med^mo punto, in cui il cerchio è incontrato dalla SD, seno tirata dal punto S, in cui $BS = \frac{2}{3} VB$

Nello stesso modo si dimostra lo stesso delle altre linee BE . BT . BS . Poichè posta la sezione armonica del diametro BV, sarebbe

$\overline{BE}^2 = \overline{BT}^2 + \overline{TE}^2 = \overline{\frac{3}{4}}^2 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{9}{16} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16}$

$= \frac{3}{4}$

ma BNE, tirata fino N fino che incontri il seno TE, dà anco essa $\overline{BE}^2 = \frac{3}{4}$; perchè

$\overline{BO}^2 : \overline{BN}^2 :: \overline{BT}^2 \cdot \overline{BE}^2$

$60 \cdot 60 :: \overline{\frac{3}{4}}^2 \cdot \overline{BE}^2$

$3 \cdot 4 :: \frac{9}{16} \cdot \frac{36}{46} = \overline{BE}^2 = \frac{3}{4}$

Adunque BND incontra il seno TE nel med^mo punto, in cui questo seno incontra il cerchio

Cor. 1.

Le BA . BD . BE . BT . BS danno

$\overline{BA}^2 : \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 : \overline{BT}^2 : \overline{BS}^2$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

$3 \cdot 4 \quad 6 \cdot 9 \quad 15 \cdot 16$

$C4 \cdot C5$

fino che incontri la SD, tirata da S, ~~sicchè~~ $BS = \frac{2}{3}$, essa

1.

$12 \cdot 20 \quad 16 \cdot 16$

$8 \quad 5 \quad 1$

$60 \cdot 120 \cdot 160 \cdot 180 \cdot 192 \cdot 200$

$1 \cdot 2$

$3 \cdot 4$

$6 \cdot 9$

$15 \cdot 16$

$C4 \cdot C5$

$3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9$

$C \cdot C \cdot L$ aumenti decrescenti

Quadrati dè proveniye	Medio	quadrati delle corde
$\overline{AB}^2 = 120$		$\overline{AB}^2 = 120$
$\overline{MB}^2 = 90$		$\overline{DB}^2 = 160$
$\overline{NB}^2 = 80$	120	$\overline{CB}^2 = 180$
$\overline{PB}^2 = 75$		$\overline{FB}^2 = 190$
$\overline{QB}^2 = 72$		$\overline{GB}^2 = 200$

Cor.o

Quindi si deduce la seguente serie

$120 \cdot 120 \cdot 120$	$:: 1 \cdot 1$
$90 \cdot 120 \cdot 160$	$:: 3 \cdot 4$
$80 \cdot 120 \cdot 180$	$:: 2 \cdot 3$
$75 \cdot 120 \cdot 190$	$:: 5 \cdot 8$
$72 \cdot 120 \cdot 200$	$:: 3 \cdot 5$

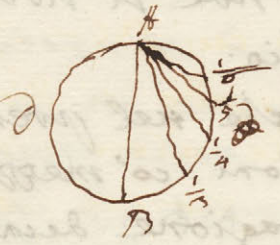


Fig. 16

Scolio 1

La inscrizione delle rettilinee regolari figure nel cerchio porta necessariamente alla divisione armonica della circonferenza in $\cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$.

Sia la circonferenza ADB, si tiri il diametro AB, la circonferenza sarà divisa in due parti eguali. ma il solo diametro non basta alla formazione di una rettilinea regolare figura.

Si divida la circonfa. ~~D~~ serie in tre parti eguali, in quattro, in cinque, in sei; la corda di $\frac{1}{3}$ di circonfa. sarà il lato del triangolo equilatero, e questa sarà la prima rettilinea figura regolare, che può inscriversi nel cerchio.

La corda di $\frac{1}{4}$ della circonfa. sarà il lato del quadrato inscritto, seconda figura regolare inscrivibile al cerchio.

La corda di $\frac{1}{5}$ della circonfa. sarà il lato del pentagono regolare, terza figa. inscrivibile al cerchio.

La corda di $\frac{1}{6}$ della circonfa. sarà il lato dell'esagono regolare, 4a. figa. inscrivibile

è adunque manifesto che la determinazione de' casi delle figure regolari dipende per serie da $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ della circonfa ma questa serie è di fatto la armonica. Adunque il costruire la serie delle rettilinee regolari figure, inscritte nel cerchio, deve dividersi la circonfa per l'armonica serie continua.

Si vuole osservare, che quando si è avvicinato ad $\frac{1}{6}$ della circonferenza, si ha 47 uguale al raggio del cerchio, onde si ritorna da capo al cerchio.

In quel modo che nel prendere tutte le ragioni co' mezzi determinati, la ragione duplа è il principio della serie, e 5.7. è la fine della serie. Ma 5.7. danno le radici della ragione duplа, come proveremo a suo luogo; tornano adunque le ragioni da capo alla duplа

		casi regolari
1.2.	1.2	
1.2.3	2.3.4.5.6	1.3
2.3.4	6.8.9.10.12	2.4
3.4.5	12.15.16.17.20	3.5
4.5.6	20.24.25.26.30	4.6
5.6.7	30.35.36.37.42	5.7

Fig. 19.

La prima regolare rettilinea figura che è il triangolo equilatero, è determinata dalla ragion tripla razionale nel suo principio primo che è $BC = \frac{1}{3}$ della circonferenza; e nel suo effetto che è il diametro BF, diviso dal seno CE in modo che $BE = 1$, ed $EF = 3$. che è la ragion tripla. Ed in oltre il quadrato di BC è uguale a due quadrati del raggio, che è pure ragione tripla;

14. lib. IV. Euclide

e si noti

e si noti la natura della
duel triple, armonica nella
circonferenza 1. $\frac{1}{3}$, perchè è
per divisione; aritmetica nel
diametro, perchè è per somma.
Se poi si considerino le due
rette $\overline{AB}$. $\overline{AC}$, diametro, e lato
del triangolo equilatero: Queste
sono fra loro come le radici
della sesquialtera; Perchè il
quadrato del diametro è uguale
a quattro quadrati del raggio,
ed il quadrato del lato del
triangolo equilatero è uguale
a tre quadrati del raggio.
onde $\overline{AB}^2 . \overline{AC}^2 :: 4 . 3$; ed

$\overline{AB} . \overline{AC} :: \sqrt{4} . \sqrt{3} :: 2 . \sqrt{3}$

3. 4. extremi della tripla
2. 3 :: 4. 6

Dalle cose fino a quì esposte,
pare si possa dedurre, che
la ricerca della ragione che
passa fra il diametro, e la
circonferenza o rapporto si
potrà dai poligoni inscritti, e
circoscritti alla serie armonica,
da cui nascono que' poligoni;
e precisamente alla ragion
tripla co' mezzi armonico, ed
aritmetico 2. 3. 4. 6, accanto
dell'armonica natura del
cerchio, e della tripla, prin-
cipio primo delle rettilinee
regolari figure, e piena di
belle le armoniche proporzioni
6. 3. 2. la qual proporz.e a. 3. 4. 6
1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{6}$
è inseparabile dall'armonica
natura del cerchio. Poichè

il p°. poligono regolare (cioè il triangolo equilatero) è determinato dal cerchio armonicamente diviso nella tripla $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; e da questo primo poligono si risolve il diametro nella ragion tripla $BE \cdot EA :: 1 \cdot 3$; ed i due quadrati del diametro, e del lato del triangolo equilatero si risolvono nella ragion sesquiterza $\cdot \overline{AB}^2 \cdot \overline{AC}^2 :: 4 \cdot 3$; ~~la quale è il centro della~~ e tutto ciò si risolve, e si rinchiude come in suo principio primo nella tripla, indotta a proporzione già in n. 3. 4. 6 i di cui estremi n. 6 sono in tripla, ed i di cui mezzi 3. 4 formanti il centro della proporzione sono fra loro in ragion sesquiterza, cioè di 4. mezzo aritmetico, e di 3. mezzo armonico; ed infatti $\overline{CE}^2 = AE \cdot EB = 3 \times 1 = 3$, ed il quadrato del raggio $= 4$, mezzo aritmetico di questa proporzione, di cui n. 3. 4. 6. di cui 3. è il mezzo armonico.

Non si vuole per caso per ora della materiale indicazione del lato dell'esagono, $\overline{BC}$ uguale al raggio del cerchio, $\overline{AE}$ è della tripla indicata da T. ra del diametro alla circonferenza.

Si vuole bensì osservare, che dovendo assegnarsi per diametro

7. somā di 3+4, cenovo della tripla g.d.: questo determine si attiene come mezzo armonico fra 3.4, che è $3\frac{1}{2}$; 3.3½.4, e raddoppiando i numeri 6.7.8. In 2.3.4.6; 4. è mezzo armonico; e fra 3.4 il mezzo armonico è $3\frac{1}{2}$. Il cenovo della tripla g.d. 2.3.4.6. è la sesquiq.ta 3.4; ed il diametro deve essere di armonica espressa razione; adunque non può essere che $3\frac{1}{2}$.

Ma la circonferenza è indicata nel suo principio primo dalla tripla armonica $1.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$, 6.3.2 adunque non può essere, senon 6+3+2=11; da cui resta necessariamente escluso il mezzo armonico 4.

Ma $3\frac{1}{2}.11 :: 7.22$. E questa appunto è la ragione indicata e dimostrata da Archimede co' Poligoni. Adunque si deve ricorrere alla tripla 2.3.4.6. per cercare il rapporto fra il diametro e la circonferenza; lo che faremo nel seguente libro.

Scolio 2do

Si prova con la sperienza, e con la ragione, che una palla posta in un angolo C, e spinta nello stesso tempo da due potenze $\overline{BC} \cdot \overline{FC}$, le quali linee stiano in ragione delle potenze operanti con quelle direzioni :: a.b, la palla si muove per la diagonale CE del parallelogramma formato con lo stesso angolo, e co' lati $aC \cdot \overline{BC} :: \overline{BC} \cdot \overline{FC}$ e divise con le stesse direzioni

Ora si rende chiaro per le cose dette, che, se l'angolo C è retto la diagonale $\overline{CE} = \frac{aa+bb}{2}$ è la radice del doppio del mezzo contrarmonico della ragione delle due potenze moventi, ridotta a proporz.e g.d., perchè il mezzo contrarmonico è $= \frac{aa+bb}{a+b}$

Che se poi le direzioni delle due potenze facessero fra loro un angolo acuto, o ottuso, allora non è possibile che la diagonale descritta dal mobile sia mezzo contrarmonico fra le potenze; perchè essa diagonale, quando l'angolo è ottuso, è più piccola; e quando l'angolo è acuto, la diagonale è più grande di quello è, quando l'angolo è retto, salvi gli stessi lati

Jovà dippi ancora il quadrato della

Fig. 11. 12. 13. 14.

a . b

a . v . b $v = \frac{a+b}{2}$

av . ab . vv . 2vv − ab . bv

$a \times \frac{a+b}{2} \cdot ab \cdot \frac{a+b}{4} : 2 \times \frac{a+b}{4} - ab \cdot b \times \frac{a+b}{2}$

$\frac{2aa+4ab+2bb}{4} - ab$

$\frac{aa+2ab+bb-2ab}{2}$

$\frac{aa+bb}{2}$

della diagonale descritta dal mobile, un merlo convar= monico, o il doppio di esso. Ma gli estremi di questo merlo non saranno più le potenze, o i lati del parallelogrammo, ma la perpendicolare cd, o sia la distanza fra le parallele Bc . de ; e la distanza de dell'angolo retto dall'estre= mo d della diagonale. Questi estremi della convarmonica proporzione variano al variare degli angoli, che fanno fra loro le direzioni delle potenze.

de = Be + dB Poiché acuto

de = Be - dB. Poiché ottuso

Sempre è però vero che il moto composto si fa per una linea, il cui quadrato è merlo convar= monico, o il doppio di esso fra due determini dati, subito che è dato l'angolo delle potenze moventi.

Fig. 23

Quale sia poi il rapporto fra cd . de si trova così se l'angolo è acuto. BCB è angolo dato ; adunque anche BCd suo complimento ad un retto, è dato . adunque è dato dBC . adunque il seno tutto sta al seno di dBC :: CB . Cd ; ed il seno tutto al seno di DCB :: CB . dB ma Be è nota ; adunque è nota de .

Fig. 24.

Se l'angolo fatto dalle potenze è ottuso = ACB, sotto il retto ACd, resterà l'angolo dCB; ma d è retto. Adunque è dato l'angolo CBd

Io adunque come il seno tutto al seno dell'angolo B :: BC. dc e come il seno tutto al seno dell'angolo BCd :: AC. Bd; ella Be è nota. E' data adunque de = Be − Bd. Adunque è data la ragione di cd. de

Scolio 3°

Il provare una data ragione a proporzione g.d. non è un arbitrio, ma una necessità. Poichè egli è impossibile il costruire un cerchio e aprire di compasso, senza fare una ragione suddupla fra l'apertura del compasso ed il diametro. Prima adunque di dividere il diametro in qualunque delle infinite possibili ragioni, vi è antecedentemente nel diametro la ragion dupla, in rispetto al modo al diametro medesimo, che quando non vi sia, non è, e non può essere diametro. Quando adunque si divide il diametro, si divide inoltre [illegible] la ragion dupla, ch'è inseparabile dal diametro, in una ragione diversa, ch'è arbitraria,

e

e proporzione alla duplo
In conseguenza egli è impos-
sibile il separare la ve-
lazione della ragione arbi-
traria alla ragione neces-
ria, costitutiva del diametro.
Da ciò ne viene, che dalla
necessaria relazione delle due
ragioni, cioè della duplo,
ch'è di natura del diametro
e della formata ad arbitrio,
debba risultare una terza
forma di ragione, che geo-
metricamente le congiunga
ed in cui sia evidente, che
la prima forma è sempre
la ragion dupla
Sia per esempio la riduzione
della ragione a.b. a.b
a proporzione geometrica
diretta. Per ridurla è ne-
cessaria la somma de' due ter-
mini a+b; e però bisogna
ricorrere al diametro bd.
Di questa somma bisogna
prenderne la metà $\frac{a+b}{2}$,
che fa = v; e per conseguenza
si viene al raggio, o sia
all' apertura del compasso,
con cui si forma il circolo,
ed eccoci arrivati ai termini
della prima ragione ch'è
la dupla, fra il diametro,
ed il raggio, ch'è sempre il
mezzo aritmetico necessario
fra i capi del diametro.

Fig. 17

a . v . b

Ora poi si fa av. ab. vv. bv.
ad è formata la proporzion
g.d. della ragione a.b, o sia
av. bv., di cui il mezzo armon
è ab., e l'aritmetico vv
Se dunque l'assegnazione del
mezzo aritmetico (che è il vagg
v) è dimostrativamte. necessari
e non può non essere l'ap
tura del compasso; Non è
adunque vero che passando
dalla ragione a.b. alla ugual
av. bv. si patti ad una ragio
diversa; ma anzi è vero che la
ragione arbitraria a.b. si ridu
al suo principio p.o av. bv,
perchè si riduce all'apertura del
compasso come a principio ind
pendente dal nostro arbitrio a
Per fine av. bv sono ancor essi
piani, e però del medmo genere
de' quadrati del lato, e del
raggio, che sono i mezzi ar
monico, ed aritmetico.

Fine del Lib. II.

Libro Secondo Terzo

Osservazioni su le ragioni co' loro mezzi determinabili, armonico, aritmetico, e contrarmonico

Osservazione 1ª

1. Si prendano tutti i suddetti mezzi fra i numeri alternativamente presi della serie aritmetica 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c, cioè fra 1. 3; 2. 4; 3. 5; 4. 6; 5. 7;

Ragioni	Mezzi col mezzo aritm.	Proporzioni	Ragioni fra gli estremi		Mezzi
a . b	a . v . b	av . ab . vv . $\frac{2ab}{a+b}$. $\frac{aa+bb}{a+b}$. bv			
1 . 3	1 . 2 . 3	2 . 3 . 4 . 5 . 6	:: 1 . 3	:: 1 . 3	1
2 . 4	2 . 3 . 4	6 . 8 . 9 . 10 . 12	:: 1 . 2	:: 3 . 6	3
3 . 5	3 . 4 . 5	12 . 15 . 16 . 17 . 20	:: 3 . 5	:: 6 . 10	6
4 . 6	4 . 5 . 6	20 . 24 . 25 . 26 . 30	:: 2 . 3	:: 10 . 15	10
5 . 7	5 . 6 . 7	30 . 35 . 36 . 37 . 42	:: 5 . 7	:: 15 . 21	15
6 . 8	6 . 7 . 8	42 . 48 . 49 . 50 . 56	:: 3 . 4	:: 21 . 28	24
7 . 9	7 . 8 . 9	56 . 63 . 64 . 65 . 72	:: 7 . 9	:: 28 . 36	28
8 . 10	8 . 9 . 10	72 . 80 . 81 . 82 . 90	:: 4 . 5	:: 36 . 45	36

2. Si osservi che in queste proporzioni, vi sono ancora quelle de' numeri consecutivi 1. 2; 2. 3; 3. 4; 4. 5; 5. 6; cioè 2 . 4; 4 . 6; 6 . 8; 8 . 10 &c

Giacchè adunque nelle proporzioni dedotte da' numeri alternativamente presi vi sono comprese ancor quelle de' numeri

consecutivi, parleremo delle
sole prime, cioè di quelle dedot
da' numeri alternativamente pres
6. In esse proporzioni tutti i mezzi
armonici sono quadrati. 4.9.16.25
I mezzi armonici sono i quadrati
stessi meno 1. che è il quadrato
della differ.a della forma, cioè
sono 3.8.15.24.35.&c; ed i mezzi
contr.armonici sono i quadrati
stessi +1. cioè sono .5.10.17.26.&c
La prima colonna va crescendo
con l'ordine de' numeri pari
4.6.8.10.12, e l'ultima di
6.8.10.12.&c
Le colonne medie, cioè la
2da, 3zza, 4tta crescono
de' numeri caffo. 5.7.9.11.13.&c
4. Se si andassero scrivendo con
lo stesso ordine tutte le colonne,
avressimo una proporzione
armonica .0.0.1.2.2. in cui
fra .0.2. il mezzo armonico
sarebbe .0; il mezzo aritmetico
sarebbe .1, ed il contrarmonico
sarebbe .2.
Sicchè il 1.° fra tutti i mezzi
armonici sarebbe .0., cioè
eguale al mezzo arit.co (1.) meno
1; il 1.° mezzo aritmetico sarebbe
1., ch'è un quadrato come
tutti gli altri mezzi aritmetici,
ed è il primo di tutti i qua-
drati; il 1.° mezzo contrarm.co
sarebbe .2., eguale al mezzo
aritmetico +1.

+ Si possono adunque compi-
tare quanto uno vuole
le proporzioni stesse

2	0 . 0 . 1 . 2 . 2	
	2 . 3 . 4 . 5 . 6	4
4	6 . 8 . 9 . 10 . 12	6
6	12 . 15 . 16 . 17 . 20	8
8	20 . 24 . 25 . 26 . 30	10

la prima; ed ultima colonna hanno le ~~Case~~ differenze de' Cubi eguali come i numeri naturali, ma la prima colonna incomincia dall'1., la 2da dal 2.

1ª	2da
0.1.8.27.64	1.7.19.37.61
1.2.3.4.5	1.2.3.4.5

5° Abbiamo osservato finora le proporzioni dedotte dai numeri, fra i quali passa diffe. 1; (1.2; 2.3; 3.4; 4.5) ~~adesso~~ troviamone il medio aritmetico regna fra i termini della forma la differenza 2. come in 1.2.3; 2.3.4; 3.4.5 le quali abbracciano ancora le proporzioni, nate dalle ragioni de' numeri consecutivi, fra i quali regna diffe. 1. (1.2; 2.3; 3.4 &

osserviamo ora quelle proporzioni che danno i medi fra due numeri, fra i quali trovato il medio aritmetico, regni la differenza 2. In queste proporzioni si osserva che i medi aritmetici sono anco qui quadrati; il medio armonico è minore, il contr armonico è magg.e del medio aritmetico quando vale il quadrato della diffe. 2 della forma a.v.b; 1.3.5; 2.4.6 &

a . b	a . v . b	arit. ab. M. vv-ab. Bv
0 . 4	0 . 2 . 4	0 . 0 . 4 . 6 . 8
1 . 5	1 . 3 . 5	3 . 5 . 9 . 13 . 15
2 . 6	2 . 4 . 6	8 . 12 . 16 . 20 . 24
3 . 7	3 . 5 . 7	15 . 21 . 25 . 29 . 35
4 . 8	4 . 6 . 8	24 . 32 . 36 . 40 . 48
5 . 9	5 . 7 . 9	35 . 45 . 49 . 53 . 63

si osserva in oltre che la prima, ed ultima colonna contiene i medi armonici delle proporz.i del n°.1; ma la 1ª colonna principia dal 2.

e la ultima dal 15, cioè due
Dopo
valendo con l'ordine con l'ordi-
ne de' numeri impari in tutte
cinque le colonne, si trova
4. il primo mezzo aritmetico;
il 1° mezzo armonico = 4 − 4 = 0; il
1° mezzo contrarmonico = 4 + 4 = 8

6. Si osservino ora i mezzi fra
que' numeri, fra i quali tro-
vasi il mezzo aritmetico, segni
fra i termini della seconda la
differenza 3.
Anco in queste proposizioni
i mezzi aritmetici sono quadrati;
il mezzo arm.co è minore,
di il mezzo contrarmonico
è maggiore del medio aritmetico
quando vale il quadrato
della differenza 3. da forma
a · v · b ; 1 · 4 · 7 ; 2 · 5 · 8 &c

a · b	a · v · b	av · ab · vv · vv · ab · bv
0 · 6	0 · 3 · 6	0 · 0 · 9 · 18 · 18 (10
1 · 7	1 · 4 · 7	4 · 7 · 16 · 25 · 28 (11a
2 · 8	2 · 5 · 8	10 · 16 · 25 · 34 · 40
3 · 9	3 · 6 · 9	18 · 27 · 36 · 45 · 54 (14
4 · 10	4 · 7 · 10	28 · 40 · 49 · 58 · 70
5 · 11	5 · 8 · 11	40 · 55 · 64 · 73 · 88

La 1ª colonna cresce così · 4 · 6 · 8 · 10 · 12
2 · 3 · 4 · 5 · 6
la ultima così 10 · 12 · 24 · 16 · 18
5 · 6 · 7 · 8 · 9
cioè le lor differ.e sono come
i numeri naturali, ma la
1ª principia dal 4; l'ultima
dal 10 lasciandone fuori due
cioè · 6 · 8 ·
Le tre colonne di mezzo crescono
come i numeri pari, principi-
ando dal 2. Anco qui il
1° mezzo armonico è = 0

7. Le proporzioni, le cui forme
hanno la differ.a 4. hanno esse pure
i mezzi

0 · 4	0 · 4 · 4	0 · 0 · 16 · 32 · 32
1 · 9	1 · 5 · 9	5 · 9 · 25 · 41 · 45
2 · 10	2 · 6 · 10	12 · 20 · 36 · 52 · 60
3 · 11	3 · 7 · 11	21 · 33 · 49 · 65 · 77
4 · 12	4 · 8 · 12	32 · 48 · 64 · 80 · 96
5 · 13	5 · 9 · 13	45 · 65 · 81 · 97 · 117

i mezzi aritmetici quadrati, la differa. fra il mezzo armonico, aritmetico, e contrarmonico = al quadrato della differa della somma. 4 pr. mezzo armco. anco qui è. 0. la 1ª colonna è fatta dai mezzi armonici del n°. 5 ; e la ultima dà medesima ragione ecc.

6. Nelle proporzioni del n°. 1°. i numeri esprimenti le ragioni sono 2 · 6 · 12 · 20 · 30 · 42
1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21
I mezzi armonici pari sono
8 · 24 · 48 · 80 · 120
1 · 3 · 6 · 10 · 15
Questi numeri a due a due presi, danno i quadrati, i quali si ànno ancora dalla somma de' n°. caffo
1 + 3 = 4 = 1 + 3
3 + 6 = 9 = 1 + 3 + 5
6 + 10 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7
10 + 15 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9
I mezzi armonici dispari sono
3 · 15 · 35 · 63 · 99
I numeri impari sono la somma de' termini della ragioni prima 3 = 1 + 2 ; 5 = 2 + 3 ; 7 = 3 + 4
Nelle proporzioni del n°. 5°. gli estremi sono 3 · 15 · 35 · 63 · 99
I mezzi armci. pari 12 · 32 · 60 · 90
3 · 8 · 15 · 24
che sono i mezzi armonici del n°. 1. I mezzi armci. dispari 5 · 21 · 45 · 77 ecc

I medj armonici delle

I numeri esprimenti le vazioni pari sono . 6 . 24 . 46 . 60 . 120

1 . 3 . 6 . 10 . 15

si lascia di fare altre osservazioni, potendo farle da se ognuno che ~~ne abbia~~ voglia. Tale sarebbe l'osservare che i primi termini del p.° e 3.° n.° crescono di numeri pari; que' di mezzo di impari; ma nel n.° 2 do e 4.° succede i termini crescono e impari

Osservazione II.ª

Le proporzioni delle quali abbiamo parlato nel n.° p.° della p.ª osservazione sono contenute nella serie aritmetica de' numeri naturali. In queste proporzioni osservasi vuole

v. Laberc. n.° II. IV. VIII.

1. che gli esponenti loro sono

2 . 6 . 12 . 20 . 30 . 42 & proporzionali a 1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 &

che sono i numeri ~~retti~~ del Laberco IX nella 3.ª colonna, i quali nascono per somma dai numeri naturali.

essi nascono ancora dai numeri naturali in un altro modo

Eccolo

numeri naturali	1 .	2	3 .	4 .	5 .	6 .	7	8 &
loro quadrati	1 .	4	9 .	16	25 .	36 .	49	64 &
radici de' loro prodotti moltiplicandoli a due a due	$\sqrt{1\times4}$.	$\sqrt{4\times9}$.	$\sqrt{9\times16}$.	$\sqrt{16\times25}$.	$\sqrt{25\times36}$.	$\sqrt{36\times49}$.	$\sqrt{49\times64}$. &	
	2 .	6 .	12 .	20 .	30 .	42 .	56 . &	
	:: 1 .	3 .	6 .	10 .	15 .	21 .	28 &	
danno i quadrati	1+3 .	3+6 .	6+10	10+15 .	15+21 .	21+28		
1 . 4 . 9 . 16 &	2 .							

N.° IV.

2. In queste proporzioni osservisi le vazioni degli esponenti nella p.ª 3.ª, 5.ª & alternativamente queste hanno

come

come i numeri caffo 1.3; 3.5; 5.7; 7.9; 9.11.&c e le vagioni degli esovemi della 2da, 4ª, 6ª stanno come i numeri naturali 1.2; 2.3; 3.4; 4.5; 5.6 &c. Segue l'inbende che le vagioni si riducano a numeri primi

N°. VI.

3. Si osservi che nella prima proporzione tutti i numeri sono di seguito 2.3.4.5.6. nè ve n'è alcuno di ozioso, o sia ommesso, come non appartenente alla proporzione

N°. VII.

Nella 2da proporzione
6.8.9.10.12
Nella numerica numerazione si ovviano due vacui, cioè fra 6.8, e fra 10.12, fra i quali vi stanno 7.11. Le questi vi s' ~~interporrebbero~~, quanto alla proporzione rimarrebbero ozioso

Nella terza proporzione
12.15.16.17.20
fra 12.15. vi sono due gradi vacui, o sia due numeri ozioso 13.14; e fra 17.20 ve ne sono altri due 18.19.

Nella 4ª. proporzione
20.24.25.26.30
fra 20.24 vi sono ove vacui 21.22.23; ed altri ove vacui vi sono fra 26.30, cioè 27.28.29. &

Pajono oziosi qué numeri, ma non lo sono. Sono anzi buoni

necessarj, non già per quella proporzione da cui sono cinchiusi, ma per il legame della stessa proporzione con le precedenti, e consequenti, e per la relazione delle somme rispettive de' termini delle proporzioni, e di tutti que' numeri che riempiono i vacui delle rispettive proporzioni, come ora si vuole mostrare.

1. La prima proporzione che ammette vacui di numeri è la dupla co' suoi tre nell'armonico, aritmetico, e contr'armonico, cioè 6.8.9.10.12. In questa trovandosi mancanti nella ~~numer~~ aritmetica numerazione 7.11. Vi si supponga; e prendo da una parte il 7., e pongo dall'altra parte il 11. col mezzo contr'armonico 10, si ha 12. Quindi nasce la forma tripla 7.12::11.12::12.6, e sovremi della precedente proposiz. 2.3.4.5.6

N°. IV.

Nella seguente proporzione

12.15.16.17.20

si sommino i due mancanti fra 12.15, cioè 13+14=27, e si sommino 18+19 col contr'armonico 17, si avrà 54; e quindi la forma 27.54::1.2::6.12, e sovremi da precedente proposiz.

proporzione 6.8.9.10.12 ::
Nella sesquialtera 10.12.15.16.30
tornati i mancanti 21+22+23
=66, e tornati pure gli
altri ove mancanti col mezzo
contrarmonico 26+27+28+29
=110; si avrà la forma
66.110 :: 3.5 :: 12.20, estremi
di della precedente pro-
porzione 12.15.16.17.20.
Nella seguente suddivisione 5ª:
30.35.36.37.42
tornati i quadro 31+32+33+34
=130, e tornati gli altri
quadro col mezzo contrarmo
37+38+39+40+41=195; si ha
la forma sesquialtera
130.195 :: 2.3 :: 20.30; estremi
della sesquialtera precedente
20.24.25.26.30.

È chiaro da tutto questo, che
nella dupla è contenuta la
tripla, forma della precedente
proporzione; Nella 6ª
12.15.16.17.20, contenersi
la dupla, forma della
proporzione precedente;
Nella 4ª. 20.24.25.26.30
contenersi la ragione 3.5
forma della proporzione
che la precede, e così sempre
È chiaro ancora che non han
luogo qui le frazioni; tutto
essendo legato a determinata
serie di ragioni, e proporzioni
Ed è finalmente chiaro, non esservi

1.3.	2.3.4.5.6
2.4	6.8.9.10.12
3.5	12.15.16.17.20
4.6	20.24.25.26.30
5.7	30.35.36.37.42

nella indefinita armonica
serie 1. 2. 3. 4. 5. &c. alcun
numero ovioso, tutti avendo
rapporto al legame delle
ragioni, e proporzioni.
Poichè in ciascuna proporzione
si trova la forma della
precedente proporzione.
5.° Si vuole osservare che nella
prima che ha gli estremi in
ragion tripla. 2. 3. 4. 5. 6, non
essendovi alcun di mezzo
ragione, rimane solo senza
rapporto il mezzo armo-
nico. 5.
Nella 2da proporzione 6. 8. 9. 10. 12
si trova nè numeri separati
la forma tripla 7. 11. della
prima proporzione, e si
trova 8 sono
Si sommino i cinque seguenti
nia della tripla 2+3+4+5+6=20
ed i due seguenti della
forma tripla posteriore
7+11=18, si ha ~~la forma~~
20. 18, la ragione 5. 7
Continuando a serie la
operazione, si sommino i
cinque seguenti della duplo
6+8+9+10+12=45, e si som-
mino i due seguenti della
forma duplo posteriore
27+54=81; si avrà fra
45. 81, la ragione di 5. 9
Sommati i seguenti della 3. 5
11+15+16+17+20=60; e si somma
pure

pove i due della forma 3.5 posteriore 60+110=170:
si avrà 80.171 :: 5.11.
Sommati finalmente i termini della sesquialtera 20+24+25
+26+30=125; e sommati i due della forma sesquialtera posteriore 130+195=325.
si avrà 125.325 :: 5.13.
Adunque si ha 5.7;
5.9
5.11
5.13
le cui somme 20.40 :: 1.2
che danno la forma duplo
Vi è adunque il legame delle ragioni anteriori con le proporzioni posteriori, e delle ragioni posteriori con le proporzioni anteriori, cioè il legame di serie universale di ragioni, e proporzioni, nella serie ~~cobinata~~ di proporzioni composta dai numeri pari e caffo.
1.3; 2.4; 3.5; 4.6; 5.7; 6.8;
6.° si vuole in oltre osservare, che sommando da una parte i termini della proporzione terza il mezzo contrarmonico, e dall'altra il mezzo contrarmonico con i numeri esclusi dalla proporzione risulta la serie seguente

nella indefinita aritmetica
serie 1.2.3.4.5.& alcun
numero ovvio. Tutti avendo
rapporto al legame delle
ragioni, e proporzioni.
Poichè in ciascuna proporzione
si trova la forma della
precedente proporzione.
5.° Si vuole osservare che nella
prima che ha gli estremi in
ragion tripla .2.3.4.5.6, non
essendovi alcuno di mezzo
ragione, rimane solo senza
rapporto il mezzo aritmetico .5.
Nella 2da proporzione 6.8.9.10.12
si trova né numeri separati
la forma tripla 7.11. della
prima proporzione, e si
trova p somò.
Si sommino i cinque termi-
ni della tripla 2+3+4+5+6=20
ed i due termini della
forma tripla posteriore
7+11=18, si ha ~~la forma~~
20.36, la ragione 5:7
Continuando p serie la
operazione, si sommino i
cinque termini della duplo
6+8+9+10+12=45, e si som-
mino i due termini della
forma duplo posteriore
27+54=81; si avrà fra
45.81, la ragione di 5.9
Sommati i termini della 3.5
12+15+16+17+20=60; e si sommino
pure

pure i due della forma 3.5 porteriore 60+110=170:
si avrà 80.171 :: 5.11.
Sommisi finalmente i termini della sesquialtera 10+14+15
+16+30=125; e sommisi i due della forma sesquialtera porteriore 130+195=325.
si avrà 125.325 :: 5.13.
Adunque si ha 5.7; ~~5.9~~
5.9
5.11
5.13
le cui somme 10.40 :: 1.4
che danno la forma duplo
Vi è adunque il legame delle ragioni anteriori con le proporzioni posteriori, e delle ragioni posteriori con le proporzioni anteriori, cioè il legame di serie universale di ragioni, e proporzioni, nella serie ~~costituita~~ di proporzioni costituita dai numeri pari e caffo.
1.3; 2.4; 3.5; 4.6; 5.7; 6.8. &c
6.° si vuole in oltre osservare, che sommando da una parte i termini della proporzione terza il medio contrarmonico, e dall'altra il medio contrarmonico con i numeri esclusi dalla proporzione risulta la serie seguente

somme

Della duplà 6+8+9+10+11 ═══ 35
de' numeri esclusi 7+10+11 = 28
della supbipart.a 3.a 12+13+16+17+20 = 63
de' numeri esclusi 12+14+17+18+19 = 81
da Sesquialtera 20+24+25+[illegible]+30 = 99
dagli esclusi 21+22+23+26+27+28+29 = 176
della pybipart.e 5.a 30 + 35+36+42 ═══ 143
dagli esclusi 31+32+33+34+37+38+39+40+41 = 325

ecco la serie 35 . 28 :: 5 . 4
63 . 81 :: 7 . 9
99 . 176 :: 9 . 16
143 . 325 :: 11 . 25

Esaminata questa serie, si trova che è formata dagl'impari per differenza due: 5.7.9.11; e dai numeri quadrati 4.9.16.25. da trovandosi evidentemente mancare dalla parte de' quadrati perche manca il p.o quadrato che è la unità; e la serie de' numeri caffo per differenza 2. incominciando qui dal n.o 5 che certamente non è il p.o della serie: non pare la cosa originale.

Ma si osservi che nella precedente osservazione, non essendo inclusa la tripla 1.3.4.5.6, prima proporzione di tutto il complesso, in essa ci sono infatti il quadrato 1, ed il n.o caffo 3.; poichè 1+3+4+6 = 15; e 15 . 5 :: 3 . 1

15 . 5 :: 3 . 1
5 . 4
7 . 9
9 . 16
11 . 25
25 . 35
7 . 11

Ma tornati gl'impari insieme ed insieme pure i quadrati, le somme si risolvono nella ragione 7.11. cioè del quadrato inscritto

inscritto al cerchio circoscritto. Adunque la operazione qui sopra indicata conduce al cerchio.

~~Se adunque la 4ª colonna de' numeri impari e la 3ª colonna de' numeri pari si leggono con questa osservazione continuata si giunge alla ragione cercata cioè media, aritmetica, armonica e contrarmonica.~~

Esempio N° IV

7° Se nella 1ª colonna, presa dal basso all'alto 30.20.12.6.2. che ha le differenze 10.8.6.4. si seguita a scrivere i numeri con la detta legge: sopra il .2. si trova 1 così se nella 2da colonna presa pure dal basso all'alto 35.24.15.8.3. con le differenze 11.9.7.5. si seguita a scrivere i numeri con la stessa legge de' 1ª caso: sopra il .3. si trova 1. Nella terza colonna sopra il .4. si trova 1. Nella 4ª colonna sopra il .5. si trova il .2., e nella ultima si trova pure il .2. Adunque .0.0.1.2.2. è una proporzione con tutti i mezzi aritm.co, ariom.co, e contrarm.co fra 0.2., cioè .0. è il mezzo arm.co, .1. il mezzo ariom.co, 2. il contrarm.co

0 . 1 . 2	0 . 0 . 1 . 2 . 2
1 . 2 . 3	2 . 3 . 4 . 5 . 6
2 . 3 . 4	6 . 8 . 9 . 10 . 12
3 . 4 . 5	12 . 15 . 16 . 17 . 20
4 . 5 . 6	20 . 24 . 25 . 26 . 30
5 . 6 . 7	30 . 35 . 36 . 37 . 42 .

ma questa non può nascere se non dalla forma

0 . 1 . 2 ~~, 3~~

che però andrà posta sopra la forma 1 . 2 . 3 ; perchè così le ove colonne delle forme avran i numeri con la stessa legge .

Es.o I merri armonici pari sono

8 . 24 . 46 . 60 . 120 . 168 &c

:: 1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 &c

:: 2 . 6 . 12 . 20 . 30 . 42 &c

I merri armonici dispari sono

3 . 15 . 35 . 63 . 99 . 143 . 195 &c

1 . 5
3 . 7
5 . 9
7 . 11
9 . 13
11 . 15

I merri aritmetici sono quadrati

4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 &c

1+3 . 3+6 . 6+10 . 10+15 . 15+21 . 21+28 &c

Nascono adunque i n.i quadrati dalla somma de' n.i triangolari a due a due presi ; e nascono ancora i numeri quadrati dalla somma d'ordine de' n.i impari 4 = 1+3

9 = 1+3+5

16 = 1+3+5+7 &c

ed i numeri impari nascono dalla somma de' termini delle semplici vagioni prime . 1 . 2 ; 2 . 3 ; 3 . 4 &c 1+2 = 3

2+3 = 5
3+4 = 7
4+5 = 9

la serie

da serie pari de' n.i pari cresce come la serie de n.i
n · 4 · 6 · 8 · 10 · 12 · 14 · 16
1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8
Tolti i pari da questa, restano i dispari 1 · 3 · 5 · 7 · 9 &c

9°. Il mezzo armonico della prima proporzione sta al mezzo aritmetico della 2da (cioè 3 · 9) come il p°. esponente · 2 · all'altro esponente · 6 · della 2a proporzione; ed il mezzo aritmetico della 2a proporzione sta al mezzo armonico della 2da, cioè 4 · 6 come il p°. esponente 6 all'altro esponente · 12 · della seconda proporzione, e così sempre

3 · 9 :: 1 · 3 :: 2 · 6
4 · 6 :: 1 · 2 :: 6 · 12
6 · 16 :: 1 · 2 :: 6 · 12
9 · 15 :: 03 · 5 :: 12 · 20
15 · 25 :: 3 · 5 :: 12 · 20
16 · 24 :: 2 · 3 :: 20 · 30
24 · 36 :: 2 · 3 :: 20 · 30
25 · 35 :: 5 · 7 :: 30 · 42

10°. Il mezzo armonico · 3 · della 1a. proporz.e formato col mezzo aritmetico · 9 · della 2da dà la stessa somma che nasce dal mezzo aritmetico della 1a formato col mezzo armonico della 2da

3 + 9 = 4 + 8
6 + 16 = 9 + 15 &c

ed il mezzo aritmetico della p.ª (4) romano col mezzo contr. armonico (10) della rda dà sempre la stessa somma che nasce dal mezzo arit.co (9) della rda col mezzo contr. armonico della p.ª

$$4+10 = 5+9$$

I prodotti degli estremi, ovvero de mezzi armonico, ed aritmetico danno la seguente serie 12 · 72 · 240 · 600 &c, e le somme del mezzo armonico della p.ª e del mezzo aritmetico della rda, (e così de' mezzi armonico ed aritmetico presi per diagonale) sono no

$$12 \cdot 24 \cdot 40 \cdot 60 \cdot \&c$$

Queste due serie di somme e prodotti danno

4

12 · 12 :: 1 · 1

24 · 72 :: 1 · 3

40 · 240 :: 1 · 6

60 · 600 :: 1 · 10

64 · 1260 :: 1 · 15

ecco i solidi 1 · 6 · 10 · 15 · 21

Inverse di $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{21}$

dedotte dalle differenze sarà volta inversa della armonica serie

$$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$$

$$60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$$

differ.ze $30 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$

$$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{15}$$

1 · 3 :: 4 · 6

6 · 4 :: 9 · 12

12 · 15 · 20 · 30

20 · 24 · 25 · 30

30 · 35 · 36 · 42

11. Il prodotto de' mezzi armonico ed aritmetico è uguale al prodotto degli estremi, e però que due termini li chiamiamo centro della proporzione la somma poi del mezzo armonico, e contrarmonico equivale al doppio del mezzo aritmetico, e però alla somma degli estremi

2 · 3 · 4 · 5 · 6

3 + 5 = 2 × 4

6 · 8 · 9 · 10 · 12

6 + 10 = 2 × 8

perchè i mezzi armonico e contrarmonico sono due termini egualmente distanti dagli estremi, la cui somma, e tanto è uguale al doppio del termine di mezzo. Prop.ne n°. XX

in proporzione aritmetica col mezzo aritmetico come pure co sono gli estremi di una serie aritmetica

6 · 8 · 10 · 12 · 14

Lib. 1. n°. XX

Osservaz.ne III.

Qualunque proporzione g.d. si risolve nella continua formata dalla ragione del 1°. termine al 3°. della g.d. E qualunque proporzione continua si risolve nella sua discreta sia la proporzione geometrica discreta

1°.

$av \cdot ab \cdot vv \cdot bv \;|\; r = \frac{a+b}{2}$

questa si risolverà nella sua continua, moltiplicando tutti i termini a due a due per ordine così

$av \times ab \cdot ab \times vv \cdot vv \times bv$

$\div aabv \cdot abvv \cdot bv^3$

$\div aa \cdot av \cdot vv$

2°. Questa continua si risolverà nella sua discreta, prendendo il 3° proporzionale aritmetico dopo i due primi termini di questa continua così

$\div aa \cdot av \cdot rav - aa$

e poi facendo (come) l'ultimo termine della 3ª continua (vv) all'ultimo termine della continua aritmetica (rav − aa) così il medio (av) al 4° ordine

$vv \cdot rav - aa :: av \cdot \frac{raavv - a^3v}{vv} = \frac{raav - a^3}{v}$

e questo si ponga fra il primo ed il 2do termine dell'aritmetica continua così

$aa \cdot \frac{raav - a^3}{v} \cdot av \cdot rav - aa$

questa sarà la geometrica discreta $av \cdot ab :: vv \cdot bv$; poichè

$aa \cdot \frac{raav - a^3}{v} \cdot av \cdot rav - aa$

$a \cdot \frac{rav - aa}{v} \cdot v \cdot rv - a$

$av \cdot rav - aa \cdot vv \cdot rvv - av$

$av \cdot ra \times \frac{a+b}{2} - aa \cdot vv \cdot r \times \frac{aa + rab + bb}{4} - a \times \frac{a+b}{2}$

$aa + ab - aa \qquad \frac{av + rab + bb}{2} - \frac{aa - ab}{2}$

$av \cdot ab \cdot vv \cdot \frac{ab + bb}{2} = b \times \frac{a+b}{2} = bv$

Lo che si voleva provare

Ej. 1º

1 . 3 :: 4 . 6

1×3 . 3×4 . 4×6

6 . 12 . 24

1 . 2 . 4 doppia

ſo 1 . 2 . 3

4 . 3 :: 2 . $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

1 . $\frac{3}{2}$. 2 . 3

2 . 3 . 4 . 6

Es. do . 1 . 3 . 5

1×3 . 1×5 . 3×3 . 3×5

3 . 5 :: 9 . 15

3×5 . 5×9 . 9×15

15 . 45 . 135

1 . 3 . 9 tripla

ſo 1 . 3 . 5

9 . 5 :: 3 . $\frac{15}{9}$

1 . $\frac{15}{9}$. 3 . 5

9 . 15 . 27 . 45 .

3 . 5 :: 9 . 15

Ej. 3º. 1 . 4 . 7

1×4 . 1×7 . 4×4 . 4×7

4 . 7 :: 16 . 28

4×7 . 7×16 . 16×28

28 . 112 . 448

7 . 28 . 112 quadrupla

ſo ... 1 . 4 . 16

... :

16 . 7 :: 4 . $\frac{28}{16} = \frac{7}{4}$

1 . $\frac{7}{4}$. 4 . 7

4 . 7 . 16 . 28

Quindi s'intende l'insegnamento di Platone; che data la dupla 1. n. 4: cioè dupla che anderebbe in infinito in. 1. n. 4. 16. 64, viene limitata, e ridotta a certa legge dalla dupla g. d., diminuendo il secondo termine della continua 1. n. 4. in sesquiterzo, e riportando questa sesquiterza al mezzo n. così

1. n - 4

1. n. 3

4. 3 :: n. $\frac{6}{4} = \frac{3}{n}$

1. $\frac{3}{n}$. n. 3

n. 3. 4. 6

16. 10. 25

16. $19\frac{1}{2}$. 10. n4

10. n4. n5. 30

1. n. 4	4. 6. 9	9. 12. 16.	n5. 30. 36
1. $1\frac{1}{n}$. n. 3	4. $5\frac{1}{3}$. 6. 8	9. $11\frac{1}{4}$. 12. 15	n5. $19\frac{1}{6}$. 30. 36
n. 3. 4. 6	12. 16. 18. n4	36. 45. 48. 60	150. 175. 180. n10
	6. 8. 9. 12	12. 15. 16. 20	30. 35. 36. 42

1. n. 4. 6. 9. 12. 16. 20. 25. 30. 36

mezzi arm	$1\frac{1}{n}$	$5\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{4}$	$19\frac{1}{5}$	$19\frac{1}{6}$
frazioni	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
mancano dall'unità	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
cenori	3	4	8. 9	15. 16	n4. n5

Osservazione IV.

Delle proporzioni congiunte

1. Evvi un'altra specie di proporzioni ~~esagi~~ nell'aritmetica serie de' numeri. Data la serie de' numeri quadrati . 1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36 . 49 . 64 , e data la serie delle ~~ragioni~~ proporzioni g . d .

2 . 3 . 4 . 6 . 6 . 9 . 12 . 15 . 16 . 20 . 24 . 25 . 30 .

si troveranno gli estremi di queste proporzioni, essere i mezzi geometrici de' n.i quadrati

Da queste due serie congiunte nasce una serie di proporzioni , in cui sempre è primo termine un numero quadrato, e l'ultimo è sempre lo stesso della prop.r g . d . sottoposta ai n.i quadrati, ed i mezzi sono sempre il p.o termine, ed il mezzo armonico della sottoposta proporzione, ma indeterminati a qualunque natura, perchè rispetto ai loro estremi, non sono nè armonici, nè aritmetici, nè contrarmonici, se si eccetui unicamente lo solo triplo, che in questa serie è la 2.da proporzione, ed è la sola privilegiata fra tutte, avendo essa i mezzi determinati . Perchè 4 . 6 . 8 . 12 . essendo in numeri p.i 2 . 3 . 4 . 6 .

Laberc fl.a 1.o X

1 . 2 . 3 . 6
4 . 6 . 8 . 12 2 . 3 . 4 . 6
9 . 12 . 15 . 20
16 . 20 . 24 . 30
25 . 30 . 35 . 42

è chiaro che 3. è mezzo armonico, e 4. mezzo aritmetico degli estremi 2. 6. Ciò dovrà combinarsi con ciò che si dirà in appresso del cerchio in questa proporzione.

La forma di questa proporz. è composta delle due semplici forme prime delle due proporzioni aritmetica, ed armonica nel modo seguente.

La prima forma tripla arithm.ca 1. 2. 3, e la forma armonica 2. 3. 6 compongono 1. 2. 3. 6, e risultano gli estremi estremi: e così la forma duplа aritmetica 2. 3. 4 raddoppiata in 4. 6. 8 e la forma arm.ca 3. 4. 6 raddoppiata in 6. 8. 12 compongono la 4. 6. 8. 12, e risultano gli estremi tripli 4. 12.

1. 2. 3	2. 3. 4	4. 6. 8
6. 3. 2	8. 4. 3	12. 8. 6

La congiunzione degli estremi di questa sale proporzione si fa circolarmente; perchè il mezzo 2. aritmetico della forma tripla arithm.ca 1. 2. 3 si conviene nell'estremo 2. della tripla armonica; e similmente il mezzo arm.co 3 della tripla armonica 6. 3. 2. si conviene nell'estremo 3. della tripla aritmetica 1. 2. 3. e lo stesso si dica, ed intenda della indefinita serie di tali proporzioni.

2. Si osservi

r. Si osservi il necessario rapporto, e legame di queste proporzioni, il di cui primo termine è sempre un numero quadrato, con le proporzioni q. d., poste fin da principio, formate dai due mezzi, armonico, ed armonico, il di cui primo termine è sempre un numero mezzo geometrico fra due quadrati come 1. fra 1. 4; e 6. fra 4. 9

Osserv. II n°. XI

L'esponente magg.re delle due proporzioni fra loro relative nella serie p.a, cioè 3.a è sempre comune. Adunque queste proporzioni hanno fra loro il necessario rapporto, e legame.

3 La cui proporzione congiunta serve a spiegare il Testo di Platone Timeo, ove dice:
= ove fabbrica gl'intervalli
= sesquialteri, sesquiterzi,
= sesquiottavi; con questi
= legami ne' primi spazj
= si adempiscano tutti i
= sesquiterzi col sesquiottavo
= intervallo, lasciandone una
= pavoncella, la quale ha i
= termini del n°. al numero
= come 256. 243

4. 6. 8. 9. 12
4. 6. sesquialtera
6. 8. sesquiterza, come pure 9. 12
8. 9. sesquiottava

Che da questa proporzione risulti la pavoncella, che si trova in ragione di 243. 256 si dimostra.

4 · 6 · 6 · 9 · 12

Si norma de' segni si moltiplichino fra loro i numeri

9 × 12 = 48
6 × 9 = 54
6 × 6 = 64

48 · 54 · 64

24 · 27 · 32

I prodotti 48 · 54 · 64, che in n.i p.i sono · 24 · 27 · 32 · con la stessa regola si moltiplichino fra loro così

24 × 32 = 768 div. 13 ⟨56
27 × 27 = 729 ⟨43

Ma perche tale operazione di moltiplica (proprietà intrinseca di queste proporzioni) quando è seconda, altrebbene è significante: si operi co' segni in diverso modo applicati

4 · 6 · 6 · 9 · 12

4 × 6 = 32
6 × 9 = 54
6 × 12 = 96

I prodotti 32 · 54 · 96 ·
In numeri p.i sono · 16 · 27 · 48 ·
~~16 × 48 = 768~~ siano moltiplicati
16 × 48 = 768 div. 13 ⟨56
27 × 27 = 729 ⟨43

Non basta · conservando la proporzione della duplo

6 · 6 · 9 · 12

il termine · 4 · primo estremo, sudduplo di · 12 · si trasporti in · 16 ·, ultimo estremo, triplo di 6

lavorato

sarà la proporz.ne congiunta
6.6.9.17.16
si moltiplichino i numeri se-
condo i segni
6x16 = 108
6x17 = 96
9x9 = 81
I prodotti 81.96.108
in n.i primi 17.32.36
Savanno 17x36 = 972 di 4 1243
32x32 = 1024 1256
Similmente operando co' segni
diversamente applicati
6.6.9.17.16
6x9 = 54
6x17 = 96
9x16 = 144
I prodotti 54.96.144
divisi danno 9.16.17
ma 9x17 = 1243
e 16x16 = 1256

Nichali 4 Questa mutazione e coppiazione
del p.o esempio .4. in ultimo
esempio .16. , si prova così
siano i due ordini di cinque
lettere a.b.c.d.e
b.c.d.e.f
e sia a.e :: b.f nel p.o e 2.do ord.
si moltiplichino successivam.te
i termini regolarmente cominci
mi dal centro, o alternativa- 2.do il centro e l'ultimo
mente presi, fino che tutti
i prodotti in ciascun ordine
si riducano a due : Savanno
questi prodotti proporzionali
presi i secondi inversamente

la sola inspezione della ope
razione dimostra ciò che si
è proposto

Primo ordine { Prodotti de termini egualm.te lontani dal centro ae . bd . cc ; acc . bdd
Prodotti presi alternativamte ac . bd . ce ; ace . bdd

Secondo ordine { Prodotti degli egualm.te lontani dal centro . bf . ce . bd ; bfd . ccd
Prodotti altern. . . . — bd . ce . df ; bfd . ccd

deve essere adunque
acce . bdd :: cce . bfd
cioè a . b :: e . f
ovvero a . e :: b . f
ma così è per ipotesi adunq.e

Or. ciò può applicarsi ai due
ordini di numeri
4 . 6 . 8 . 9 . 12
6 . 8 . 9 . 12 . 18
Nel p.o risultando sempre
la ragione di 256 . 243 ; e
nel secondo quella di 243 . 256

5.o La natura circolare che qui
si rileva nel risultato
sempre lo stesso in 243 . 256 .
(benché sia diversa la operazio
ne di legame, e la posizione
degli estremi cupli) si bocca
con mano ponendo a con=
fronto l'una sotto l'altra
le due proporzioni
4 . 6 . 8 . 9 . 12
6 . 8 . 9 . 12 . 18

4 . 6 :: 12 . 18
6 . 8 :: 8 . 6
8 . 9 :: 8 . 9
9 . 12 :: 6 . 8

Poichè i due mezzi . 6 . 8 . 9 . della
superiore, essendo rispetto
ai due mezzi . 8 . 9 . 12 della
inferiore, ma il p.o al 2.do
come il 2.do al 3.o ; e gli
estremi cupli comuni forman=
do co' proprj mezzi le due propor
inversamte

inversamente uguali, per ne-
cessità della loro forma ne
viene, che moltiplicando fra
loro in croce i termini della
superiore con quelli della
inferiore, fino ai due di mezzo,
ne' quali si trova il mezzo
comune de' cinque termini,
il prodotto sia sempre lo
stesso

4 × 12 / 6 . 18	6 . 9 / 4 × 12	6 : 9
4×18 = 72	6×12 = 72	6×9 = 72
6×12 = 72	6×9 = 72	

E qui la natura circolare si
vede con gli occhj, e si tocca
con le mani nel suo princi-
pio unico in genere, che
consiste nelle ragioni, e
proporzioni, ben diversamte
dal modo comune maneggiate,
ed intese: E nel suo princi-
pio prossimo in ispecie, che
consiste negli estremi tripli
riempiti dai due termini
di proporzione, della tripla 3.4
e della 6.8
e della dupla 6.9. dai
quali ha necessario principio
e confine la seiupla espres-
sione della universale
consonante armonia.
3×4 = 12; 6×9 = 72; e 12.72 :: 1.6
Perchè poi si abbia una
qualche idea della operazi-
qui esposta de' segni della

moltiplica, acciò non si creda un giuoco di numeri, mostreremo che quei segni sono d'intrinseca proprietà delle proporzioni g.d., cosicchè dai due mezzi determinati, assiem.co, e contrammonico.

Applicate, p.es., quei segni alla tripla g.d. dalla operazione della moltiplico si avrà in prodotto la radice della tripla g.d., perchè r×6=r; 3×5=15; 4×4=16; ma dati i due termini 1r.15.16, la fanno il 4° proporzionale è =r0 e data la forma 3.4.5 si ha la solita formola

3×4 . 3×5 . 4×4 . 4×5
1r . 15 . 16 . r0

Ecco dunque le radici della tripla 1r.r0 :: 3.5 perchè divisi 3.5. in 1r; e r.3, si ha 1×r=r; r×3=6; e r.6 :: 1.3 ovvero 1×2 . 2×3 :: 1 . 3

Proseguendo poi la operazione in 1r.15.16.17.r0 si avranno i due termini

r40 . r55 . r56

de' quali il 4° proporzionale è =r7r. ma data la forma 15.16.17, mezzi fra 1r.r0, la formola si ha 15×16 . 15×17 . 16×16 . 16×17
r40 . r55 . r56 . r7r
e 15.17 :: r40.r7r sono le radici della

r.3.4.5.6

r×6=r
3×5=15
4×4=16

1r.15.16 . r0
15
40
16
r40 | 1r
r0

della vagione 7.9
1 5 . 17
7.8 . 8x9 :: 7.9

e parimente 7.9 sono le radici di 3.5; poichè 3x4 . 4x5 :: 3.5.
Adunque in questa operazione si trova un progresso indefinito dalla vagione degli esponenti alla radice ne' merci, e da questi fatti esponenti, alle loro radici ne' loro merci.

Da tutto ciò s'intende che Platone nel Timeo in quel suo detto che abbiam esposto più sopra, in cui trattò dell'anima del mondo, indica quest'anima per mezzo della proporzione congiunta 4.6.8.9.12; cioè, ponendo la parte il tutto indica l'armoniche proporzioni, e l'armonico principio impresso nelle cose, e per tutte diffuso; ma lo indica misteriosamente, perchè voleva tener nascoste le Pitagoriche dottrine, che quei Filosofi non volevano che divenissero comuni, ma che fossero note ai soli Filosofi della sua Setta, come pure usavano di fare gli Egizj, da cui Pitagora le aveva appre-

Osservazione V.

Le cinque proporzioni congiunte si trovano nel cerchio, e dopo la quinta proporzione congiunta, si ritorna da capo alla prima 1. a.

Fig.ª 1.ª 2.ª prop. cong.

Al diametro ae si applichi la tripla a. 3 :: 4. 6. ricchè sia ab = a
ac = 3
ad = 4
ae = 6

questa proporzione si risolva nel suo principio primo, che è di dupla continua, moltiplicando per ordine i termini a due a due

a × 3 . 3 × 4 . 4 × 6
6 . a . a4
1 . a . 4

si vuole dimostrare nel cerchio questo principio di doppia continua, ch'è rinchiuso nella tripla, e dimostrarlo fatto dalla moltiplica ordinata de' termini corrispettivi della tripla, cioè da a × 3; 3 × 4; 4 × 6

da. b. d. si tirino i seni bn. do, e le corde an. ao. sarà an medio geometrico fra ac. ad; ed. ao. medio geometrico fra ad. ae
n. 4
4. 6

Poichè

Poichè la 6ª. e 11ª. del VI°. Elem.
$\overline{an}^2 = ea \cdot b = r \times 6 = 1r$. adunque
$an = \sqrt{1r}$. adunque $\div r . \sqrt{1r} . 6$
adunque $r . 3 . \sqrt{1r} . 4 . 6$; ppchè
$\sqrt{1r}$ che è medio geometrico
fra . r . 6 , lo sarà ancora
fra . 3 . 4 . E similmente
$\overline{ao}^2 = \overline{ead} = 6 \times 4 = r4$; adunq;
$ao = \sqrt{r4}$; adunque $\div 4 . \sqrt{r4} . 6$
adunque $r . 3 . \sqrt{1r} . 4 . \sqrt{r4} . 6$
Deve esservi adunque nel
diametro un termine, da
cui si formi col lato un
triangolo, la cui ipotenusa
sia medio geometrico fra ab. ac
la quale ipotenusa sia per caso
$\sqrt{6}$, benchè questa non
appaja.

Abbiam dimostrato di sopra
che il pr°. termine . r . della
proporz°. g . d . $r . 3 . 4 . 6$. è
medio geometrico fra i due
quadrati . 1 . 4 . e però suppor
antecedente il termine . 1 . come
quadrato . Si assegni questo
termine . a1 . che è $\frac{1}{6}$ del dia-
metro . ae . Si tiri il lato .
1m . e la ipotenusa am :
questa ipotenusa è il medio
geometrico fra ab . ac :: r . 6
e però $am = \sqrt{6}$; poichè
$\overline{am}^2 = ea1 = 6 \times 1 = 6$ adunque
$am = \sqrt{6}$. adunque

$1 . \sqrt{6} . 6$ adunque

$1 . r . \sqrt{6} . 3 . 6$

poichè il medio geometrico

fra 1.6, lo è ancora fra 2.3. mentre 1x6=6 = 2x3.

Si ha per tanto

$$2.\overline{am}\sqrt{6}.3.\overline{an}\sqrt{12}.4.\overline{ao}\sqrt{24}.6$$

e frattanto $\overline{am}^2.\overline{an}^2.\overline{ao}^2$

6 . 12 . 24

2x3 . 3x4 . 4x6

1 . 2 . 4

dunque si è ritrovato il necessario termine 1. primo termine della prima proporzione congiunta, il quale non appariva. Si è dimostrata per via del cerchio la risoluzione della triplicata 1.2.3.4.6. nel suo principio primo di doppia continua. Si è dimostrata la origine della proporzione congiunta nel termine. ai = 1

1 . 2 . 3 . 6 2 . 3 . 4 . 6

1 . 2 : 3 . 4 . 6

Fig. II 2ª prop. cong.

lo stesso succede nella duplicata g.d. 6.8 :: g.12. applicata al diametro ae in cui ab = 6 ac = 6. ad = g; ae = 12, ai cui termini si trova necessariamente aggiunto 4. 1º termine della proporzione congiunta 4.6.8.g.12

$\overline{an}^2 = 2ab = 6x12 = 72$

$an = \sqrt{72}$

$\div\ 6.\sqrt{72}.12$

$6.8.\sqrt{72}.g.12$

$\overline{ao}^2 = 2ad = gx12 = 108$

$ao = \sqrt{108}$

6.6.√72.9.√108.12

si prenda a4 = 4; si tiri il seno 4m e la ipotenusa am; sarà $\overline{am}^2$ = a4 = 4×12 = 48

am = √48

÷ 4 . √48 . 12

4.6.√48 . 6 . 12

6.√48.6.√72.9.√108.12

am an ao

$\overline{am}^2$. $\overline{an}^2$. $\overline{ao}^2$

48 . 72 . 108

6×8 . 8×9 . 9×12

4 . 6 . 9

ed ecco trovato nel cerchio la sequela seva continua, nata dalla moltiplica de' termini della dupla a due a due 1 ordine; ed anor qui si è trovato il termine 4., primo della proporzione congiunta

4.6.6.9.12

lo stesso succederà in tutte le altre proporzioni g.d. e nelle relative proporzioni congiunte

2°. si vuol osservare che si può ritrovare la media fra 1.12; fra 4.6.9 cioè fra i due primi termini delle proporzioni congiunte

1.12.√6.3.√72.4.√24.6

4.6.√48.6.√72.9.√108.12

am. an. ao.

Fig. IIIª 2ª prop. cong.

Sia il cerchio ANBM, il cui diametro sia diviso ne' termini

della prima proporzione
congiunta AI . AB . AC . AD . AE
ed ine 1 . 2 . 3 . 4 . 6
ed in cui, per conseguenza,
$\overline{AM}^2 : AN . \overline{AO}^2$
viene :: 6 . 12 . 24
1 . 2 . 4

Si prenda $AL = \frac{AE}{16}$, si tiri
il seno LV., e la corda AV.,
questa sarà la media fra 3.6.
fra AI . AB ; fra 1 . 2
poichè $\overline{AV}^2 = 6 AL = 16 \times 1 = 16$
$AV = \sqrt{16}$
1 . $\sqrt{16}$. 16
1 . 3 . $\sqrt{16}$. 6 . 16
adunque $\sqrt{16}$ è media fra
3 . 6 :: 1 . 2

Ora facciasi co'l diametro AB
il cerchio AmQB . Il seno
IM del cerchio magg.e parte
dal centro del cerchio
minore, e taglia in
Q la circonfa di questo.
Però AQ sarà $= \sqrt{AI^2 + IQ^2}$
$= \sqrt{3 \times 3 + 3 \times 3} = \sqrt{16}$. adunque
AQ = AV. Fatto adunque centro
in A, intervallo in Q, si
descriva l'arco di cerchio
QV, da V. si tiri il seno VL.
sarà $AL = \frac{AE}{16} = \frac{AB}{6}$.
Dalla circonfa BQA vestando
intersecato il seno IV. in m:
la ipotenusa Am è il medio
geometrico fra AB . Ac :: 2 . 3
perchè Ac è fra 1 . e . 6. Dunq;
il picciolo cerchio dà in questo
modo la prima proporz.e congiunta

AI

$\frac{14}{1\,\Omega}$
$\frac{\Omega 6}{14}$
$\frac{}{\Omega 1\,6}$

$1 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$
$3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 1\Omega \cdot 14$
$3 \cdot \sqrt{14} \cdot 6 \cdot \sqrt{54} \cdot 9 \cdot \sqrt{1\,04} \cdot 1\Omega \cdot \sqrt{\Omega 16} \cdot 14$
$1 \cdot \sqrt{\Omega} \cdot \Omega \cdot \sqrt{\Omega 6} \cdot 3 \cdot \sqrt{1\Omega} \cdot 4 \cdot \sqrt{24} \cdot 6$

$\not{b}1 \cdot \not{b}\not{b} \cdot \not{b}c \cdot \not{b}d \cdot \not{b}B$
$1 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$
$\not{b}L \cdot \not{b}B \cdot \not{b}C \cdot \not{b}D \cdot \not{b}K$

come la dava il cerchio grande.

$1 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$
$1 \cdot \Omega \cdot \sqrt{6} \cdot 3 \cdot \sqrt{1\Omega} \cdot 4 \cdot \sqrt{24} \cdot 6$
$3 \cdot 6 \cdot \sqrt{54} \cdot 9 \cdot \sqrt{1\,04} \cdot 1\Omega \cdot \sqrt{\Omega 16} \cdot 14$
$3 \cdot \sqrt{14} \cdot 6 \cdot \sqrt{54} \cdot 9 \cdot \sqrt{1\,04} \cdot 1\Omega \cdot \sqrt{\Omega 16} \cdot 14$
$1 \cdot \sqrt{\Omega} \cdot \Omega \cdot \sqrt{\Omega 6} \cdot 3 \cdot \sqrt{1\Omega} \cdot 4 \cdot \sqrt{24} \cdot 6$

ma nel passare da

$1 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$

a $3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 1\Omega \cdot 14$

allora non so che concepire la unità divisa in due rami, lo che non altera la quantità de' termini adunque questo passaggio lascia stare ciò che era innanzi.

Nell'uno, e nell'altro cerchio gli estremi sono in ses-quiplo; ma nel picciolo cerchio ciascun termine è $= \frac{1}{3}$ del corrispondente termine nel cerchio grande e così potrebbesi procedere indefinitamente.

3°. la prima proporzione congiunta è $\cdot 1 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$, alla seconda e. $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1\Omega$. Nel passare dal cerchio grande al picciolo si trova prima la propor. $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1\Omega$, e poi la prop. $1 \cdot \Omega \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$. Poiche la prima media che s'incontra nel picciolo

cerchio è Am = √6, onde sia
∴ 1 · √6 · 6 ∴ 1 · r · √6 · 3 · 6,
cioè √6 media fra r · 6
cioè della ragione fra 4 · 6
fra BB · Bc
adunque è necessario il terzo
mine A condotto da 1/3 del
diametro BB, il qual diametro
per tanto diventa · 1r ·
E ricercando il terzo mine, che
dia il mezzo geome-
trico di BB = 4, e di Bc = 6, è
necessario assegnare BL, poichè
Bm² = BA · BL = 1r × r = r4
Bm = √r4 adunque ∴ r · √r4 · 1r;
r · 4 · √r4 · 6 · 1r ·
si ritrova adunque alla
terzupla.

4° la ragione, in cui si trova
il terzo mine · 1 · della congiunta
al p° terzo mine · r · della g · d
r · 3 · 4 · 6, è dupla, come di
dupla è il vero legame
della stessa tripla r · 3 · 4 · 6
e come in dupla è il
centro composto di due mezzi
della proporz. congiunta

1 · r · 3 · 4 · 6
r · 3 · 4 · 6 | 3 · 4 · centro semplice
1 · r · 3 · 4 · 6 | r · 3 · 4 · centro composto
r · r · 3 · 6 | r × 6 = 3 × 4
1 · r · 3 · 4 · 6

Data la combina geometrica
1 · r · 4 · 8, e l'obverso 6 si riduca a
1 · r · 4 · 6, e riportata la sesquiseconda
1 · r · 3 · 4 · 6 · giovendo fra r · 4 6
il mezzo

il mezzo $\sqrt{3}$, si forma la
proporzione congiunta
$1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot 6$
e risaltano i due mezzi
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4$, i cui estremi $\sqrt{4}$
sono in ragion doppia
similmente data la geome-
trica continua
$4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 13\frac{1}{2}$
segnato l'ultimo in $\sqrt{n}$
in sesquiottava
$4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sqrt{n}$
si trasporti la sesquiotta
al mezzo 9. in 8. si ha
$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \sqrt{n}$
proporzione congiunta
e risaltano i due mezzi
$6 \cdot 8 \cdot 9$ fra gli estremi
$4 \cdot \sqrt{n}$; gli estremi $6 \cdot 9$
sono in sesquialtera
come lo sono $6 \cdot 9$; $8 \cdot \sqrt{n}$.
ma $1 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 6$. dà $1 \cdot 8$. come
il cubo di uno al cubo
di $\sqrt{2}$; e $4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 13\frac{1}{2}$; dà
$4 \cdot 13\frac{1}{2} :: 4^3 \cdot 6^3 :: 64 \cdot \sqrt{n}16$
poiche $4 \times \sqrt{n}16 = 864 =$
$13\frac{1}{2} \times 64$
e dalla pr. $1 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot 6$. nasce
$1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4 \cdot 6$; dalla rda
$4 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 13\frac{1}{2}$; nasce
$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot \sqrt{n}$.
dunque il cerchio
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 4$, come pure
$6 \cdot 8 \cdot 9$. è un cerchio
che appartiene, o si deduce
dal cubo.

5. In queste proporzioni congiunte ora dimostreremo esservi il progresso circolare dalla duplа come principio, dalla tripla come mezzo, dalla sestuplа come fine, ed esservene, e ciò in virtù de' n.i quadrati dipotti p serie.

Per dimostrar questo sia la serie delle proporzioni congiunte fino al decimo 6. come radice di numero quadrato, non della p.a, ma della 2da serie

p.a serie	2da serie
1. 2. 3. 6	2. 3. 4. 6
4. 6. 8. 12	6. 8. 9. 12
9. 12. 15. 20	12. 15. 16. 20
16. 20. 24. 30	20. 24. 25. 30
25. 30. 35. 42	30. 35. 36. 42

congiunte di doppio carattere

1. 2. 3. 4. 6
4. 6. 8. 9. 12
9. 12. 15. 16. 20
16. 20. 24. 25. 30
25. 30. 35. 36. 42

vi sono sempre nelle congiunte due numeri quadrati, uno de' quali è sempre primo decimo della proporz.e congiunta, ed è relativo alla prima serie delle proporzioni g.d. e l'altro n.o quadrato è relativo, e sempre medio aritmetico della 2da serie delle proporz.i g.d. co' mezzi, uno armonico, e l'altro aritmetico.

Quando

Quando adunque l'assegnazione della serie delle proporzioni congiunte fino al termine 6. come radice quadrata, si dice non della prima, ma della 2da serie; si vuol dire in sostanza che, dati i numeri dell'aritmetica serie 1. 2. 3. 4. 5. 6. ed inoltre tutti come radici quadrate: relativamente si assegni la serie delle proporz. congiunte, cosicchè in queste siano inchiusi, e consumati tutti i numeri quadrati 1. 4. 9. 16. 25. 36 quadrati da 1. 2. 3. 4. 5. 6. ed allora la compita la serie quando si trova 36. ultimo quadrato, il quale di propria natura appartiene alla 2da serie delle proporzioni q. d., perchè si trova entro aritmetico della ragione 5. 7. sub-par. 2da

30. 33. 36. 42

i di cui estremi sono

30. 42 :: 5. 7.

Sarà adunque la serie delle proporz. congiunte

1. 2

1. 2. 3. 4. 6

4. 6. 8. 9. 12

9. 12. 15. 16. 20

16. 20. 24. 25. 30

25. 30. 35. 36. 42

55. 70. 83. 90. 110

11. 14. 17. 18. 22

di questa serie si sommino le colonne, e si osservi, che tutte le somme risultano divisibili p. 5. il che non risultando nè dalle somè di meno, nè di più di cinque proporzioni. Il n°. 5. è radice quadrata di 25., primo termine dell'ultima proporzione congiunta. Il n°. 25. risulta dalla forma sesquialtera $2+3=5$, la quale costituisce il censo della p^a. proporzione della p^a. serie 1.2.3.5 e della quale sesquialtera, ridotta a proporz. g.d. ia no. 24. 25. 30, è mezzo aritmetico il quadrato 25

Che poi rispetto ai numeri quadrati come mezzi aritmetici delle relative proporz. g.d., debba intendersi, che nella loro radice siano formati dalla somma de termini costituenti proporzioni, di cui sono mezzi, è dimostrato di fatto Poichè, data la forma 1.2., la somma de' due termini è 3, il di cui quadrato è 9., ch'è mezzo aritmetico della dupla g.d. 6.8.9. in. Data la forma 2.3, la somma de' termini è 5. il cui quadrato è mezzo aritmetico della sesquialtera g.d. no. 24. 25. 30

ma nuovamente

ma ricorriamo alla somma
delle proporzioni congiunte
Egli è un fatto, che gli estremi
delle somme 55. 110. ritrovano
in dupla, e che non succe-
de, nè può succedere
in infinito, tornando maggiori
e minori numeri di propor.
congiunte
Egli è pure un fatto che
ciò succede precisamente nelle
radici dupla. 30. 42 :: 5. 7,
ridotte a proporz. g.d. Ma
questa è l'ultima proporz.
è parimenti un fatto che ridotte
le somme ai numeri primi
11. 14. 17. 18. 22., la somma
totale di questi termini
è = 82. che è il preciso
merc. contrario del centro
formato dai merci
6. 9. 10
della dupla g.d. ridotta
a prop. g.d. determinata
dai tre merci, comico, antimo,
e contrarmonico in
70. 60. 81. 82. 90
dunque non solamente
rispetto alle somme si trova
la dupla negli estremi
55. 110, ma in oltre si trova
il centro della dupla della
somma totale 82., e si
trovano le radici della
dupla nella ultima proporz.
30. 35. 36 42 | 30. 42 :: 5. 7

determinante la somma
ma la progressione de' qua-
drati in quest'ultima pro-
porzione, si trova in tri-
pla, rispetto alle radici
quadrate 1.2.3.4.5.6
1.4.9.16.25.36
ed il risultato è la proporzione
tripla, non solamente fra
gli esponenti delle somme
55.110., ma ancora nelle
radici 5.7, e nel centro
della tripla 8.9.10.
Non vi è altra differenza
se non che la tripla risulta
negli esponenti delle somme
55.110. come la terzupla
negli esponenti delle radici
3ª (1.6) de' quadrati, e real-
mente la tripla è fine
nelle somme, come la
terzupla è principio
nelle proporzioni con-
giunte
È un fatto che il denaro
55. somma della 9ª colonna
al denaro 70. somma
della 10ª colonna è in
ragione di 11.14 che è di
cerchio inscritto a quadrato
circoscritto: cosa impossibile
ad aversi in serie maggiore
o minore della terzupla
ed il rapporto all'ultimo ::
14.22 come quadrato inscritto
7.11
a cerchio circoscritto

onde

Onde solo nella seconda si trova formata, e compita la vagione indicante la natura circolare sì nel suo principio, che nel suo compimento. Ma si divà in . 11 . 14 . 22 . si rileva la natura circolare, ma essa non si rileva in . 17 . 18 . & che adunq. servono questi, a che significano?

Si sommino 17+18, si ha 35 = 5×7 ; e 5 . 7 . è la forma dell'ultima propovd. g.d. della 2da serie 30 . 35 . 36 . 42 . di cui estremi 30 . 42 :: 5 . 7 . Si sommino i due pri. 11+14 = 25 ; ma 25 . 30 . 35 . 36 . 42 . è la ultima propovd. congiunta

17 . 18
6×9 . 9×9 :: 8 . 9

17 . 18 radici di 8 . 9 cerco della dupla.

14 . 17
7×7 . 9×9 :: ~~2006~~ 49 . 81 medieta

di 42 . 48 :: 49 . 56 | estremi 42 . 56 :: 6 . 8 :: 3 . 4
72 . 80 :: 81 . 90 | 72 . 90 :: 12 . 15 :: 4 . 5

18 . 22 :: 9 . 11 :: 4×5 . 5×6 :: 4 . 6 :: 2 . 3

Osservaz.ne VI.

Di un'altra serie di proporzioni, e quelle Biometriche descrive co' mezzi armonico, ed biometrico.

Lemma

I. Prsi a piacere due numeri a. b: dico che la loro somma è uguale alla differenza de' loro quadrati, divisa per la differenza di detti numeri, cioè

$$a+b=\frac{bb-aa}{b-a}=d$$

Poichè invece del n.° magg.re b. posso il minore più la differenza de' numeri, sarà $a+a+d=\overline{a+d}^{a}-aa$

$$2a+d=\frac{aa+2ad+dd-aa}{}$$

$$=\frac{2ad+dd}{}$$

$$=2a+d$$

Covollario

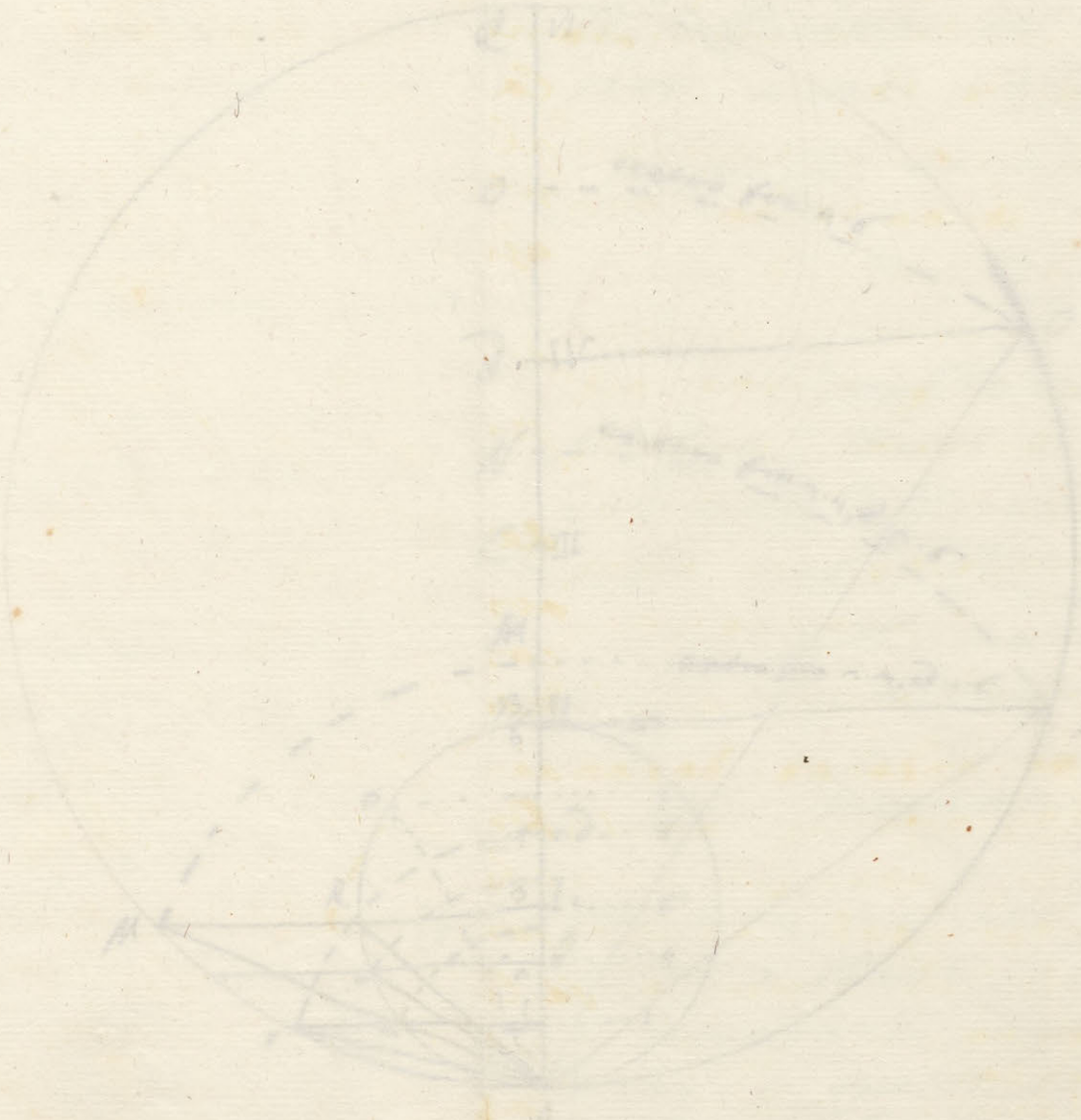
Se fra i dati numeri vi corresse differenza 1., sarebbe $a+b=\frac{bb-aa}{1}$, e però

$$a=bb-aa-b$$

e $\quad b=bb-aa-a$

Teorema

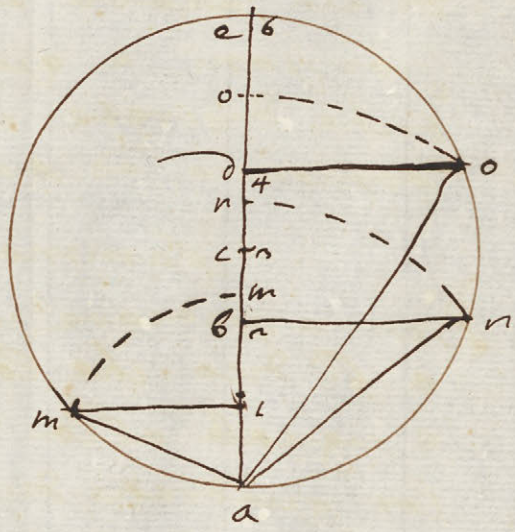
II. Dati due numeri, fra i quali vi differenza 1.ª dico che se si sommavano insieme i n.i dati, e questa somma si moltiplicherà per i numeri dati, il prodotto



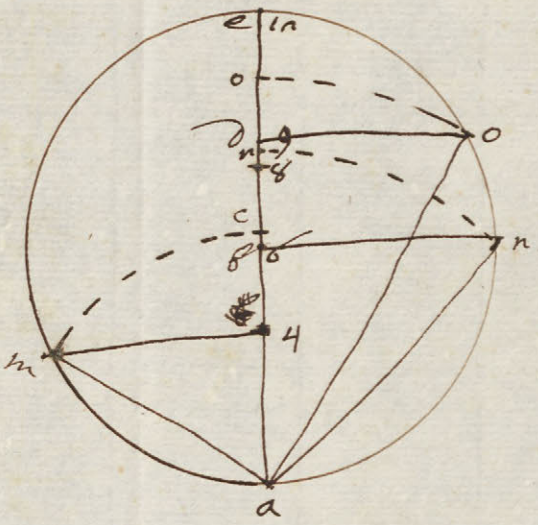
il prodotto della somma
$\frac{1}{2}$ il p°. dato numero, sarà
il p°. estremo; ed il prodotto
della somma $\frac{1}{2}$ il 2do n°.
dato, sarà l'altro estre-
mo di una proporzione
aritmetica discreta. Il p°.
estremo poi, aggiunto
al p°. numero dato, sarà
il medio armonico della
proporzione. ed il p°.
estremo stesso, aggiunto
al 2do n°. dato, sarà
il medio contrarmonico
della proporzione med^ma.
siano. a. b. i due n°. dati,
la somma. a+b. si molti-
plichi $\frac{1}{2}$ il p°. e $\frac{1}{2}$ il 2do
n°., e si avranno gli
estremi $a \times a+b$ $b \times a+b$
$aa+ab$ $ab+bb$
Al p°. estremo, aggiunto
prima. a. e poi. b., si avrà
$aa+ab+a$; $ab+bb+b$
de' quali il p°. sarà medio
armonico, ed il 2do, medio
contrarmonico fra quegli
estremi. Ecco tutta la proposiz^e
$aa+ab$. $aa+ab+a$. $ab+abb$. $abbb$
1. Provo in primo luogo
che $aa+ab$. $aa+ab+a$. $ab+bb$
sono in armonica proporz^e.
Se lo fossero, sarebbe il
p°. termine al n°. come
la differenza fra il p°. ed il
2do alla differenza fra il 2do, ed il 3°.

Proporz.ni congiunte

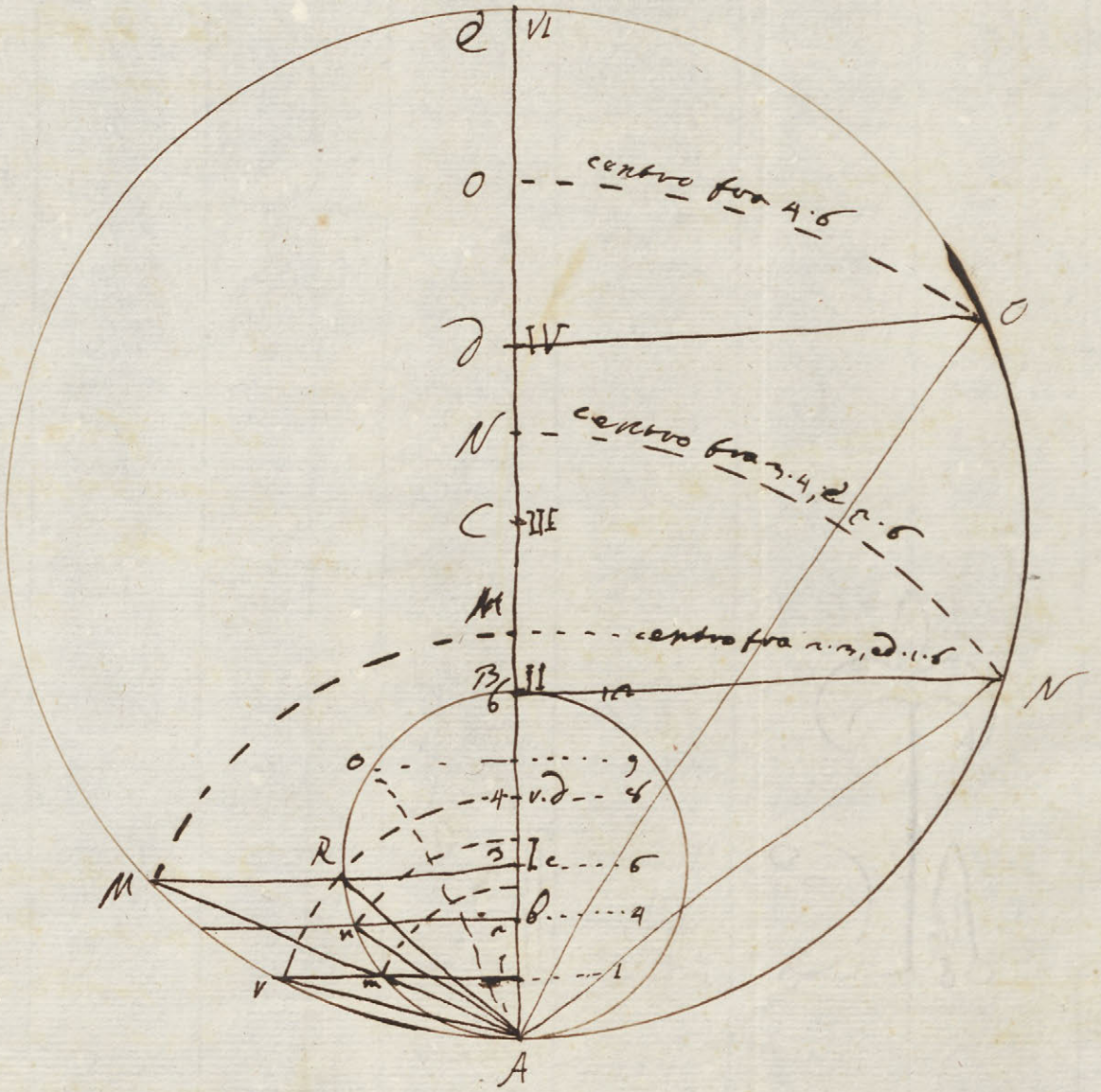
I

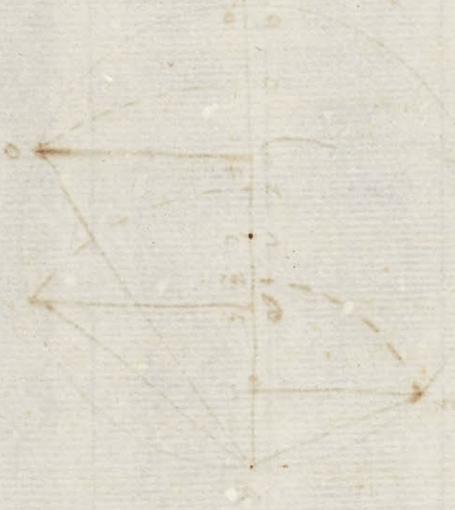


II



III.





il produtto della somma
ff il p°. dato numero, sarà
il p°. estremo; ed il produtto
della somma ff il 2do n°.
dato, sarà l'altro estre-
mo di una proporzione
armonica discreta. Il p°.
estremo poi, aggiunto
al p°. numero dato, sarà
il medio armonico della
proporzione. ed il p°.
estremo stesso, aggiun-
to al 2do n°. dato, sarà
il medio contrarmonico
della proporzione med^ma.
siano. a. b. i due n°. dati,
la somma. a+b. si molti-
plichi ff il p°. e ff il 2do
n°. e si avranno gli
estremi a×a+b b×a+b
aa+ab ab+bb
Il p°. estremo, aggiuntovi
prima. a. e poi. b., darà
. aa+ab+a ; ab+bb+b
de' quali il p°. sarà medio
armonico, ed il 2do, medio
contrarmonico fra quegli
estremi. Ecco tutta la proposiz^e
aa+ab. aa+ab+a. ab + abb. abbb
1. Provo in primo luogo
che aa+ab. aa+ab+a. ab+bb
sono in armonica propor^e.
Se lo fossero, sarebbe il
p°. termine al n°. come
la differenza fra il p°. ed il
2do alla differenza fra il 2do, ed il n°.

cioè aa+ab . ab+bb :: a . bb-aa-a

a . b :: a . bb-aa-a

dunque sarebbe b = bb-aa-a

ma così è infatti il covoll°. del Lemma precedente. Dunq. il p°., rdo, e 4°. termine della proporzione aritmetica, sono in armonica proporz°. Lo che in p°. luogo si voleva dimostr.

2°. Trovo in rdo luogo che

aa+ab . aa+ab+b . ab+bb

sono in contrarmonica proporzione.

Se lo fossero, sarebbe il 3°. termine al p°. come la differenza fra il p°. ed il rdo sta alla differenza fra il rdo, ed il 3°. cioè. ab+bb . aa+ab :: b . bb-aa-b

b . a :: b . bb-aa-b

adunque sarebbe a = bb-aa-b

Ma così è a il covoll°. del Lemma precedente. Adunque il p°., 3°., e 4°. termine sono in contrarmonica proporzione.

3°. è superfluo l'osservare che

aa+ab . aa+ab+a . aa+ab+b . ab+bb

è una proporzione aritmetica discreta, poichè la somma degli estremi è uguale alla somma de' mezzi.

$$\frac{aa+ab}{aa+2ab+bb} = \frac{aa+ab+a}{+aa+ab+b} \quad \frac{2aa+2ab+a+b}{} = \frac{aa+2ab}{+aa} \quad \frac{+a+b}{}$$

Mo

ma $bb = aa+ab$
$= aa+a+a+1$
$= aa+2a+1$
$= \overline{a+1}^{q}$

adunque la somma degli estremi è eguale alla somma de' mezzi; adunque la proporzione è armonica.

Inoltre fra il p°. e 2do termine $aa+ab$. $aa+ab+a$ vi corre la differenza a, e fra il 3°. ed il 4°. vi è la differ.a $ab+bb$
$-ab \quad -aa-b =$
$= bb-aa-b = a$
come si è provato nel corollario del Lemma.

Adunque se favò quanto prescrive il Teorema, avrò una proporz.e aritmetica discreta co'l mezzo armonico, e col mezzo contrarmonico, lo che si voleva provare.

III°. Giova osservare in queste proporzioni 1°. che gli estremi di esse 3.6.10.15.21.28 convengono in ragione con le differ.e inverse della armonica serie. 2°. la somma degli estremi e de' mezzi sono i pretti numeri quadrati 9.25.49 &c de' numeri 3.5.7. &c 3°. I loro mezzi sono armonico e contrarmonico; le quali

$1^{\frac{1}{1}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$
60.30.20.15.12.10
differ.e 30.10.5.3.2
1.3.6.10.15

3.4.5.6
10.12.15.15
21.24.25.26
36.40.41.45
55.60.61.66 &c

condizioni nè sole, nè unite non l'incontrano in qualunque altro combinazione di proporzioni aritmetiche discrete.

IV. Nascono ancora queste aritmetiche discrete proporzioni da quelle geometriche discrete, che hanno i termini pari, fuorchè il medio aritmetico. In esse si ommetta questo, e si prenda la metà de' termini pari, e ne risultano queste proporzioni aritmetiche discrete, nelle quali la somma degli estremi è eguale alla somma de' mezzi, e queste somme sono tutte son numeri quadrati de' numeri dispari. 3. 5. 7. come poco sopra abbiamo osservato.

6 · 8 · 9 · 10 · 12	3 · 4 · 5 · 6 | 1 · 2
20 · 24 · 25 · 26 · 30	10 · 12 · 13 · 15 | 2 · 3
42 · 48 · 49 · 50 · 56	21 · 24 · 25 · 28 | 3 · 4
72 · 80 · 81 · 82 · 90	36 · 40 · 41 · 45 | 4 · 5

3 + 6 = 9 = 4 + 5
10 + 15 = 25 = 12 + 13
21 + 28 = 49 = 24 + 25
36 + 45 = 81 = 40 + 41

I componenti de' primi estremi sono i numeri naturali

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6
3 · 5 · 7 · 9 · 11 · 13

1×3 · 2×5 · 3×7 · 4×9 · 5×11 · 6×13
3 · 10 · 21 · 36 · 55

I componenti degli ultimi estremi sono gli stessi numeri naturali

2 · 3 · 4 · 5 · 6
3 · 5 · 7 · 9 · 11

2×3 · 3×5 · 4×7 · 5×9 · 6×11
6 · 15 · 28 · 45 · 66

Le ragioni

Le ragioni che passano fra gli estremi sono le primitive forme di ragione 1.2; 2.3; 3.4; 4.5 poichè 3.6 :: 1.2
10.15 :: 2.3
21.28 :: 3.4 &c

I mezzi rispettivi di 3.6 sono 4 arm. 5 geom.
10.15 12.18
36.45 40.41
55.66 60.61

V. La legge degli estremi che costituisce queste proporzioni che sembrano disgiunte, ma non sono, essendo
6.10 :: 3.5
15.21 :: 5.7
28.36 :: 7.9 &c:
dimostra la necessaria loro congiunzione nella serie intiera degli estremi 3.6.10.15.21.28.36.45. costituita in legge continua dalle ragioni dispari, e pari; dovendosi ripporre la unità come principio di detta serie

VI. La somma rispettive de termini di ciascuna proporz. sono il doppio d'un numero quadrato de' n.i impari.
3+4+5+6= 18 9.3
10+12+13+15= 50 25.5
21+24+25+28= 98 49.7
e così sempre. La serie indefinita
la serie

la serie di questi quadrati essendo . g . rs . 49 . 81 . &c , e rilevandosi . g . diviso in rs 6 . dagli estremi , in 4 . 5 . dai mezzi della 2da proporzione rs . 4 . 5 . 6 ; e così . rs . diviso in 10 . 15 , dagli estremi , e in 12 . 13 dai mezzi della 2da proporz.ne 10 . 12 . 13 . 15 ; e lo stesso rilevandosi in ~~ogni~~ altra serie indefinita : si vede che i n.i quadrati non dipendono dalla sola radice loro , moltiplicata in se stessa . perchè se ~~g~~ es . rs . è la radice quadrata di . g . ch.e è il mezzo aritmetico della dupla g . d . 6 . 6 . g . 10 . 12 : anteriore però a questa proporz.ne già esisteva nell' aritmetica serie de' n.i naturali la proporzione rs . 4 . 5 . 6 , e però il mezzo aritmetico . g . della dupla g . d . ugualmente può aversi dalla radice . rs . che dalla somma di rs + 6 , e di . 4 + 5 . Parimenti se . 5 . è la radice quadrata di . rs . ch.e è il mezzo aritmetico della seguente g . d . 10 . 14 . rs . 36 anteriore però a questa proporzione già esisteva nell' aritmetica serie la proporz.ne 10 . 12 . 13 . 15 , e però il mezzo

il mezzo aritmetico della sesquialtera ugualmente può aversi dalla radice 5., che dalla somma 10 + 15 e di 12 + 13; è lo stesso si dica di tutte le serie indefinita

Si osservi in oltre, che il N°. Caffo. 3. è la somma de' termini della forma triplicata 1 . 2., ed il quadrato della radice 3., ch'è 9. si trova mezzo aritmetico degli estremi 8 . 12 :: 1 . 2.

Il numero Caffo. 5. è la somma de' termini della forma sesquialtera 2 . 3., ed il quadrato della radice 5., ch'è = 25. si trova mezzo aritmetico degli estremi 20 . 30 :: 2 . 3

e così la serie indefinita

VII. Da questa verità di fatto risultano due conseguenze. L'una si è che gl'impari 3. 5. 7. &c sono realmente composti dalla somma de' termini delle semplici forme 1 + 2; 2 + 3; 3 + 4 &c e però ciascuno degl'impari è legno caratteristico della semplice forma, dalla somma de' cui termini è composto esso numero Caffo.

L'altra si è che non dando in questo senso il N°. ove

se anderiormente non si supponga la 1ª forma radicale 1·1·n· e così non darebbe il nº 5. se anderiormente non si supponga la 1ª forma sequialtera ecc. dunque le semplici forme sono anteriori ai loro numerici caratteristici segni, i quali sono come vesti di quell corpo, o [illegible] sono corpi di quello spirito. Se poi si chiegga di qual natura debbano intendersi i numeri esponenti le prime forme 1·n; n·3; 3·4 &c se semplici, o composti, se originali, o derivati: si risponde, che derivano essenzialmente dall'armonica serie 1·1/n·1/3 1/4·1/5·1/6 &c e per derivazione dall'ordinaria serie 1·n·3·4·5·6. della qual cosa si tratterà in altro luogo

IIII Qui accenneremo solamente che data l'armonica serie

1·1/n·1/3·1/4·1/5·1/6

ossia ·60·30·20·15·12·10

sommati a serie i termini numerici di ciascuna ragione

1+1/n · 1+1/3 · 1+1/4 · 1+1/5 · 1+1/6 ossia

60+30 · 60+20 · 60+15 · 60+12 · 60+10

90 · 80 · 75 72 · 70

9·8 | 10·15 | 12·12 | 35·35

la inversa summola replica

ragione

vazione 6.9. corrisponde il centro degli spostamenti reddigli in 6.6.9.10

la inversa 15.16. corrisponde il centro degli spostamenti 10.20. in 10.15.15.16.20

la inversa 24.25. corrisponde il centro degli spostamenti no. 30 in 20.24.25.30.

la inversa 35.36. corrisponde il centro degli spostamenti 30.40 in 30.35.36.40

di più ove trattenemo del 3° suono, si vedranno le prime numeriche forme 1.2; 2.3; 3.4 nate dall'armonica unità, da cui sono determinabili i numerici determini reddetti, come segni caratteristici di dette forme, e come indipendenti dall'arbitrio, e dalla disegnazione umana

IX Ritornando ora alle proporzioni aritmetiche discrete ed armonico, e contrarmonico, di cui abbiam parlato finora, e la cui formazione abbiam esposta nel Teorema della osservazione VI: osserveremo ch'esse dipendono essenzialmente dalle semplici numeriche forme di ragione 1.2; 2.3; 3.4; 4.5 &c. sono in definita, e però sono armoniche alle proporzioni geometriche discrete, di cui abbiamo

tanto parlato in questo, e nel precedente libro; le quali avendo la loro forma in ove seminini; è chiaro che se la forma delle proporzioni aritmetiche dipende, di cui ora trattiamo dipende da una sola ragione, e la forma delle proporzioni g.d. dipende da due ragioni, cioè da una proporzione: quelle sono anteriori a queste, perchè quelle sono semplici e queste composte

Proporzioni aritmetiche d.

1.r | 1+r=3	3×1. 3+1. 3+r. 3×r	
	3. 4. 5. 6	
r.3 | r+3=5	5×r. 10+r. 10+3. 5×3	
	10. 1r. 13. 15	
3.4 | 3+4=7	7×3. 11+3. 11+4. 4×7	
	11. 14. 15. 16	
4.5 | 4+5=9	9×4. 36+4. 36+5. 9×5	
	36. 40. 41. 45	

Proporzioni g.d.

1.r.3 forma di r.3::4.6	
r.3.4	6.8::9.12
3.4.5	12.15::16.20
4.5.6	20.24.25.30
5.6.7	30.35.36.42

x. Nelle proporzioni aritmetiche, di cui ora trattiamo, è inassegnabile il mezzo aritmetico, perchè non potrebbe assegnarsi, se non in frazione, e le frazioni non han luogo nell'aritmetica serie, di cui la unità è la minima quantità, presa per misura di tutte le altre; lo che non sarebbe, se ti ammettessero frazioni, perchè allora la frazione sarebbe essa la minima

la minima quantità, e la misura di tutte le altre.
Chi vi ponesse la media proporzionale aritmetica; levando poi le frazioni, la proporz. aritmetica discreta có mezzi armonico, e contrarmonico, si convertirebbe in proporz. g.d. có mezzi armonico, aritmetico, e contrarmonico

3 . 4 . 5 . 6
3 . 4 . 4½ . 5 . 6
6 . 6 . 9 . 10 . 15

10 . 15 . 13 . 15
10 . 15 . 15½ . 13 . 15
20 . 24 . 25 . 26 . 30

21 . 24 . 25 . 30
21 . 24 . 24½ . 25 . 25
42 . 48 . 49 . 50 . 56.

x1 Si osservi di più nella serie delle aritmetiche discrete sopraccennate 3 . 4 . 5 . 6
10 . 15 . 13 . 15
21 . 24 . 25 . 26
36 . 40 . 41 . 45
55 . 60 . 61 . 66 &c
che la somma del 2do estremo della prima col primo estremo della 2da fanno 6+10=16=4c la somma del 2do estremo 15 della 2da con pº 21 della 3ª fanno 15+21=36=6c &c
Sicchè da esse proporzioni si hanno tutti i quadrati de' n.i caso 9 . 25 . 49 &c come abbiamo osservato di sopra, e tutti i quadrati

de ni pari come osserviamo

3+6=9=4+5	6+10=16=4²
10+15=25=12+13	15+21=36=6²
21+28=49=24+25	28+36=64=8²
36+45=81=40+41	45+55=100=10²

onde ecco sempre i quadrati tutti formati, e sono dai termini di queste proporzioni

XII Si osservi ancora che la ragione fra il quadrato inscritto, ed il cerchio circoscritto è di 7. 11. fra Archimede. dividasi 7. in 3. 4. ed 11. in 5. 6., le due ragioni fanno con la serie de' loro termini

3. 4. 5. 6

che sono i precipi della prima proporzione della sovraposta serie. Ecco adunque risolta la detta ragione 7. 11. nella suddupla 3. 6, divisa dai due mezzi armonico, e contrarmonico con la esclusione del mezzo aritmetico. Dalla dupla, e dalla sesquialtera è costituita la tripla

1. 2
2. 3
1. 3 :: 4. 6 :: 1. 3

Nella prima di queste proporzioni aritmetiche dispersa

3. 4. 5. 6

si hanno gli estremi suddupli, e da questa si pone di 3+4=7, e di 5+6=11. Si avrà la ragione di Archimede del quadrato inscritto al cerchio

circoscritto

circoscritto. Nella 8da propor.
10 . 12 . 13 . 15
si hanno gli estremi 2ª, e 3ª equidistanti
e da questi si potrà si ha
10+12 = 22 ; e 13+15 = 28
ma 22 . 28 :: 11 . 14; ch'è la ragione del cerchio al quadrato circoscritto.
omesso di dire che, posta la tripla
2 . 3 . 4 . 5 . 6
la somma de' mezzi 3+4+5 = 12
e degli estremi 2+6 = 8
moltiplicate insieme danno
8 x 12 = 96, numero de' lati del poligono, di cui si è servito Archimede per ritrovare la ragione fra il diametro, e la circonferenza.
Inoltre presi 7 . 11 . 14, e formati
7+11 = 18, ed 11+14 = 25 : si trova che il nº pari 18 è divisibile in 9 . 9. ed il nº caffo 25 è divisibile in 12 . 13 . che sono i due mezzi, armonico e contr'armonico della propor. 10 . 12 . 13 . 15
la radice di 9 è = 3, e la radice di 25 è = 5. ma 3 . 5 . sono i due mezzi, armonico, e contr'armonico della tripla 2 . 3 . 4 . 5 . 6; da cui si è dedotta la ragione di Archimede 7 . 11; perche
2 . 3 :: 4 . 6
3+4 = 7
2+3+6 = 11
di più 3 . 5 ., numeri caffo,

sono le somme de' termini della suddupla 1+2=3, e della sesquialtera 2+3=5
e di fatto 9 è il medio armonico della dupla co' medii determinati 6.8.9.10.12, e 15. è il medio armonico della sesquialtera 20.24.27.26.30
Egli stessi termini 3.5 (divisi in 1.2., 2.3.) sono le prime radici di razione tripla, poichè 1x2=2; 2x3=6; e 2.6::1.3
Non è adunque una fortuita combinazione il ritrovarsi la natura circolare nelle suddette due prime proporzioni gli estremi delle quali sono come 1.2., 2::2.3.
Anzi se fosse alcuna difficoltà l'aggiugnere il medio contrarmonico 5. nella tripla 2.3.4.6, da cui si è dedotta la razione di Archimede 7.11 ~~dell'inverso~~ che senza la introduzione del medio contrarmonico 5: si avverta che tanto si ha il numero 11. dalla somma della tripla armonica (6+3+2=11) quanto dalla somma del medio contrarmonico 5. col 2do estremo 6. della stessa tripla si avverta di più che si dà lo stesso n°. 11. dalla somma de' due medii armonici, 3. della tripla 2.3., ed 8. della dupla 2.3.

lo che

lo che significa che si ha lo stesso dalla sripla, e dalla sestupla; perche compone le due ragioni, sripla, e dupla, delle quali sono medj armonici 3.4: la loro composta è la sestupla. 1.3
1.2
1x1.2x3::1.6

e però, come dalla somma 3+4, si ha il numero 12: così dalla somma 1+6. si ha il 7. Così infatti deve essere, poichè il legame di continuo della sestupla. 1. 2. 3. 6. essendo formato dalle due sripla 1.3; e 2.6: è chiaro che la ragione esistente nella sripla deve essere ancor nella sestupla. Perciò 24.25, cenovo della sesquialtera, è ancor cenovo della sestupla, * 20.24.25.30
1. 2. 3. 6
10. 20. 30. 60
10. 24. 25. 60
10. 20. 24. 25. 30. 60

Osservazione VII.

Alla serie delle proporzioni aritmetiche discrete co' medj armonico, e contr'armonico finora esposta, va congiunta un'altra serie regolare di semplici aritmetiche proporzioni

1·r·3; 6·8·10; 16·18·20; 30·32·34; 48·50·52; 70·72·74; 96·98·100; 126·128·130

Questa serie prova ciò due cavalieri luminosi, e sapendo 1°. Ch'esaminata la prima 1·r·3· ch'è la differenza 1., tutte le seguenti che sono la differ. r.; divise per r.; si risolvono nella serie regolare de' tre mezzi, armonico, aritmetico, e contrarmonico delle proposte 9·d·co mezzi determinati

r·4·5; 6·9·10; 15·16·17; 24·25·26; 35·36·37; 48·49·50·64·65

Il secondo è quello delle somme de' termini

1+r+3=6; 6+8+10=24; 16+18+20=54; 30+32+34=96; 48+50+52=150

Somme	6	24	54	96	150
	4		9	16	25

Il termine 6. ch'è somma della subtripla, è mistura comune di tutta la serie delle somme, riducendole alla serie de' numeri quadrati

Ma si noti 1°. che la somma 6., ch'è la mistura comune, dipende dalla differenza 1. e tutte le altre dalla differenza r. Si noti in 2do luogo che sembra che queste due serie si oppongano fra loro, perchè l'una ammette i due mezzi armonico, e contrarmonico, ma esclude il mezzo aritmetico, l'altra li contrarie ammette il mezzo aritmetico unicamente, ed esclude il mezzo armonico, ed il contrarmonico ma non si oppongono; anzi collimano a cosa

a cosa che veramente sovrende - Si espongano congiunte insieme co'l loro ordine naturale, in cui nascono nella aritmetica serie.

1.2.3 6.8.10

3.4.5.6 10.12.13.15

(3) (5)

16.18.20 30.32.34

21.24.25.26

(7)

48.50.52 70.72.74

56.40 41.45 55.60.61.66 76.84.83.91.

(9) (11) (13)

96.98.100

103.111.113.120

(15)

Nella serie proposta si osservino le radici quadrate, 3. della somma 9; 5 della somma 25 2. di cui la radice di 9 essendo 3., e la somma che forma i numeri caffo, si ha la ragione duplicata 1.2., de' cui termini la somma è = 3; e 9 è il mezzo aritmetico della dupla co' mezzi determinati 6.8.9.12. la radice di 25 essendo = 5; a questo essendo diviso in 2.3. dà la sesquialtera; e 25 è il mezzo aritmetico della sesquialtera 20.24.25.30 e così per serie infinita.

Osservazione VIII.ª

De' centri intrinseci, ed estrinseci, e delle conseguenze loro.

Sia la proporzione q. discreta

1 . r . 3 . 6

i cui estremi sono in ragione, ed i mezzi sono r . 3 che si chiamano centro della proporzione, perchè 1 × 6 = 6 = r × 3. Questo centro si chiama intrinseco perchè è chiuso fra gli estremi.

Per ridurlo ad estrinseco, bisogna convertirlo in estremi non di due termini come 1 . 6. ma di due ragioni, le quali sommate in una ragione, diano questa uguale alla ragione del centro r . 3; a questo è ciò che si vuol chiamare conversione del centro intrinseco in due centri estrinseci.

Per fare questa operazione, presi i quattro termini

1 . r . 3 . 6, ~~[illegible]~~

si sommi il p.º col rdo, e col terzo, e la ragione 1 + r . 1 + 3 :: 3 . 4, formerà il p.º de' due centri estrinseci. Dippoi si sommi il rdo, e 3.º co'l quarto, e la ragione r + 6 . 3 + 6 :: 6 . 9 . formerà il rdo de' due centri estrinseci. le due ragioni $\frac{2}{4} \cdot \frac{6}{9}$ moltiplicate insieme, danno $\frac{r4}{36} = \frac{r}{3}$ cioè r4 . 36 :: r . 3, ch.º è il centro intrinseco di 1 . r . 3 . 6.

Per render generale la dimostrazione, sia a · ab :: c · bc si facciano le operazioni qui sopra indicate, si avranno le due ragioni de' due centri esterni

$$\frac{a+ab}{a+c} \qquad \frac{ab+bc}{c+bc}$$

le quali composte danno

$$\frac{aab+aabb+abc+abbc}{ac+cc+abc+bcc}$$

e divise sopra e sotto per

$$a+c+ab+bc$$

verrebbe $\frac{ab}{c}$, che è il centro interno.

Dati questi due centri esterni di ragione si verificheranno le seguenti proporzioni

3·4 8·9

1ª. Moltiplicati fra loro i denominatori di ciascuna delle due ragioni 3·4 ; 8·9, i due prodotti 3×4 · 8×9 stanno fra loro :: 12. 72 :: 1.6 che è la ragione degli esponenti di 1.2.3.6. I due centri esterni adunque 3·4 ; 8·9 sono le radici di ragione della seguente, e questa loro facoltà nasce dal rapporto, che hanno fra loro i denominatori numerici de' due centri 3·4 ; 8·9

$$\begin{array}{l} 3\times4 \cdot 8\times9 \\ \text{cioè } 3\cdot9 :: 1\cdot3 \\ \quad 4\cdot8 :: 1\cdot2 \\ \hline 3\times4\cdot8\times9 :: 1\times1\cdot2\times3 \end{array}$$

IIª. Sommati separatamente i denominatori delle due ragioni

centrali 3+4=7; 8+9=17: de' due semini 7. 17. costituiti i due diametri BD=7, BC=17; e diviso BD=7 in BF=3, e FD=4, e condotto da F il seno FG; sarà $\overline{FG}^2 = BF \times FD = 3 \times 4 = 12$ e diviso BC=17. in BE=8, ed EC=9 e condotto da E il seno EG; sarà $\overline{EG}^2 = BE \times EC = 8 \times 9 = 72$ Dunque $\overline{FG}^2 . \overline{EG}^2 :: 12 . 72 :: 1 . 6$ Adunque la origine delle Geometriche radici lineari della Esempla, le quali si hanno ne' due seni FG. EG: si ha prima nei due numerici centri di ragione 3.4; 8.9, applicati poi ai due diametri BD. BC nel modo ora esposto.

Fig. 6

III.ª I due diametri BD=7, BC=17, che nelle lor divisioni determinano i due seni FG, EG, moltiplicati per se stessi, danno 7×7=49; 17×17=289, e dimostrano due verità Prima. che il loro quadrato sarà sempre medio aritmetico della ragione esterna centrale, ridotta a proporz. g.d. co' medi determinati armonico, ed aritmetico. Poichè il diametro BD=7. si ha dalla ragione centrale 3.4, che ridotta a proporz. g.d. co' medi armonico, ed aritmetico, sarà

3 . 4
6 . 8
6 . 7 . 8
42 . 48 . 49 . 56

8 . 9
16 . 18
16 . 17 . 18
16×17 . 16×18 . 17² . 17×18
272 . 288 . 289 . 306

savà 42 · 48 · 49 · 56 ; i di cui estremi 42 · 56 stanno :: 3 · 4 ; il mezzo armonico è = 48 , e l'aritmetico = 49 . adunque il quadrato del diametro cioè 7x7 = 49 è medio aritmetico della ragione centrale · 3 · 4 · ridotta a proporz. g.d. con i mezzi determinati

Il diametro privo de = 17 · sia dalla ragione centrale 8.9. che ridotta a proporz. g.d. con i suoi mezzi determinati, savà

172 · 166 · 169 · 306 ;

i di cui estremi 172 · 306 stanno :: 8.9 ; il mezzo armonico è = 166 , e l'aritmetico = 169 = de = 17 : adunque

La seconda verità, cioè che dai due quadrati 49 · 169 · sottratta la unità, restano · 48 · 168 · che di mezzi aritmetici che erano, necessariamente si risolvono in mezzi armonici, 48 · dello sesquiterza · 3 · 4 ; e 168 dello sesquiottava 8.9 , e ciò necessariamente , io diceva , perchè in queste proporzioni dedotte dalle ragioni di prima originale semplicità , il mezzo armonico è sempre minore, di una unità del mezzo aritmetico, come abbiamo provato nel luogo di sopra.

3 · 4
6 · 7 · 8
42 · 48 · 49 · 56

8 · 9
16 · 17 · 18
172 · 168 · 169 · 306

Convengasi da questo sottra della unità i due mezzi aritmetici nè due mezzi armonici, si verifica, che siccome i due quadrati 49. 289. non uguagliano perfettamente gli estremi esempli della propos. 1. 2. 36. e però le loro numeriche radici. 7. 17. non sono complessivi & le consecutive i due mezzi armonici. 48. 288 :: 1. 6 compiono intieramente la esempla; ma le loro radici non sono di un termine numerico, ma sono di una numerica ragione esponente, quali sono 3×4=12; 6×9=72

12. 72 :: 1. 6

6×8=48; 16×18=288

48. 288 :: 1. 6

poiche sono raddoppiati i termini delle ragioni. 3. 4. 12. 6. 8 & intrapposti il medio aritmetico. 7. & avremo la forma 6. 7. 8. ed indi la proporz. 42. 48. 49. 56; e si ha 6×8=48 mezzo armo. di 42. 4

Similmente si sono raddoppiati i termini. 8. 9. 12. 16. 18. & intrapposti il mezzo aritmetico 17, ed avremo la forma 16. 17. 18, e quindi la proporz. 272. 288. 289. 306; e si ha 16×18=288 mezzo arm^co degli estremi :: 8. 9.

IV. Si osservino ora alcune affezioni e proprietà della serie seguente di proporz.

di proporzioni g. d., e de' centri
loro

1.2.3.6 | 3.5.6.10 | 6.9.10.15 | 10.14.15.21 | 15.20.21.28 | 21.27.28.36 | 28.35.36.45 |

La prima di queste proporzioni
1.2.3.6 è perfetta, perche 1.° è
di n.° perfetto, giacchè i divisori
di 6. sono 1.2.3, e la loro somma
è = 6. 2.do perche è composta
delle due triple, aritmetica
1.2.3; ed armonica 6.3.2, l'una
e l'altra di numeri primi.
3.° Perchè è l'esemplare di tutta
questa serie, rispetto alla
proprietà delle ragioni di
centro estrinseco, le quali
si formano per somma dei lor
denomini, come si è spiegato
qui sopra. Sonati $1+2=3$
$1+3=4$
e $6+2=8$
$6+3=9$: si hanno i due
centri estrinseci 3.4; 8.9
delle due ragioni, radici della
sesquipla poiche $3\times4 \cdot 8\times9 :: 12 \cdot 72 :: 1 \cdot 6$
ma ora spiegando ulteriormente
questa proprietà, si osservi
che 3.4. è il centro intrinseco
della tripla 2.3.4.6; e che
8.9 è il centro intrinseco
della duplo 6.8.9.12; e che
questa proprietà originale
della prima proporzione si
estende a tutta la serie
Data la 2da propor.ne 3.5.6.10
Sonati con l'ordine stesso $3+5=8$
e $3+6=9$
e sonati $10+5=15$: si hanno i due
$10+6=16$
centri intrinseci, lo stesso 8.9.

della duepla, e 15.16 della sesquipla viene 3ª 12. 15. 16. 20

Così nella terza proporzione

6. 9. 10. 15

sommati 6+9=15 e sommati 15+9=24

6+10=16 15+10=25

si hanno i due centri intrinseci, lo stesso dell'antecedente 15.16; ed il centro della proporzione sesquialtera. 20. 24. 25. 30 e così la serie infinita

Osservando la identità de' due centri di ragione estrinseci, ed intrinseci nelle due diverse proporzioni; e le due ragioni 3.4; 8.9. producendo la sestupla completa, a differenza de' tre termini sommati 3+4=7; 8+9=17, i quali producono 49. 289. con la unità di più rispetto al prodotto delle due ragioni 48. 288, ch'è la sestupla completa: sembra impossibile che alla lineare quantità irrazionale possa assegnarsi altro principio primo, che questi centri di ragione.

Il fatto si è che la serie di tutte queste proporzioni corrisponde a questo principio: poichè sommati i due termini del centro 8+9=17. e del centro 15+16=31. e quadrati questi n.i 17. 31; ne viene 17×17=289; e 31×31=961 e sottratta poi dal due prodotti la unità, restano 288. 960 :: 3. 10 ma di fatto

3 · 10
6 · 10
6 · 13 · 10
78 · 120 · 169 · 1260
78 · 1260 :: 3 · 10
10 / 3
780 / 780
12 × 39 · 12 × 60 12 × 130
39 · 60 · 130
39 · 130 :: 60 − 39 · 130 − 60
:: 21 · 70
3 · 10 :: 3 10

ma di fatto le due ragioni de' cenori 6×9 = 72 ; 15×16 = 240 producono 72 · 240 :: 3 · 10
e così s'intenda di tutta la altra indefinita serie
Perchè poi queste proporzioni non dipendono da mezzi determinati: Giova vedere se siano per se di principio primo, o se dipendano da un principio anteriore. La proprietà della somma dei loro termini dimostra che dipendono dalla serie
1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21 · 28 &c
la quale dipendendo dalla serie inversa delle armoniche differenze (come n'è stato volte provato) si conclude che queste proporzioni ugualmente che le altre tutte, si risolvono nell'armonica natura di quantità, che è l'uno in se stesso, come in loro principio essenzialmente, ed assolutamente primo. Ecco il fatto

1 + 2 + 3 + 6 = 12 ; 3 + 5 + 6 + 10 = 24 ; 6 + 9 + 10 + 15 = 40 ; 10 + 14 + 15 + 21 = 60 ; 15 + 20 + 21 + 28 = 84
21 + 27 + 28 + 36 = 112

Somma 12 · 24 · 40 · 60 · 84 · 112 &c. dis.
1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21 · 28
la natura di queste proporzioni ne' loro rispettivi esponenti cenori 3 · 4 ; 6 · 9 della prima, che è la seconda, fa vedere che 3 · 9 da la ragione quintupla ; e 4 · 6 la seddupla
compone le due ragioni 1 : 2 / 1 : 3 la ragione quintupla
12 · 20 × 3 :: 1 · 5

Della 2da i due cenori essinsen
sono 6.9; 15.16; 8.16 e in duepla,
9.15 :: 3.5. Componse le vagioni
1.2
3.5
1x3.2x5 :: 3.10
si ha necessariamente la vagione
degli esoremi di detta propors.
3.10.
Della 3a. i due cenori sono
15.16. e 24.25
ma 15.25 :: 3.5
e 16.24 :: 2.3
componendole 2x3. 3x5 :: 6.15 &
Indi per corollario, assegnando
i diametri, per aueve da
queste vagioni la lineare
quantità irrazionale delle
radici delle vagioni costituite
dagli esoremi di queste pro=
porzioni; sarà vero che dai
due diametri determinati
3+4=7; 8+9=17, si avranno
le radici lineari della sesquia
nei due seni, 17.15
dedotti dal primo
o sia centro di congiunzione
di 8B.BD, e di AC.CC, i quo=
drati 3.4 delle quali 8.9 radici, cioè
de' seni saranno in sesquia
3x4. 8x9 :: 12.72 :: 1.6
E così pure sonati i determini
de' due cenori 8+9=17; ed
15+16=31, dai due diametri
17.31. con la stessa operazione
si avranno nei due seni
le radici lineari della vagione
degli esoremi 3.10; poiche 8x9
15x16 :: 72.240 :: 3.10

Fig. 5

Altra serie

V.

Nuova serie di cenori esprimenti di vagione, e sue proprietà.

5·6 · 9·10 ; 14·15 · 20·21 ; 27·28 · 35·36 ; 44·45 · 54·55

5+6 9+10 — 14+15 · 20+21 — 27+28 · 35+36 — 44+45 · 54+55

11 19 — 29 41 — 55 71 — 89 109

Radici di vagion tripla — Rr di vagione doppia — Rr di 3·5 — Rr sesquialtere

5×6 9×10 — 14×15 · 20×21 — 27×28 · 35×36 — 44×45 · 54×55

30 · 90 — 210 · 420 — 756 · 1260 — 1980 · 2970

1 · 3 — 2 · 4 — 5 · 7 — 9 · 11

65·66 · 77·78 ; 90 · 91 · 104·105

65+66 · 77+78 — 90+91 · 104+105

131 155 — 181 209

Rr di 5·7 — Rr sesquiterze

65×66 · 77×78 — 90×91 · 104×105

4290 · 6006 — 8190 · 10920

5 · 7 — 9 · 11

11 · 19 · 29 · 41 · 55 · 71 · 89 · 109 · 131 · 155 · 181 · 209 ·

Questa serie ha un legame con la precedente nei cenori dedotti dalla media, che con gli stessi co' cenori delle proporzioni geometriche dicevasi con i mezzi determinabi. Si espongono qui sotto a confronto per rilevarne il legame

3·4 · 8·9 · 8·9 · 15·16 · 15·16 · 24·25 · 24·25 · 35·36 · 35·36 · 48·49

5·6 · 9·10 · 14·15 · 20·21 · 27·28 · 35·36 · 44·45 · 54·55 · 65·66 77·78

3·5 | 48·49 · 63·64

4·7 | 90·91 · 104·105

5·9

6·11

7·13

8·15

La serie di questo legame si trova nel 1° termine di questi cenori; e capo di questa serie sono i due n. 3·5. Dai questi due primi si dividano i secondi 8·14 e 24; i terzi 15·27 e 35; i quarti 24·44 e 48; i quinti 35; i sesti 63

3·5
4·7
5·9
6·11
7·13
8·15

si troverà la serie che è qui accanto, ordinata in due colonne l'una de' nri caffo per differenza 2; e l'altra di caffo, e pari di differenza 1. che corrisponde con l'antecedente serie comune le seguenti ragioni 3·5; 4·7; 5·9; 6·11; 7·13 8·15

Un altro legame singolare si scopre si scopre fra queste due serie di centri, congiungendo il secondo centro 9·10 della serie sottoposta col quarto 13·16 della sovrapposta così 9·10 · 13·16, si avrà

9×10 . 13×16 :: 90 : 1440 :: 3·8

e per avere le radici lineali di questa ragione, si sommino i termini per aver i diametri

9+10 = 19; 13+16 = 31.

congiungendo il quarto centro sottoposto 10·11 col sesto sovrapposto 14·15 così

10·11 · 14·15

si avrà 10×11 = 110 : 14×15 :: 4410·600 :: 7·10, e per avere le radici lineari di questa ragione, i due diametri saranno 10+11 = 41; 14+15 = 49.

Congiungendo finalmente il sesto sottoposto 35·36 con l'ottavo sovrapposto 35·36, s'incontrano ne' stessi termini che sono, lo stesso centro della proposta 9. d. 30·35 :: 36·42.

i di cui

i di cui esponenti 30.40 :: 5.7
sono le 2 radici della ragion
dupla 2×3 - 3×4 :: 6.12 :: 1.2
Cessa adunque la serie nel
comune centro della radice
dupla
Proseguendo l'esame della serie
de' centri qui sopra proposti.
Il secondo centro 9.10 ha legame
co 4 corpi 14.15 in 9.10.14.15
si avrà in prodotto
9×10.14×15 :: 90.210 :: 3.7, e
per aver le radici lineari, i due
diametri saranno 9+10=19; 14+15=29
Il quarto centro 20.21 ha
legame co 4 quinto 27.28 in
20.21.27.28
si avrà in prodotto
20×21.27×28 :: 420.756 :: 5.9
e le radici lineari si avranno
per mezzo de' diametri
20+21=41; 27+28=55
Il sesto ha legame co 'l settimo
35.36.44.45; si avrà
35×36.44×45 :: 1260.1980 :: 7.11
e per le radici lineari saranno
i due diametri 35+36=71;
e 44+45=89
Questo legame consiste in una
serie di ragioni, onde di
numero Caffo 2 differenza 4.
fra gli esponenti di ciascheduna
come si vede nelle due
colonne 2.7
5.9
7.11 &c

le somme di questi cenoni ebbirsen sono le seguenti

5+6+9+10=30; 14+15+20+21=70; 27+26+35+36=126; 44+45+54+55=198

30. 70. 126. 198, che diite gli danno 15. 35. 63. 99 &, cioè danno la serie indefinita de' merri armonici di numero caffo, ed origine ~~cogniziane delle loro~~ dalla moltiplica delle forme impari 3×5=15; 5×7=35; 7×9=63; 9×11=99; 11×13=143 &

~~Essendo~~ essendogli la serie degl' impari per la somma de' termini delle semplici forme, o siano ragioni. 1+2=3; 2+3=5; 3+4=7. Questa è un' altra conferma che l'armonica nabuva è nabuva di ragioni ~~pari~~ a priori. Indi ha la origine la serie de' merri armonici di quelle ragioni che hanno i merri determinati; perchè 3 è il merro armonico della tripla 2. 3. 4. 5. 6. Sonati 3+5: questo è il merro armonico della duplo 6. 8. 9. 10. 12 Sonato 7+8=15. questo è il merro armonico della ~~tripla~~ quadruplo 12. 15. 16. 17. 20; e così la serie indefinita.

Se adunque dai termini 1. 2 si ha la somma=3, merro armonico; se dalla somma de' termini 2. 3, si ha. 5. ~~merro~~ che unito a. 3. fa. 8., merro armonico, dalla somma de' termini 3+4=7, unito ad. 8., si ha. 15. merro armonico & la serie indefinita: è chiaro che la

la intrinseca natura di questi mezzi è di semplici fonne, o piano vagioni originali, e che è un continuo armonico di ordinata serie di fonne, o vagioni originali.

un'altra proprietà di si è che s'incontra questa serie con la precedente 1.2.3.6, 3.5.6.10 &c de' cui termini le fonne si risolvono in 1.3.6.10.15 &c Questa stessa serie 1.3.6.10.15 &c si ha in questa, sommando il 2do termine della 1ª proporzione col 1º della 2da. il 2do termine della 2da co'l 1º della terza; il 2do della 3ª. col 1º della 4ª &c come qui si vede

10+14 = 24	3
21+27 = 48	6
36+44 = 80	10
55+65 = 120	15
78+90 = 168	21

Si supponga il 1º termine di questa serie = 8, fovranno dalla somma de termini 3+5 della vagione 3.5. a questi fovranno dalla somma de' termini delle due 1ª vagioni 1.2; 2.3; 1+2=3; 2+3=5 le quali composte costituiscono la tripla $\frac{1.2.3}{1+2.2+3::1.3}$, si avrà 8.24.48.80.120.168 &c div.ta 1.3.6.10.15.21 &c

Tale dedotta da tutti i mezzi armonici

di numero pari delle rispettive
loro proporzioni di mezzi
determinabi

In questa fo v'assegnato serie
di esponi, si osservi che le
sottosegnate radici di ragione
corrispondono con l'ordine preso
alla serie delle ragioni formate
i. 3. 6. 10. 15 &, & sempre più
conservano la origine della
lineare quantità radicale dai
detti esponi di ragione

$\sqrt{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10}$; $\sqrt{14 \cdot 15 \cdot 20 \cdot 21}$

$5 \times 6 \cdot 9 \times 10$ $14 \times 15 \cdot 20 \times 21$

$20 \cdot 90$; $21 \cdot 10$ $4 \cdot 10$

$1 \cdot 3$ 3 6 &

Osservazione IX

Delle radici

1. Siano esposte in serie le cinque proporzioni geometriche discrete, nate dalle forme

1 · 2 · 3	2 termini in tripla	2 · 3 :: 4 · 6
2 · 3 · 4	in dupla	6 · 8 :: 9 · 12
3 · 4 · 5	3 · 5	12 · 15 :: 16 · 20
4 · 5 · 6	2 · 3	20 · 24 :: 25 · 30
5 · 6 · 7	5 · 7	30 · 35 :: 36 · 42

Se si chiegga la ragione di doversi ridurre le prime semplici ragioni a dal canto di proporzioni, Si risponde che in questa unica specie di proporzioni si trova il genere, ed il legame universale delle ragioni costituite dai numeri pari ed impari, cioè 1 · 3 · 5 · 7 · &c
2 · 4 · 6 · 8 · &c

In oltre in questa sola specie si trovano i tre mezzi specificati, armonico, aritmetico, e contrarmonico, il che non può avvenire nelle prime semplici ragioni.

Si osservi di passaggio che termini delle due colonne degli esponenti

2 · 6 :: 1 · 3
6 · 12 :: 3 · 6
12 · 20 :: 6 · 10
20 · 30 :: 10 · 15
30 · 42 :: 15 · 21
70 · 110 :: 35 · 55
7 : 11 :: 7 : 11

la somma della pr. colonna è = 70; e la somma della 2da colonna è 100. Ma 70.110:: 7.11. e questa è la ragione del quadrato inscritto al cerchio circoscritto. Queste proporzioni adunque conducono al cerchio, ed il cerchio a queste proporzioni; la quale ultima cosa si è provata nel 2do. libro

Si facciano ora le cinque somme delle cinque suddette proporz.

$2+3+4+6 = 15$
$6+6+9+12 = 33$
$12+15+16+20 = 63$
$20+24+25+30 = 99$
$30+35+36+42 = 143$
355

le loro somme sono. 15. 33. 63. 99. 143. tutti meri armonici;

		esponenti
la pra = 15.	di. 12. 15. 16. 20 ::	3.5
la 2da = 33.	di. 30. 33. 36. 44 ::	5.7
la 3a = 63.	di. 56. 63. 64. 72 ::	7.9
la 4a = 99.	di. 90. 99. 100. 110 ::	9.11
la 5a = 143.	di. 132. 143. 144. 156 ::	11.13

e la somma delle cinque somme = 355, che costituisce la circonferenza di mezzo è la somma de' meri tutti armonici delle ragioni formate dai numeri caffo 3. 5. 7. 9. 11. 13. e quali formano le somme i precisi meri armonici delle cinque prime proporzioni assegnate per fondamento

$3+5 = 8$
$3+5+7 = 15$
$3+5+7+9 = 24$
$3+5+7+9+11$

1×2 · 2×3 :: 1 · 3

2×3 · 3×4 :: 2 · 4

3×4 · 4×5 :: 3 · 5

4×5 · 5×6 :: 4 · 6

5×6 · 6×7 :: 5 · 7

3+5+7+9+11 = 35

si osservi in oltre che

3 · 5 son radici degli estremi di 1 · 2 · 3	2 · 3 · 4 · 6
5 · 7 - - - - 2 · 3 · 4	6 · 8 · 9 · 12
7 · 9 - - - - - 3 · 4 · 5	12 · 15 · 16 · 20
9 · 11 . . . . . 4 · 5 · 6	20 · 24 · 25 · 30
11 · 13 . . . . . 5 · 6 · 7	30 · 35 · 36 · 42

Poichè si ha la tripla dalla composizione delle due ragioni

1 · 2 dupla ed 1+2=3

2 · 3 sesquialtera 2+3=5

1×2 · 2×3 :: 1 · 3

e dalla somma de' numeri 1 · 2 ; 2 · 3 . si ha 3 · 5

si ha la dupla dalla composizione delle due ragioni

2 · 3 · sesquialtera e 2+3=5

3 · 4 sesquiterza 3+4=7

2×3 · 3×4 :: 2 · 4

si ha la supbipartiens 3ª 3 · 5 da

3 · 4 e 3+4=7

4 · 5 4+5=9

3×4 · 4×5 :: 3 · 5

La tripla composta delle due ragioni 1 · 2 ; 2 · 3 sia espressa ⁊ la sua forma nel diametro di un cerchio. Sia prima la dupla BC · BC :: 1 · 2 sarà 3 il diametro AB, ed il seno cd = √1×2 . sarà medio proporzionale fra 1 · 2 .

Il diametro AB si prolunghi poi di due parti eguali alle prime fino in M, formando il semicerchio AfM . sarà 5 . il diametro AM diviso in

AC · √ACB · CB

1 · √1×2 · 2

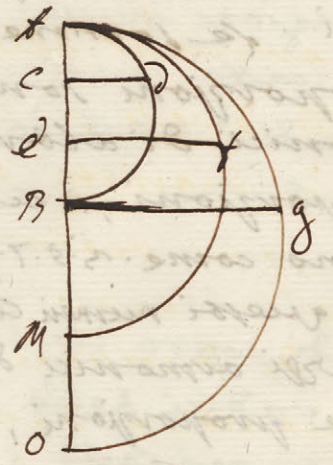
1 · √2 · 2

be · RM :: 1 · 3 · si dini il seno
ef :: sarà be = 1 ; eM = 3 : ed
il seno ef sarà il medio pro=
porzionale della ragione 1·3
saranno adunque cd · ef radici
geometriche della tripla, ffchè
1×1 = 1 ; 1×3 = 6 · ma 3·5 ·
sono i diametri bB3 · AM, come
sono de' termini delle
ragioni, nelle quali si sono
divisi i due diametri; dunq.
in 3·5 vi sono realmente
le radici della tripla, che
col punto di divisione in
c ed e, indicano, e danno
le radici geometriche della
tripla ne' seni (cd · ef :: √1 · √6)
rivati da que' punti di
divisione.
Egli è chiaro che sono apparte=
nenti le due ragioni 1·1 ; 1·3
e di conseguenza i diametri 3·5.
alle cd = √1, ed ef = √6 · ma
dalle le due ragioni 1·1 ; 1·3,
indi risulta la forma com=
posta · 1 · 1 · 3, da cui nasce
1×1 · 1×3 · 1×1×1×3 tripla
geometrica (2 · 3 · 4 · 6
tripla geometrica discreta
co' mezzi armonico · 3 ; ed
aritmetico · 4 · si è adunque
dimostrato che 3·5 seioli
ne' termini delle ragioni, di=
son composti, danno le radici
della tripla.

Passando

be · √1 e M . eM
1 . √1×3 . 3
1 . √6 . 3

Passando alla dupla, compotta delle due vagioni 1.3; 3.4; la forma 1.3. si trova già espressa nel diametro AM = 3, diviso in AE = 1 ed EM = 2. Per la forma 3.4. si prolunghi il diametro per due parti uguali alle precedenti, fino in O, formando il nuovo semicerchio AgO; sarà il diametro AO = 7; e diviso 7. nella sua forma AB. BO :: 3.4, si trovi il seno Bg; sarà questo il mezzo geometrico fra 3.4



$$AB \cdot \sqrt{AB \cdot BO} \cdot BO$$
$$3 \cdot \sqrt{3 \times 4} - 4$$
$$3 \cdot \sqrt{12} \cdot 4$$

Saranno adunque $Cd \cdot Bg :: \sqrt{6} \cdot \sqrt{12}$. le radici geometriche della dupla. Ma 5.7. sono i diametri AM. AO. come sono de' semini delle vagioni, nelle quali si sono diviti i diametri. Adunque 5.7. indicano nelle lor divisioni i punti, da cui si devono trovare i seni, che saranno le radici geometriche della dupla. Alla data le due forme 1.3; 3.4; risulta la forma $1 \cdot 3 \cdot 4$, da cui si ha la formula

$$1 \times 3 \cdot 1 \times 4 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 4$$
$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$$

dupla geometrica discreta.

Li è adunque dimostrato che 5.7. dan le radici della duepla nè punti della divisione nè denomini delle ragioni, di cui 5.7 son somme.

Le prime forme dan le cinque proporzioni. Le somme delle cinque proporzioni sono i nervi armonici di altre cinque proporzioni, i cui esponenti sono come 3.5.7.9.11.13. Le somme di questi numeri caffo danno i nervi armonici delle cinque prime proporzioni, i cui esponenti sono 1.6; 6.12; 12.20; 20.30; 30.42., e ritornano alle forme prime in sempre nuovo cerchio.

Nel libro 3º anderemo cercando, se sia verisimile che il vero principio del legame dell'Universo sia nel legame delle ragioni, e proporzioni

11.2 In ogni proporzione (la cui somma abbia la differenza 1) co' nervi determinati, armonico, ed aritmetico, se raddoppio il primo, e l'ultimo determine, e sommo i due nervi armonico, ed aritmetico. e moltiplico poi fra loro gli esponenti, e quadro il medio:

Trovo

Trovo il quadrato del medio differente di una unità dal prodotto degli estremi

1.n.3 n · n3 · 4 · 6 n2·4 6.6.9.n

4 · 13 + 4 1/2 n.4+9.n4

4×n = 46 n×n4=466

7×7 = 49 17×17=n89

n×n=4 4.n :: n.6 66=36 n6·7n::1.n

3×4=n 6×9=7n

Chiamasi il prodotto questo medio 7 nella 1ma., 17 nella 2da, medio geometrico razionale incompleto fra gli estremi n.6 :: 4.n. della 1ma., e 6.n :: 36.7n. della 2da. E la ragione 4.7 si prodotta prendere per raddoppiata di 4.n perche 4×4=16; 7×7=49; e 16.46 :: 4.n. adunque il 49. eccede di una sola unità; adunque 4.7. sono incomplete radici di 4.n.

Ma 4.7. danno le radici complete, se divito 4. in n.n.; e 7 in n.4, si moltiplichi n×n. 3×4 :: 4.n :: n.6 :: 1.n; ossia (lo che è lo stesso) fatto un cerchio co'l diametro 4. e diviso questo diametro in n.n. dalla divisione si tiri il seno; e fatto un cerchio co'l diametro 7. questo diametro si divida in 3.4, e dal punto della divisione si tiri il seno. Questi seni saranno Vn×n. Vn×4 :: V4. Vn, cioè come le radici della triplata 4.n.

similmente 5.7.10. davanno 5.7. riddoppicata incompleta della doppia 5.10; poichè 5×5=25; 7×7=49. La base 25.50 savebbe ragione giusta. Così pure 7.10. è ragione riddoppicata incompleta di 5.10; poichè 7×7=49; 10×10=100. Savebbe 50.100 la ragione giusta; onde 49.100 non scarta che di una unità. Le radici 5.7 stanno in reciproca ragione di 7.10, perchè $\frac{5}{7} \cdot \frac{7}{10} :: 50 \cdot 49$.

Si è osservato di sopra che 5.7. son le vere radici della doppia; se sciolti i numeri caffo 5.7. nelle ragioni componenti 2.3; 3.4: si ha 2×3.3×4 :: 6.12 :: 1.2; ovvero 2×3.3×4 :: 2.4

Si può ora osservare che i prodotti degli estremi differenti dai prodotti delle medie di una unità, si van sempre più accostando alla vera quantità con la seguente operazione.

Supposto $\overset{AB}{=}10$; BD=7; BC=5; sarà $\overset{\wedge}{BD}^2$ (=7×7=49) minore di $\frac{1}{50}$ del prodotto degli estremi 5×10=50

Sotto BF=24; BD=17; BC=12; $\overset{\wedge}{BD}^2$ (=17×17=289) eccede il prodotto de' estremi (12×24=288) di $\frac{1}{289}$

Sotto BF=58; BD=41; BC=29; $\overset{\wedge}{BD}^2$ (=41×41=1681) manca dal prodotto de' estremi 29×58=1682 di $\frac{1}{1682}$

1.2
2.4
2.3.4
2.3
5.7.10
5.7
12.17.24
12.17
29.41.58
29.41
70.99.140
70.99
140.198.280

5×10=50
7×7=49
12×24=288
17²=289
29×58=1682
41²=1681
70×140=9800
99²=9801

B D C
2×4=8; 3×3=9
12.12 :: 1.2
2×3.3×4 :: 1.2
6×6.8×8 :: 1.2
14×15.20×21 :: 1.2

Sopra $\overline{AB} = 140$; $\overline{AD} = 99$; $\overline{AC} = 70$
$\overline{AD}$ (= $99 \times 99 = 9801$) eccede il
quadrato degli estremi (70×140
$= 9800$) di $\frac{1}{9801}$

In queste ultime radici della ragion
duplo $70 \cdot 99$, moltiplicando
& esse la ragione $9 \cdot 10$, e divi-
dendo questa ragione $9 \cdot 10$
& quella $70 \cdot 99$. s'incontra
la ragione di Archimede fra
il quadrato ~~inscritto~~, ed il cerchio
lo che non s'incontra in
qualsivogliano altre radici
della dupla. Ecco la operazione

$\frac{9}{10} \times \frac{70}{99} = \frac{630}{990} = \frac{7}{11}$ | $630 \times 11 = 99 \times 7$

e dividendo $\frac{9}{10}$ per $\frac{70}{99}$ viene
per cozione $\frac{9 \times 99}{70 \times 10} = \frac{891}{700} = \frac{14}{11}$

$\frac{891}{11}$ $\quad$ $\frac{14}{700}$
891 $\quad$ 9800
891
9801

III. Il mezzo Geometrico non si
trova in un numero solo,
ma è espresso da due, cioè
dal mezzo armonico, e dal
mezzo aritmetico, fra i quali
si trova; e si può accos-
tarvisi sempre più all'infi-
nito, o nel modo qui
sopra espresso, o nel se-
guente. Si riduce la ragione
data, per es: 1.3 a forma
1.x.3. e poi a proporz. g.d
x.3.4.6. Fra 3.4 sarà
il mezzo geometrico. Si riduce
poi il ternario 3.4 a 6.8, e da
forma 6.7.8, e poi a proporz.
g.d. 42.48.49.56. Fra 48.49
sarà il medio geometrico

160

Si riduce il cenno 48. 49
prima a 96. 98
poi a forma 96. 97. 98
e finalmente a proporz.ne g.d
9312. 9408. 9409. 9506.
Fra 9408. 9409 sarà il medio
geometrico &
Si osservi che nel ridurre
il cenno 2. 4 a g.d., ho dovu-
to dire 6. 8; onde dovrò
raddoppiare gli esponenti
2. 6 della tripla g.d. E perche
poi nel ridurre la forma
6. 7. 8. a g.d; ho detto 6x7=42:
dovro moltiplicare p. 7.
gli esponenti 2. 6 della tripla
ch'erano già ridotti a 4. 12.
onde diventavano 4x7. 7x12,
cioè 28. 64 in ragion tripla
E così sempre nelle seguen-
ti proporzioni

1. 3
1. 2. 3
1x2. 1x3. 2x2. 2x3
2. 3. 4. 6.

Il mezzo geometrico sta fra 3. 4
3. 4
6. 8
6. 7. 8.
6x7. 6x8. 7x7. 7x8
4x7 1x7
4. 48. 49. 56.
28. 42. 48. 49. 56. 64

Il mezzo geometrico sta fra 48. 49
48. 49
56. 64. 96. 98. 112. 168
96. 97. 98
96x97. 96x98. 97x97. 97x98
9312. 9408. 9409. 9506

56x97 64x97 112x97 168x97
28x194 42x194 56x194 84x194
5432. 6148. 9312. 9408. 9409. 9506. 10864. 16296

Il mezzo geometrico sta fra 9408. 9409

Ecco operazione

14. Nova operazione. Riduco, come prima, la prop. vazione 1.3. alla proporzione g.d $\sqrt{1.3.4.6}$. si raddoppino gli estremi e si sommino i mezzi; si avra

$4 \cdot 7 \cdot \sqrt{1}$

questa forma si riduca a g.d

$\sqrt{6.48.49.84}$

si raddoppino gli estremi e si sommino i mezzi; si avrà

$56 \cdot 97 \cdot 168$

questa si riduca alla g.d.

$5\sqrt{34}.9408.9409.16\sqrt{96}$

si raddoppino gli estremi e si sommino i mezzi

$10864 \cdot 18817 \cdot 3\sqrt{359}$

questa si riduca a g.d.

$10864 \times 18817 \cdot 10864 \times 3\sqrt{359} \cdot 18817 \cdot 18817 \times 3\sqrt{359}$

$\sqrt{04}4\sqrt{7}868 \cdot 3540794\overline{88} \cdot 3540794\overline{89} \cdot 61\sqrt{3}\sqrt{63}664$

fra i due numeri di mezzo sta il medio geometrico

Questo metodo per fare di operare si riduce allo stesso del precedente quando si ritrovare i limiti, fra i quali sta il medio geometrico. E la operazione di questo metodo è ancor più breve dell'altra

$4 \cdot 7 \cdot \sqrt{1}$

$4 \times \sqrt{1} = 48$

$7 \times 7 = 49$

$56 \cdot 97 \cdot 168$

$56 \times 168 = 9408$

$97 \times 97 = 9409$

$10864 \cdot 18817 \cdot 3\sqrt{359}$

$10864 \times \overline{18817} \cdot 3\sqrt{359} = 3540794\overline{88}$

$3540794\overline{89}$

7.6ra

Altro esempio

ra.3
4 . 6
14 . 5 . 6
4x5 . 4x6 . 5x5 . 5x6
ra0 . ra4 . ra5 . 30 fra ra4 . ra5
40 . 49 . 60 40x60 = ra400 | 49ra = ra401
ra0xra0 = 400 ; ra4xra5 = 600 | 400 . 600 :: 4 . 6 :: ra.3

49 . 49 . 60
40x49 . 40x60 . 49x60
1960 . ra400 . ra401 . ra940 fra ra400 . ra401
3gra0 . 4801 . 5880
3gra0 x 5880 = ra3049600 | 4801ra = ra3049601
1460x1460 = ra1331600 | ra400xra401

3gra0 . 4801 . 5880
3gra0x4801 . 3gra0x5880 . 4801ra . 4801x5880
1881gra0 . ra3049600 . ra3049601 . 18ra ra8880
fra quelli due
3ra6398401 . 4609gra01 . 5643gra60

3ra6398401 x 5643gra60 = ra1ra5136333 18ra38400
4609gra01 ra1ra5136333 18ra38401

3° esempio 1 . ra
ra . 4
ra . 3 . 4
rax3 . rax4 . 3x3 . 3x4
6 . 6 . 9 - 1ra fra 6 . 9
1ra . 17 . ra4
1ra x 17 . 1ra x ra4 . 17ra . 17x ra4
ra04 . ra66 . ra69 . 406 fra ra66 . ra69
406 . 577 . 816
406x577 . 406x816 . 577ra . 577x816
1335416 . 3ra3ra96 . 3ra3ra9g . 4706 3ra
fra quelli due

V. Vie

V. V'è un altro modo di fare che il medio razionale incompleto si accosti al completo quanto uno vuole

Esempio 5 · 7 · 10

5×7 · 5×10 · 7×7 · 7×10

35 · 50 · 49 · 70

Esempio 35 · 70 · ragione doppia. Raddoppio questi estremi e sono i mezzi ed ho 70 · 99 · 140

Se 99 fosse medio rigoroso sarebbe il quadrato del 1° al quadrato del 2do come il 1° al 3°: cioè

$\overline{70 \cdot 99}^2 :: 70 \cdot 140 :: 1 \cdot c$

4900 · 9801 :: 1 · c

e dunque sarebbe 4900×c prodotto degli estremi, cioè 9600 = 9801 prodotto de' mezzi; lo che non è. Ma se prima il medio rigoroso era fra 49 · 50, ora sarà fra 9800 · 9801.

Replico la operazione med. per accostarmi ancora di più al medio rigoroso

70 · 99 · 140

70×99 · 70×140 · $\overline{99}^2$ · 99×140

6930 · 9800 · 9801 · 13860

vegna ancora la ragion doppia fra 6930 · 13860. Raddoppio questi estremi e sono i mezzi. Ho ancora la ragion doppia fra gli estremi

6930×c · 9800 + 9801 · 13860×c

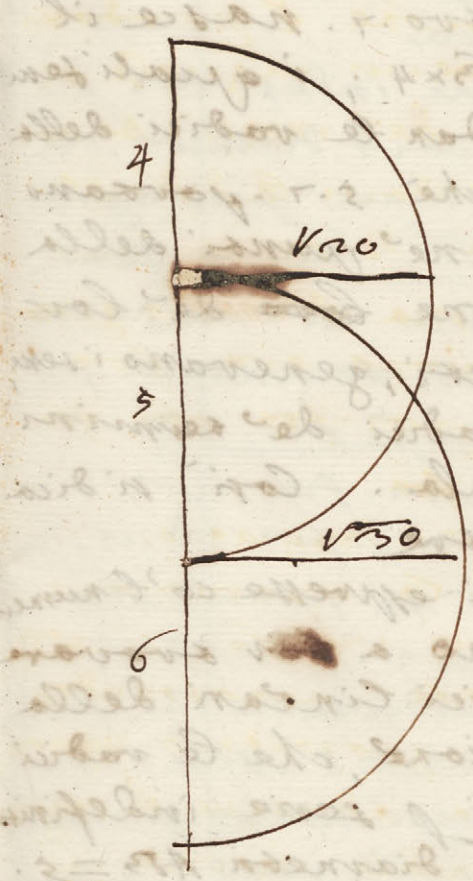
13860 · 19601 · c²/c

Se 1960 fosse il medio rigoroso,
sarebbe 1936 : 1960 :: 1 : a
cioè 1936960 . 3841936 :: 1 : a

3841936

e però sarebbe il prodotto
degli estremi uguale al
prodotto de' mezzi. ma non
lo è, covrendovi la differe.
della unità. Bensì è vero
che al prima il medio geome.
trico rigoroso era fra
49 . 50; e poi fra 4900 . 4901:
ora esso è fra
3841900 . 3841901
Replicando la operazione
quanto uno vuole, si va
rapidamente accostandosi
al medio geometrico rigoroso.
Prescriveva adunque la ragione
a questo medio rigoroso, che
da essa nasce, o cui si va
sempre accostando
Il quadrato del primo termine
(35^2) al prodotto de' due
medj (49×50) sta come
il 1° termine 35 al 3°. 70
$35^2 : 49 \times 50 :: 35 . 70 :: 1 : a$
1225 . 1250 :: 1 : a
adunque i due mezzi 49 . 50
tengon luogo del medio
geometrico rigoroso, e fra
que' due sta sempre il vero
medio
Lo stesso dicasi degli altri.

VI. Data la ragione sesquialtera, & avere le sue radici, si raddoppino 2. 3. in 4. 6 & trovi il medio aritmetico 5, onde si abbia 4. 5. 6. Si sommino i due primi 4+5 = 9.; 5+6 = 11; 9. 11 saranno le radici della sesquialtera poichè moltiplicati 9. 11 in 4. 5, e 5. 6 si ha 4×5 . 5×6 :: 20. 30 :: 2. 3 adunque i quadrati de' lati sono :: 2. 3. adunque i lati :: √2. √3. In questo lato 9. 11. sono le radici della sesquialtera 2. 3; perchè i componenti di 9. 11. moltiplicati fra loro danno i loro prodotti :: 2. 3.



Ora fra 9. 11. si ponga il medio aritmetico 10. e si faccia 9+10 = 19; 10+11 = 21. 19. 21. saranno radici di 9. 11.

Posto fra 19. 21. il medio aritmetico 20, perchè si abbia 19. 20. 21., sommati 19+20 = 39; e 20+21 = 41. 39. 41. saranno le radici di 19. 21. E queste sono radici complete, non incomplete.

Tutto questo dipende dalla 6ª e 17ª del lib. 6. di Eucl. In questo lato 5. 7 sono radici complete della dupla poichè 2×3. 3×4 :: 6. 12 :: 1. 2

2. 3
4. 6
4. 5. 6
4. 5
9. 11 radici di 2. 3
9. 10. 11
9. 10
19. 21 radici di 9. 11
19. 20. 21
19. 20
39. 41 radici di 19. 21
39. 40. 41
39. 40
79. 81
79. 80. 81

radici di 39. 41		
1. 2	2. 4	2. 3. 4
radici dupla		2. 3
radici di 5. 7		5. 7
		5. 6. 7
radici di 11. 13		5. 6
		11. 13
		11. 12. 13
		11
		22. 24

Nella inserzione del n. col
pavo del diametro 5, nasce il
seno = $\sqrt{n \times 3}$; e nella in-
serzione del .3. col .4. pavo
del diametro .7. nasce il
seno = $\sqrt{3 \times 4}$; i quali sem
$\sqrt{6} \cdot \sqrt{n}$ dan le radici della
dupla. sicchè 5.7. pavano
in seno, e ne' punti della
congiunzione ~~loro~~ de' lor
componenti, generano i seni,
cioè le radici de' semini
della dupla. Così si dica
delle altre

VII. Le vagioni espresse co' l numero
si trovano a trovare
si le radici cinesi della
data vagione, che le radici
delle radici ſ serie indefinita
siano i due diametri $AB = 5$.
$BC = 7$. si tagli il pr. AB
in $AD = n$, $DB = 3$; e si tagli
il rdo AC in $AF = 3$; $FC = 4$.
Si descrivano i semicerchj
$AEB \cdot ASC$, e si tirino i seni
de .7.9 : sarà
$de = \sqrt{AD \times DB} = \sqrt{n \times 3} = \sqrt{6}$. e
$79 = \sqrt{AF \times FC} = \sqrt{3 \times 4} = \sqrt{n}$.
de sarà uguale al lato,
79 alla diagonale del quadrato
Posto 5.6.7. si faccia $5+6 = 11$;
$6+7 = 13$
siano i due diametri $AZ = 11$.
$AS = 13$. Si tagli AZ in $AH = 5$;
$HZ = 6$; e si tagli AS in
$AF = 6$; $FS = 7$. sarà il seno

$HI = \sqrt{4H \times HR} = \sqrt{5 \times 6} = \sqrt{30}$, e
$7k = \sqrt{67 \times 75} = \sqrt{6 \times 7} = \sqrt{42}$
ma $30 \cdot 42 :: 5 \cdot 7$. da cui
abbiam avute le radici della
ragione duplа. adunque
KI; $7k$ sono le radici delle
radici della duplа

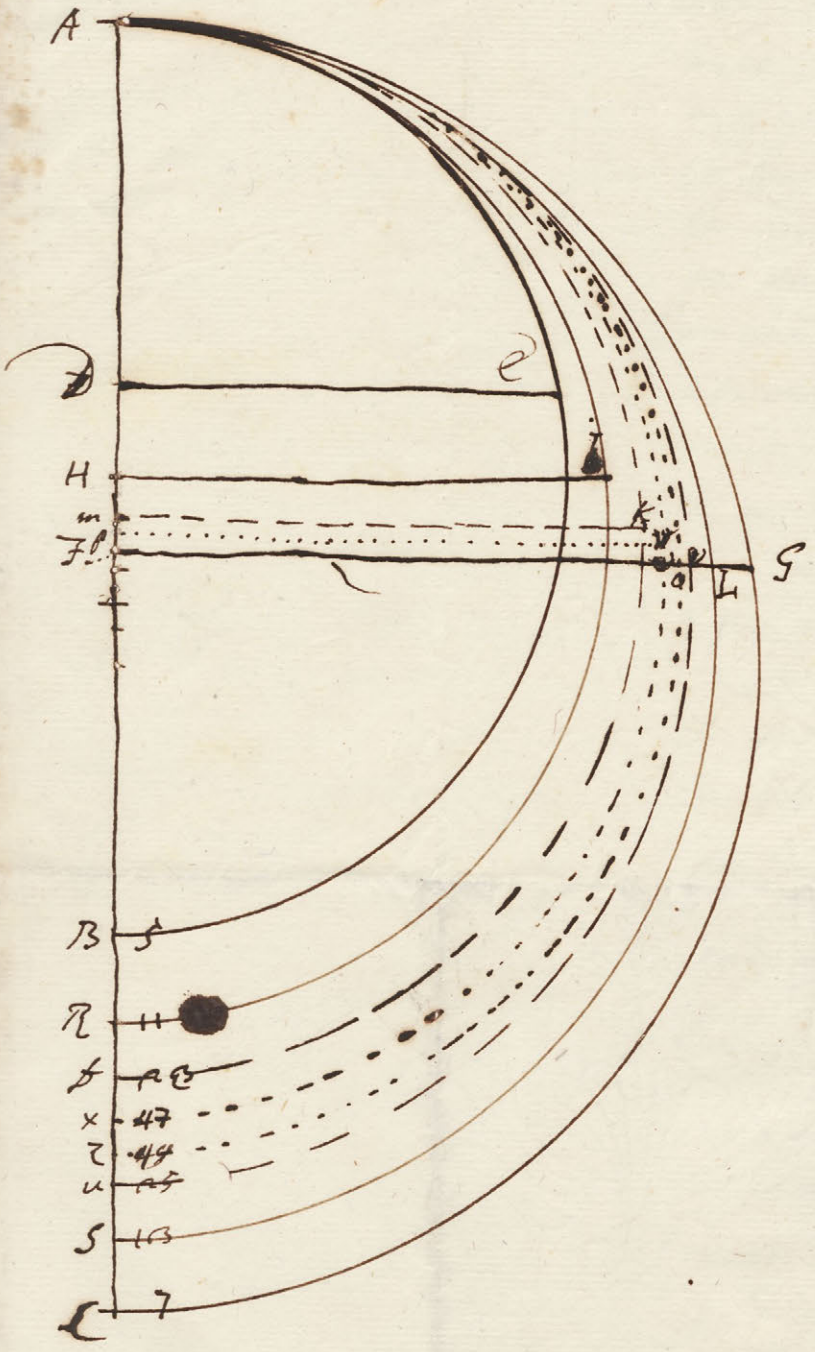
Posto $11 \cdot 12 \cdot 13$.
si faccia $11 + 12 = 23$; e
$12 + 13 = 25$
siano i due diametri $bf = 23$;
$bu = 25$; e si tagli bf in
$bm = 11$; $mf = 12$, e tagliasi
bu in $b7 = 12$; $7u = 13$; sarà
$mk = \sqrt{bm \times mf} = \sqrt{11 \times 12} = \sqrt{132}$.
$fu = \sqrt{bf \times 7u} = \sqrt{12 \times 13} = \sqrt{156}$
ma $132 \cdot 156 :: 11 \cdot 13$. adunq;
questi ultimi lati sono le
radici di $11 \cdot 13$. che ci avean
dato le radici di $5 \cdot 7$; da cui
avevamo avute le radici
di $1 \cdot 2$.

Posto $23 \cdot 24 \cdot 25$
si facciano i due semicerchi
quadeggiabi, e si divida
il diametro bx. in $bp = 23$;
$px = 24$ ed il diametro bz.
in $bz = 24$; $7z = 25$.
Il lato doppio da p. sarà
$pr = \sqrt{bp \times px} = \sqrt{23 \times 24} = \sqrt{552}$
ed il lato doppio da 7 sarà
$to = \sqrt{b7 \times 7z} = \sqrt{24 \times 25} = \sqrt{600}$
ma $552 \cdot 600 :: 23 \cdot 23$
adunque questi ultimi lati
sono le radici di $23 \cdot 25$; da
cui si erano dedotte le radici
di $11 \cdot 13$, e da queste le radici di $5 \cdot 7$

da cui si evano avute le
radici di L. n.

Dopo 47. 46. 49
si faccia 47+46 = 95; 48+49 = 97 &
come sopra
e così in serie indefinita di
sempre nuovi diametri, che
si vanno sempre più approssi-
mando nelle nuove semi-
circonferenze al mezzo arit-
metico di ΔB. BC, nella pri-
mo posizione = 6. fra 5. 7.
Nella 2da = 12. fra 11. 13
Nella 3a = 24. fra 23. 25
Nella 4a = 48. fra 47. 49
Nella 5a = 96. fra 95. 97.
e ciò in suddivisione de' primi
diametri ΔB = 5. BC = 7. in
passi sempre minori in meta,
regolate dalla serie 1. 1/2. 1/4. 1/8 &

delle Radici



Osservazione X.

Dati nell'aritmetica serie due esponenti pari, la cui differenza sia 4: I due impari indussi con differenza a. sono le radici della vagione formata dagli esponenti pari.

Poichè siano na. na+4 gli esponenti; I mezzi saranno na+1. na+3. Questi saranno le radici di na. na+4 Si dividano gl'impari na+1 in a. a+1; e na+3. in a+1. a+2

Si moltiplichino insieme le parti fatte e

$$a \times \overline{a+1} \cdot \overline{a+1} \times \overline{a+2}; \text{ sarà}$$

$$aa+a. \quad aa+3a+2$$

ma questi prodotti hanno fra loro come i dati n° pari $na \cdot \overline{na+4}$, poichè

$$a \times \overline{a+1} \cdot \overline{a+1} \times \overline{a+2}$$

$$a \cdot a+2 :: na. na+4$$

I numeri adunque dispari a differenza a, sono radici dell'immediatamente precedente e dell'immediatamente seguente

3. 5 di 5. 7 di

a. b A. b e

che se divido 5. in a. 3., 7. in 3. 4. la duplа prodotta $a \times 3 = b$

$3 \times 4 = 12$

$a \times 3 \cdot 3 \times 4 :: a \cdot 4$

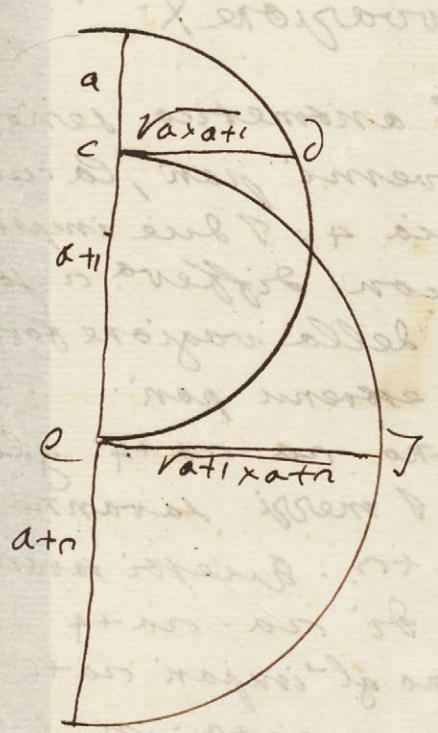
ciò nulla significa, giacchè qui non si contemplano gl'individui componenti della vagione

ma la ragione retta, qualunque siano i termini.

Osservazione XI

Ella è proprietà universale dell' aritmetica serie

V. pag. 96 IV°



$cd \cdot ef :: \sqrt{a \times a+1} \cdot \sqrt{a+1 \times a+n}$

$\overline{cd}^2 \cdot \overline{ef}^2 :: a \times a+1 \cdot a+1 \times a+n$

$:: a \cdot a+c$

$:: na \cdot na+4$

adunque $cd \cdot ef$ sono radici della ragione $na \cdot na+4$

$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$3 \cdot 5$ radici di

$1 \cdot \quad 6$

$1 \times 2 \cdot 2 \times 3 :: 1 \cdot 3 :: 2 \cdot 6$

$4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$

$5 \cdot 7$ radici di

$4 \cdot \quad 8$

$2 \times 3 \cdot 3 \times 4 :: 2 \cdot 4$

$6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$

$7 \cdot 9$ radici di

$6 \cdot \quad 10$

$3 \times 4 \cdot 4 \times 5 :: 3 \cdot 5 :: 6 \cdot 10$

Dell'Ordine delle cose Naturali

si cerca se siavi in Natura un principio armonico applicato alle cose, e che le renda ordinate

La magnifica, e stupenda Macchina di questo Universo, che uscì dalle Mani del Nostro Creatore a similitudine della Idea ch'Egli se n'era nella divina sua Mente formata, è certamente con proporzione, ed ordine perfetto costrutta, come alla somma Sapienza conviene, che ogni cosa con giusto peso, numero, e misura ha disposto per modo che il tutto alle sue parti, ed ogni parte ad ogni altra, ed a tutte avesse una determinata proporzione; giacchè in questo appunto l'ordine perfetto consiste.

Poichè siccome nella vita una azione si chiama retta, ed onesta quando è ordinata: ed ordinata si dice quando si riferisce a Dio come Autore e Conservatore di tutte le cose; ed alla umana società, cui o deve giovare, o certamente non nuocere; ed è a chi la fa per ogni riguardo conveniente; cioè quando a tutte queste cose con giusta proporzione corrisponde: Così nelle cose naturali l'Ordine senza di cui le cose tutte tenderebbero in perpetua guerra, onde presto avverrebbero a scambievolmente distruggersi; l'ordine, dico, per cui le cose tutte, e ciascheduna di esse si conservano, significa che tutto ciò che in questo mondo bellissimo è contenuto, con tutte le altre cose, e con le parti sue ancora conserva una giustissima proporzione, per cui le leggi che tendono alla conservazione di ciascheduna cosa non solo non si oppongano alla legge universale

che il Mondo tutto governa, ma anzi, e quelle, e questa da uno stesso principio, provengano, come da comune fonte, e radice
Egli è fuor di dubio che allor solamente ben si conosce una cosa quando si sa con essa tutte, e quali siano le sue relazioni con tutte le altre cose. Allora adunque avremmo perfetta cognizione e scienza dell'Universo, e delle cose tutte che lo compongono, quando sapessimo l'ordine delle cose, cioè la proporzione con cui son fatte.
Ma che questa sia cosa difficilissima ben si conosce dall'essere, quasi direi, infinito il numero delle cose; e le proprietà di ciascheduna, cioè le particolari leggi della loro costituzione molto varie fra loro; e queste, e la massima parte di esse ancora del tutto ignote.
Ben lo che quale sia la connessione di queste leggi fra loro, quale la loro relazione, o proporzione alla legge universale del mondo, o mai non si scoprirebbe, o questo scoprerlo sarebbe l'opera di molti secoli, sebbene tutti i Filosofi tutti applicassero seriamente l'animo a scovrire e ben distinguere i generi tutti delle cose, a scoprire le loro proprietà, o le lor leggi, a conoscere la proporzione o relazione di queste leggi fra loro, per indi dedurre il comune principio

di tutte, cioè la legge universale che tutte le cose di questo Mondo regge, e governa.

Che dir potrebbesi adunque se i Filosofi fossero stati sempre in questo esame assai negligenti, se troppo frettolosamente, per ischifare la fatica fossero volati a mal fondate universali proposizioni; se le leggi delle cose da loro avessero non dall'esame delle cose stesse, ma troppo vicino e troppo amore di se stessi, dalla lor fantasia; se finalmente all'ordine e proporzione delle cose fra loro degnati non si fossero di mai rivogliere il lor pensiero?

Ben'vedesi, che allora con tutto il fondamento dire potrebbesi, che i Filosofi ben sovente potrebbero astringersi di ben conoscere una qualche cosa, quando nulla sapessero delle relazioni di essa. La quale opinione di ricchezza, è la principale causa di povertà, e di miseria, come osservò benissimo Bacone di Verulamio; Poichè quasi mai uno ritrova ciò che ei non ricerca; Nè alcuno riceve mai ciò, che sciocamente crede di possedere.

Bisognerebbe pertanto che con sommo studio e diligenza ricercassero la proporzione con cui le cose son fatte quelli che conoscer volessero l'ordine delle cose, giacchè ignorandolo non possono mai avere una piena cognizione de' naturali composti, e de' primi loro elementi.

Colui poi che vorrà imparare l'ordine delle

delle Cose, dovrà in primo luogo formarsi una chiara idea generale dell' ordine, e rappresentarsela poi con una qualche imagine, per paragonare poi a questa generale idea le varie specie di ordine che andasse egli poi con le osservazioni e con gli sperimenti scoprendo.

Vediamo ora se fra le idee che abbiamo, vi sia la idea generale dell' ordine, che servire poi possa quasi di face per investigare l' ordine delle cose di questo Universo.

~~Lavoro 1°~~

La serie, o progressione Armonica $\cdot 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &
in infinito, è certamente ordinata;
ed ordinata pure è la inversa di quella
cioè l'Aritmetica serie formata dai
divisori dell'Armonica $\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ &

Per vedere ora quale di queste due imagini
dell'Ordine sia la prima, la migliore,
la più chiara, ~~xx~~ gioverà porle al
confronto.

Nasce la serie Aritmetica dalla Armonica
anzi è in essa contenuta, perchè formata
dai divisori della media. ma l'Armonica
serie non nasce dalla Aritmetica, anzi
questa come pavesi in quella è conte-
nuta. Adunque l'Armonica serie è
la prima, e la principale.

L'una e l'altra serie principia dalla
unità. ma la unità della serie ar-
monica tiene il luogo di un tutto,
di cui son pavesi gli altri termini
tutti della media serie. La unità
poi della serie Aritmetica è la minima
quantità della media serie, la quale
minima quantità si prende per indivi-
sibile, e per misura di tutte le altre
quantità della serie stessa. L'Armonica
serie adunque va per sintesi dal
tutto alle pavesi: e la serie Arito-
metica va per analisi dalle pavesi
al tutto. Atteso adunque più nobile
e più dottrinale il metodo sintetico
dell'analitico; la serie armonica
sarà la più nobile, ~~e la più~~
~~degna~~ idea dell'ordine, e la più degna.

La serie armonica contiene tutte le possibili ragioni razionali, i termini delle quali sono la serie delle parti del tutto armonico. La serie aritmetica contiene essa pure tutte le ragioni razionali; ma ciascuna di queste ragioni della serie aritmetica è la inversa della corrispondente ragione dell'armonica serie; ed i termini delle ragioni della serie aritmetica non hanno relazione ad alcun tutto, che non si trova mai nella serie aritmetica le cui quantità vanno in infinito crescendo, sicchè il 1° termine è sempre il minimo, l'ultimo è sempre il massimo di tutta la serie; Mentre le quantità de' termini della serie armonica van sempre scemando, sicchè il primo ne è il massimo, ed il tutto, il minimo è sempre quello che si prende l'ultimo.

$1 \cdot \frac{1}{2} :: 2 \cdot 1$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} :: 3 \cdot 2$

Ogni ragione, commensurabile, o razionale, per tanto può esprimersi con due termini dell'una, o dell'altra serie. Nell'armonica le ragioni prime, e semplici sono $1 \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &. Nell'aritmetica serie le ragioni prime e semplici sono $1 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$; $4 \cdot 5$ &.

Le proporzioni però dell'armonica serie $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ & non vengono espresse dai corrispondenti termini dell'aritmetica serie $1 \cdot 2 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 4$; $3 \cdot 4 \cdot 5$ &. E questo ancora l'armonica serie è da preferirsi alla serie aritmetica.

Per ritrovare i numeri interi della serie aritmetica, che corrispondono alle frazioni, cioè ai termini delle proporzioni dell'armonica serie, bisogna ridurre quelle frazioni al comun divisore. Allora i numeratori delle frazioni così ridotte

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$	6 · 3 · 2
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{12}{24} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24}$	12 · 8 · 6
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{20}{60} \cdot \frac{15}{60} \cdot \frac{12}{60}$	20 · 15 · 12
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{30}{120} \cdot \frac{24}{120} \cdot \frac{20}{120}$	30 · 24 · 20

così ridotte indicano i denomini dell'armonica proporzione; e il comune denominatore indica in quante parti la unità armonica in quella proporzione si concepisca divisa; o sia quante volte la aritmetica unità sia nella unità armonica contenuta.

La armonica unità nella prima proporzione si concepisce divisa in sei parti; nella 2da in 24; nella 3ª in 60; nella 4ª in 120. Ma la unità armonica è sempre la stessa, è sempre il tutto, e si mutano solamente le parti che in essa si concepiscono, cioè si muta l'aritmetica unità. Sia p esempio un anno. quando invece di dire un anno io dico dodici mesi, l'anno è lo stesso che prima e si è solamente mutata l'aritmetica unità, che diventa un mese; così quando dico 365 gni l'anno è lo stesso, e si è mutata solo l'aritmetica unità che prima era un anno, poi un mese, ed ora è un giorno. Anche per questa cagione della unità armonica, a confronto della mutabilità della unità aritmetica, la serie armonica è una più nobile idea dell'ordine di quello lo sia l'aritmetica serie

Fra due denomini di una ragione vi sono tutti questi mezzi: 1°. l'armonico; 2°. l'aritmetico; 3°. il contr'armonico; 4°. il geometrico. Questo ultimo principalmente, e quasi unicamente è stato trattato dai Geometri, intorno a cui anno detto cose nobilissime. Poche cose anno detto degli altri mezzi armonico, aritmetico, e contr'armonico. Cioè anno risolto questi due

Problemi: Dati i due primi termini di una proporzione, trovare il terzo aritmetico, o l'armonico, o il contrarmonico. IIº. Dati i due estremi, trovare il mezzo aritmetico, o l'armonico, o il contrarmonico

Giova molto per trovar questi mezzi, esprimere le ragioni con numeri interi della qualcosa trattenerne in altre opere perchè allora con pochi e facili canoni de' quali abbiam trattato nel problema, e noi coll'aggiunta d'osservazioni in altra opera, facile riesce ritrovare tutti que' mezzi. Si trovano altro i mezzi ancor tra i termini espressi da frazioni, come ivi abbiamo osservato

1 : 3
1 : 2 : 3
1×2 : 1×3 :: 2×2 : 2×3
2 : 3 : 4 : 6
2 : 3 : 4 : 5 : 6

Nelle proporzioni per tale via ritrovate, il mezzo aritmetico è sempre un quadrato, l'armonico è minore del quadrato di una unità; il contrarmonico eccede di una unità lo stesso quadrato. Le proporzioni trattate in questo modo racchiudono tutti i generi di proporzioni armoniche, aritmetiche, contrarmoniche e geometriche. Onde questo ne è il genere universalissimo.

2 : 3 : 4 : 5 : 6
6 : 8 : 9 : 10 : 12
12 : 15 : 16 : 17 : 20
20 : 24 : 25 : 26 : 30
30 : 35 : 36 : 37 : 42

Nella serie de' numeri naturali si contengono tutte le predette proporzioni con questa legge che 7 : 11/7+10 :: 7 : 21 :: 1 : 3. che è la ragione che passa fra gli estremi della precedente proporzione. Similmente 13+14 : 17+16+19 :: 27 : 54 :: 1 : 2 che è la ragione che passa fra gli estremi della proporzione prece-
2 dente.

2 : 3 : 4 : 5 : 6
6 : 7 : 8 : 9 : 10 : 11 : 12
12 : 13 : 14 : 15 : 16 : 17 : 18 : 19 : 20

Nella serie per salto de' numeri naturali tutto è ordinato, congiunto, connesso, mentre ancora que' numeri che sembrano disgiunti indicano costantemente la precedente ragione

Da tutto ciò che abbiam detto si fa chiaro, che le due serie, armonica 1 : 1/2 : 1/3 : 1/4 ℰ ed aritmetica 1 : 2 : 3 : 4 ℰ danno una idea dell'ordine

Con questa differenza però che la serie armca è prima, più degna, più chiara, sicchè a primo aspetto si concepisce ordinata; mentre la Biometrica, inversa della armonica, dà invero una idea dell'ordine ma non così pronta, nè così chiara; poichè si vedrà la più nitida connessione v'è bisogno di riflessione, e di alcune operazioni.

1. L'Biometrica nasce dalla armonica, ma non già l'armonica dalla Biometrica.
2. L'armonica procede per sintesi; la Biometrica per analisi
3. Nell'armonica vi è la unità costante, e sempre la stessa; tutto è vario nell'Biometrica
4. Nell'armonica a primo aspetto tutto si vede ordinato, e congiunto; Nell'Biometrica vi sono dei numeri che pajono oziosi, e bisogna fare certe operazioni per mostrarli ordinati, e connessi

Per le quali cose tutte l'armonica serie dà una idea dell'ordine, che è la prima, la principale, la più nobile, e la più chiara di quella che si ha dall'Biometrica serie.

Io non ho parlato punto delle serie

Geometriche . 1 . 2 . 4 . 8 . 16 . 32 / 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$ &
1 . 3 . 9 . 27 . 81 . 243 / 1 . $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{9}$. $\frac{1}{27}$. $\frac{1}{81}$. $\frac{1}{243}$ &

perchè queste vanno bensì in infinito, ma dicono sempre costesso, mentre tanto è dire 1 . 2 . quanto prendere due altri qualunque n.i della serie, p.e. 16 . 32 . ; onde convengono una sola ragione. mentre le serie armonica ed Biometrica, convengono ragioni sempre varie, relative alla varietà delle cose, che compongono l'Universo.

---

1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$ | 60 . 30 . 20 . 15 . 12 . 10
$\frac{720}{720}$. $\frac{360}{720}$. $\frac{240}{720}$. $\frac{180}{720}$. $\frac{144}{720}$. $\frac{120}{720}$

$1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$	$\frac{6}{6} : \frac{3}{6} : \frac{2}{6}$	6 : 3 : 2	6 : 3 :: 3 : 1	1 : 3	1 : 3	1 : 2 : 3	2 : 3 : 4 : 5 : 6
$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$	$\frac{12}{24} : \frac{8}{24} : \frac{6}{24}$	12 : 8 : 6	12 : 6 :: 2 : 1	2 : 2	2 : 4	2 : 3 : 4	6 : 8 : 9 : 10 : 12
$\frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5}$	$\frac{20}{60} : \frac{15}{60} : \frac{12}{60}$	20 : 15 : 12	20 : 12 :: 5 : 3	3 : 5	3 : 5	3 : 4 : 5	12 : 15 : 16 : 17 : 20
$\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}$	$\frac{30}{120} : \frac{24}{120} : \frac{20}{120}$	30 : 24 : 20	30 : 20 :: 3 : 2	2 : 3	4 : 6	4 : 5 : 6	20 : 24 : 25 : 26 : 30
$\frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7}$	$\frac{42}{210} : \frac{35}{210} : \frac{30}{210}$	42 : 35 : 30	42 : 30 :: 7 : 5	5 : 7	5 : 7	5 : 6 : 7	30 : 35 : 36 : 37 : 42
$1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{5}$	$\frac{15}{15} : \frac{5}{15} : \frac{3}{15}$	15 : 5 : 3	15 : 3 :: 5 : 1	1 : 5		1 : 3 : 5	3 : 5 : 9 : 13 : 15
$\frac{1}{3} : \frac{1}{5} : \frac{1}{7}$	$\frac{35}{105} : \frac{21}{105} : \frac{15}{105}$	35 : 21 : 15	35 : 15 :: 7 : 3	3 : 7		3 : 5 : 7	15 : 21 : 25 : 29 : 35
$\frac{1}{4} : \frac{1}{7} : \frac{1}{10}$	$\frac{70}{280} : \frac{40}{280} : \frac{28}{280}$	70 : 40 : 28	70 : 28 :: 10 : 4 :: 5 : 2	2 : 5	4 : 10	4 : 7 : 10	28 : 40 : 49 : 55 : 70

Unital [illegible]

diumque geometricum.
Hæc ultimum Geometræ vel
unice, vel cerbe præcipue
animadverterunt, de quo
plurima scripserunt sibi
jucunda ut ita dicam, cerebilia; pauca
de medio, arithmetico, tradiderunt,
cæterum plurima definitiones
concernentia; Problemata
hæc, solummodo solverunt: Dabis diuobus
terminis, cerbis harmonicis,
vel cerbis subharmonicis in

Parrebbe ora a vedere se la detta armonica serie che contiene tutte le armoniche proporzioni, ci dia ancora l'ordine di questo Mondo, e delle cose, delle quali esso è composto.

Ciò davvebbe certamente, se tutte le cose fossero armonicamente fatte, se tutte dipendessero da un armonico principio impresso alle cose. Questo Mondo allora sarebbe uno, e sarebbe un tutto, le cui parti sarebbero le cose tutte; e la ragione delle cose e fra loro ed al loro tutto, sarebbe espressa dall'ordine dell'armonica serie.

Resta adunque da ricercare se fra le cose che sono, e che si fanno, vi siano esempj di armonica proporzione, e se versi speranza di poterla scoprire in tutte le cose: Ricerca invero di lunga fatica, e difficile molto da continuarsi. Che tale cosa per altro non sia da porsi fra le impossibili, me lo fan credere e l'autorità di Platone, ed alcuni esempj.

Per quanto appartiene all'autorità di Platone, si può facilmente provare ch'egli e la sua celebre Anima del Mondo, altro non abbia mai inteso, che un principio armonico impresso alle cose, e da ogni dove diffuso, per tutte cioè quelle cose, che sempre sono nello stesso modo come sono i moti celesti, e le specie delle cose. Poiché quanto agl'individui, questi nascano, e muojono, ed ad ogni momento si mutano, ma non sono mai nella stessa maniera.

Quanto poi agli

Esempio primo

corda sonora

Quanto poi agli esempj: Sia questo il primo. Se una corda tesa sonora venga percossa da un corpo elastico, ricchè suoni: essa corda manda fuori tre suoni diversi; uno grave quale compete a tutta la corda; uno acuto, che compete ad un terzo della med.ma; ed uno più acuto ancora, che compete ad un quinto della stessa corda. Sicchè essa fa lo stesso che farebbero tre corde distinte, ugualmente tese, una lunga $\cdot 1 \cdot$, l'altra lunga $\cdot \frac{1}{3} \cdot$, e la terza lunga $\cdot \frac{1}{5} \cdot$

La corda tesa sonora si divide, non da chi la percuote, ma da per se in $\cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot$ per modo, che la intiera corda con queste porzioni fra è in armonica proporzione $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot$ indipendentemente da qualunque umana disegnazione.

Si trovano queste divisioni nella corda per mezzo di un pergolino di carta posto su di essa, il qual pergolino ad $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot$ della corda è molto meno smosso ed agitato dai tremori della corda, che quando sia posto in qualunque altro luogo della corda stessa

Che se alcuno dicesse ch'essa corda si divide da se in $\cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot$ sicchè gli suoni 5 e 6 deboli

$\frac{1}{2}$ di 1
$\frac{1}{4}$ doppia ottava
$\frac{1}{6}$ ottava di $\frac{1}{3}$

essere ottave poco o nulla si rilevino: ciò invece di scemare, anzi accrescerebbe la forza dell'argomento, mostrando che la corda con le sue divisioni dovette la serie armonica delle semplici vagioni.

Se la corda tesa sonora si divide da se, e fa $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$: Queste proporzioni adunque son nella corda per forza di sua natura, o di un armonico principio, e non già per umano arbitrio, o per umana disegnazione - Sono adunque

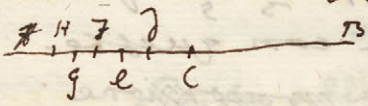
in ● Natura tali proporzioni 3.1; 5.3
5.1, o v'è certamente il principio armonico
che le produce, anteriore a qualunque
umana dissegnazione; In qualunque modo
poi si vogliano dire, o segnare, o scrivere

Esempio 1°.

Terzo suono

Del Fenomeno della corda tesa sonora aggiungere conviene l'altro fenomeno del terzo suono, che mostra che la proporzione, e progressione armonica $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ è in Natura, e dà luogo di ritrovare la vera origine de' numeri naturali

Sia la tesa corda sonora BB3. La concepisco divisa in modo, che



BB3. BC. BD. BE. BC3. BG. BH. stiano come
$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$

BB3 è il tutto, la unità armonica. Le altre unità sono tutte aritmetiche. BC. B3C :: 1. 1. Queste unità non sono certamente relative al tutto. Il tutto adunque BB3 = 1, è l'uno armonico, anteriore alle aritmetiche unità; perchè prima di dividere la corda in BC. C3, cioè in 1. 1; 1. 2; $\frac{1}{2}$ 3, la corda deve certamente esistere. Ecco le proporzioni che nascono da queste divisioni

	Terzo suono	
BC. C3 :: 1. 1.	B3. BC :: 1. $\frac{1}{2}$ :: 2. 1	2
BD. D3 :: 1. 2	BE. BD :: $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ :: 3. 2	6
BE. E3 :: 1. 3	BD. BE :: $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ :: 4. 3	12
BZ. Z3 :: 1. 4	BE. BZ :: $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$ :: 5. 4	20
BG. G3 :: 1. 5	BZ. BG :: $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$ :: 6. 5	30
BH. H3 :: 1. 6		

Ecco già nati da queste divisioni i numeri naturali 1. 2. 3. 4. 5. 6.

Ora vengo al fenomeno del terzo suono. Se si toccano due corde sonore lunghe come

come 1. a. olve i suoni di esse due corde, si sente un terzo suono = 1×2=2. il quale se olvo si confonde col suono della corda a. cioè è uguale al suono di tutta la corda. Se le corde staccate sono lunghe come a. 3. il terzo suono è uguale a 2×3=6, uguale al suono di tutta la corda, che si concepisce ova divisa in sei pavoi uguali.

Se le corde son lunghe :: 3.4; il terzo suono è uguale a 3×4=12, uguale al suono di tutta la corda che ova si concepisce divisa in 12. pavoi uguali.

Se le lunghezze sono :: 4.5; il 3°. suono è = 4×5=20, e la corda si concepisce divisa in 20 pavoi uguali

Se le lunghezze sono :: 5.6; il terzo suono è = 5×6=30, = al suono di tutta la corda, che ova si concepisce divisa in trenta pavoi uguali

Queste divisioni della corda che nel 1°. caso è 12. nascono da ciò che non v'è n°. minore del 2. che sia divisibile d. 1. e d. 2. Nel 2do caso non v'è n°. minore del 6. che sia divisibile d. 2. 3. Nel 3°. caso non v'è n°. minore di 12. che sia divisibile d. 3. e d. 4. Così non v'è numero minore del 20. che sia divisibile d. 4. e d. 5. Nè vi è n°. minore del 30. che sia divisibile d. 5., e d. 6.

Dunque il terzo suono mostra la unità, o la corda tutta divisa nelle sue pavoi armoniche; e risolve il suono delle pavoi nel suono del tutto; ed il tutto armonico nel primo esempio si risolve nelle sue pavoi 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. anzi in 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. sebbene $\frac{1}{2}$. come osserva dell'. 1. difficilmente vien

dall'orecchio distinto; come pure $\frac{1}{4}$ ottava di $\frac{1}{12}$ ed $\frac{1}{6}$ ottava di $\frac{1}{3}$.

Le proporzioni armoniche sono adunque in natura, o v'è in natura un principio armonico che le fa nascere; e basta è lontano ch'esse proporzioni si deducano dai numeri naturali, che anzi i numeri naturali si deducono dalle armoniche proporzioni

Si deve osservare che i detti suoni sono indicati dai numeri . 2 . 6 . 12 . 20 . 30 . 42 &c che hanno fra loro come . 1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 &c dalle cui somme, a due a due, nascono i quadrati . 1+3=4; 3+6=9; 6+10=16; 15+21=36 &c

Si è osservato di sopra che formando i termini delle semplici ragioni 1.2; 2.3; 3.4 &c queste somme danno i numeri caffo . 3 . 5 . 7 &c; ed i pari nascono dalla unità, aggiunta al caffo. Questi pari per altro dividi &c. 2. danno la stessa serie de' n.i naturali . 2 . 4 . 6 . 8 . 10 . 12 &c
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

Ed ecco &c basta tutti i numeri, ed i loro legni, nati dalle precedenti ragioni; le quali essendo in natura, o nascendo da un principio, ch'è in natura, fan conoscere che i numeri, ed i loro legni hanno il lor fondamento in Natura.

Quindi si può dedurre, che debbono 1 . 3 . 5 . 7 . 9 . 11 . 13 . 17 . 19 &c chiamar si possono numeri primi perchè non sono divisibili &c altro numero che &c la unità, onde &c via di moltiplica non sono composti di altri, e però son primi: tuttavia, potendo comporsi i numeri ancora &c via di somma, e nascendo &c i caffo dalla somma de' termini delle semplici ragioni, ed i pari dalla somma di due impari; dare si potrà dire, che tutti i numeri, fuorchè la unità siano in questo senso composti, &c che derivati &c somma dai termini delle semplici ragioni prime.

Esempio 3°.

Esempio 3°. Suoni

Suoni. Se a corde sonore uguali, sospese ad un sodo uncino si attacchino dei pesi, che stiano fra loro come 1. 2. 3. 4 &c: Queste corde danno dei suoni che tendono dal grave all'acuto. Sia quella corda o lunga o breve; sia grossa o sottile; sia di metallo, o d'intestini: Queste cose niente turbano le ragioni de suoni; ma determinato che sia il primo suono (o grave, o acuto che questo siasi) che corrisponde al primo peso; secondo la natura della corda, che più grossa, e più lunga che è, dà un suono più grave: Tutti gli altri suoni stanno a quel primo in costante ragione

I pesi ancora, purchè siano fra loro uguali, possono prendersi a piacere o di una libbra, o di due &c. Il 2° suono sarà più acuto, se i pesi saranno magg.ri; e minori, sarà più grave. ma dato quel primo suono, le ragioni degli altri suoni od a quel primo, o fra loro, si conservano costantemente le stesse.

Intorno a questi suoni è da osservarsi, che da gran tempo si sa, che se una corda tesa nel monocordo sarà all'unisono con una corda tirata da un solo peso; e si divida poi quella corda del monocordo in $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ &c; la metà di essa sarà all'unisono con l'altra corda, tirata da quattro pesi; $\frac{1}{3}$ di quella sarà all'unisono con l'altra corda, tirata da 9. pesi; $\frac{1}{4}$ di quella sarà all'unisono con l'altra, tirata da 16. pesi. se i pesi sono 1. 4. 9. 16. 25 &c le lunghezze delle corde saranno 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$ &c

Ella non era noto in qual ragione fossero i suoni, generati dai pesi, posti fra il 1°. ed il 4°; fra il 4°. ed il 9°; fra il 9°., ed il 16°. Questi suoni intermedj, cioè quelli che si generano dai pesi frapposti fra i n.i quadrati 1. 4. 9. 16. &c. &c., stanno fra loro come le radici de' reciproci dell'armonica serie

Pesi . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9

suoni o lunghezze . 1 . $\sqrt{\frac{1}{2}}$. $\sqrt{\frac{1}{3}}$. $\sqrt{\frac{1}{4}}$. $\sqrt{\frac{1}{5}}$. $\sqrt{\frac{1}{6}}$. $\sqrt{\frac{1}{7}}$. $\sqrt{\frac{1}{8}}$. $\sqrt{\frac{1}{9}}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$

Poichè se si descrivano de' quadrati, le cui aree siano uguali a $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$ &c. e si facciano le parti di una corda sonora di un monocordo, uguali ai lati di que' quadrati; fatto già il suono corrispondente al 1°. peso, unissono al suono del lato del 1°. quadrato: Il suono corrispondente a due pesi, sarà unissono al suono del lato del 2do quadrato; ed il suono eccitato da sei pesi, sarà unissono al suono del lato del sesto quadrato, e così in infinito.

Si avranno poi facilmente i lati di que' quadrati, se presa la BO uguale alla lunghezza della corda del monocordo, con questo diametro BO si descriva il cerchio BCO; e tagliato poi il diametro BO in armonica progressione picchè si abbia BO . OB . OH . OI . OL . OM

come 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$

e tirati i seni BC . HD . IE . LF . MG ;

finalmente si tirino le corde OC . OD . OE . OF . OG

Queste corde saranno i lati de' quadrati che ora cerchiamo.

Fig. 10.

Poichè (cor. 3 prop. 17. lib. VI°. Geom. del Taylor ed Wolfio) i quadrati delle corde sono come i seni versi OB . OH . OI &c. le corde adunque

$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ &c.

saranno

savanno come le radici de' seni versi
cioè 0f. 0c. 0d. 0e. 07. 09 come
1 . $\sqrt{1/2}$. $\sqrt{1/3}$. $\sqrt{1/4}$. $\sqrt{1/5}$. $\sqrt{1/6}$. $\sqrt{1/7}$. $\sqrt{1/8}$. $\sqrt{1/9}$
1 . $\sqrt{1/2}$. $\sqrt{1/3}$. $1/2$. $\sqrt{1/5}$. $\sqrt{1/6}$. $\sqrt{1/7}$. $\sqrt{1/8}$. $1/3$
pesi 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9
adunque le corde suddette sono come
i labi de' quadrati, i quali labi danno
i suoni uguali a quelli fatti dai pesi
1 . 2 . 3 . 4 &c

Esempio IV. Diametri

Sia la corda sonora C7, cui sia attaccato un peso = 1. Questa toccata con una penna di corvo, manda fuori un dato suono. Acciò questa corda, od una sua uguale 09, dia la ottava acuta, bisogna attaccarvi quattro pesi. Si avrebbe la stessa ottava acuta, se si prendesse la corda CH, uguale alla metà della corda C7; ed a quella corda CH si attacchi peso = 1.

Due sono adunque i modi di far passare la corda C7 da un dato suono alla ottava acuta. Uno si è di attaccarvi peso quadruplo, salva la prima lunghezza della corda; e l'altro si è di ridurre la corda alla metà della sua prima lunghezza, salvo il suo primo peso. Il 1° modo adunque è di passare da lunghezza da 2 . 1 - attaccandovi lo stesso peso; Il 2do di far i pesi 1 . 4 . essendo fevvne le lunghezze: ma 1 . 4 . sono in duplicata inversa di 2 . 1; adunque i pesi da attaccarsi sanno in duplicata inversa delle lunghezze che dovrebbero alle corde per avere il med. effetto. Adunque peso = 1 . attaccato a corda = 1 . agisce quanto peso . 4 . attaccato a corda = 2 .

adunque peso 1. in distanza 1. agisce come peso 4. in distanza 2. la azione adunque di peso 1. su corda 1. è quadrupla dell'azione di peso 1. su corda 2. ed è uguale all'azione di peso 4. su corda 2. quanto all'effetto di produr suoni

Corde	azione de' pesi che stanno ::
2 : 1	1 . 4

adunque le azioni de' pesi, quando al produr i suoni sono in duplicata inversa delle lunghezze delle corde.

Se si prende $\frac{1}{3}$ di corda, lasciando l'altra intiera; benchè la intiera sia all'unisono colla sua terza parte, bisogna attaccare alla corda intiera un peso nove volte maggiore di quello, ch'è appeso alla più corta. adunque l'azione di peso 1. attaccato a corda 1. è la stessa, che l'azione di pesi 9. attaccati a corda 3

Corde	azione de' pesi
3 . 1	1 . 9

I pesi adunque che fanno lo stesso effetto delle segnate lunghezze, stanno in duplicata inversa delle lunghezze

Siano le lunghezze delle corde :: 3 . 2 ; pesi da pesi uguali dan la quinta Se a due corde uguali si attacchino pesi 4. 9. si ha la quinta. adunque fa lo stesso effetto quanto al suono, il ridur (salvi i pesi) le corde da lunghezza 3. a lunghezza 2., che se a corde uguali si attaccassero pesi 4. 9.

Corde	azione de' pesi
3 . 2	4 . 9

una corda

Una corda 1. con peso 1. fa lo stesso effetto che una corda quattro con peso 16. dunque lo scemare le lunghezze delle corde come 4. 1. (salvi i pesi) fa lo stesso effetto che pesi 1. 16 (salva la lunghezza)

lunghezze delle corde	azione de' pesi
4. 1	1. 16

Imporra se le lunghezze delle corde fossero $1. \frac{1}{2}. \frac{1}{3}. \frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}$ darebbero gli stessi suoni, che si avrebbero, se a corde uguali si attaccassero pesi, come 1. 4. 9. 16. 25. 36.

Corde	azione de' pesi
$1. \frac{1}{2} :: 2. 1$	1. 4
$\frac{1}{2}. \frac{1}{3} :: 3. 2$	4. 9
$\frac{1}{3}. \frac{1}{4} :: 4. 3$	9. 16
$\frac{1}{4}. \frac{1}{5} :: 5. 4$	16. 25
$\frac{1}{5}. \frac{1}{6} :: 6. 5$	25. 36

Se adunque peso 1. in corda 1. agisce quattro volte più che peso 1. in corda 2. perchè agisce tanto, quanto peso 4. in corda 2.; se peso 1. in corda 1. agisce nove volte più che peso uno in corda 3. perchè agisce tanto, quanto peso 9. in corda 3. se peso 1. in corda 1. agisce sedici volte più, che peso 1. in corda 4. perchè agisce quanto peso 16. in corda 4: E' chiaro che i pesi agiscono su le corde in ragione duplicata inversa delle lunghezze delle corde stesse

Ma egli è vero che la forza che tiene in Orbita i Pianeti agisce su di essi in duplicata inversa delle distanze de' medesimi dal Sole, o dal Primario,

intorno a cui girano. Adunque il principio medio nel medio modo opera su le corde sonore, riducendo i suoni all'armonica unità, e su i pianeti, riferendoli i medii e le parti tutte dell'Universo, e riducendole ad armonica unità.

Questo è quanto vede David Gregori (nella prefazione alla sua Astronomia) che dir volessero i Pitagorici con la loro armonia delle Sfere celesti.

Tempio V.
Colori

Esempio V
Colori
Separazione colori

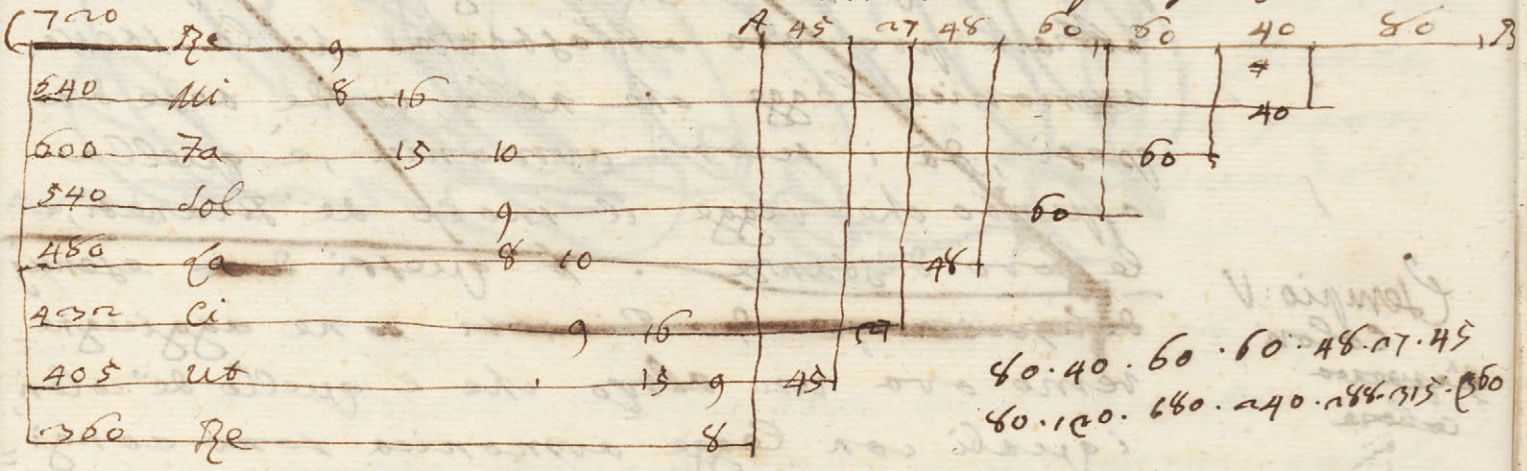
Quando poi agli esempj poi, ~~Ben~~ vi avvicorda, Udibori, che nella prima Lezione da noi fatta in questo nostro Luogo l'anno passato abbiam provato osservava che la nostra armonica Legge che nelle corde sese da pesi, da i nostri armonici, è quella appunto che regge il moto de' Pianeti, e la loro distanze. A questi ~~due~~ esempj ~~di Pesci, e de Pianeti~~ ne aggiugnevemo ora un altro che è quello de' colori, i quali con legge armonica sono congiunti in ogni raggio di luce.

Dopo che per molti secoli sono andati cercando senza frutto i Filosofi per ritrovare la vera Teoria dei colori: Finalmente con la sola esperienza il Cav.e Isacco Newton avanzò questa parte della Fisica per modo, che quanto abbiamo di certo in questa materia, di tutto a lui solo dobbiam confessare di essere debitori.

Noi fra tante cose belle da lui in questa materia scoperte, osserveremo solamente ciò che ora al nostro scopo rendesi necessario. Cioè che de ogni raggio di luce dividesi dal prisma in sette raggi colorati, che questi insieme mostrano il bianco, e che ad uno ad uno presi sempre conservano il suo colore, nè lo mutano mai, se si rifrangano con prismi, o con lenti, o se con specchj, quando uno mai, si riflettano.

Che se la imagine colorata, formata dalla rifrat. del prisma, si divida in 360 parti, di queste il color violetto ne occupa 80, l'Indico 40, il ceruleo 60, e altrove 60 il verde, 48 il giallo, 27 il dorè, e 45 il rosso. Con tale proporzione sono composti

i colori in ogni raggio di luce. E questo appunto dimostra, che i colori in un raggio di luce sono in armonica proporzione.



Sia AB la lunghezza della imagine colorata fatta dal prisma, e questa si divida in 360 parti: e gli si aggiunga la AC essa pure eguale a 360. Si divida la AB in parti simili a quelle che son occupate dai sette colori nella imagine colorata del prisma, principiando in B dalle 60 parti, occupate dal colore violetto. Sarano tutta la CB ——— 7mo
Levatene le ottanta parti del violetto, restano 640
Levate le 40 parti dell'Indico, restano 600
Levate le 60 del ceruleo, restano —— 540
Levate le 60 del verde, restano —— 480
Levate le 48 del Giallo, restano —— 432
Levate le 27 del dove, restano —— 405
Levate finalmente le 45 del rosso, restano 360
Ma questi numeri sono in armonia proporzionale; adunque lo sono pure i colori

7mo · 640 · 600 · 540 · 480 · 432 · 405 · 360
Re · Mi · Fa · Sol · La · Ci · Ut · Re

Se adunque l'armonico principio ci riceve con lo spettacolo soavissimo de' colori se l'armonico principio ci alletta coll'armonia de' suoni. Se con legge armonica sono ripercossi i Diametri nelle loro orbite:
se da principio armonico si divide la corda in 1 · ½ · ⅓
se toccando due corde si sente un 8° suono dolcissimo ecc.

Ben vedete, [illegible], che con questi esempj abbastanza si prova che l'armonico principio ha luogo nelle cose, che naturalmente si fanno. Anzi fan nascere la speranza che provare una volta si possa, aver luogo lo stesso principio ancora negli oggetti degli altri sensi, ed in altre naturali cose, le i filosofi vorranno i loro studj questa cosa che finora hanno ben troppo negletta. E quanto più esempj andassero discoprendo, tanto più ci avvicineressimo a poter conoscere, se questo principio abbia luogo in tutte le opere della Natura, e se quell'ordine delle cose, senza di cui esse non si possono perfettamente conoscere sia quella stessa ordinatissima serie, che in se comprende tutte le armoniche proporzioni. Che così sia la faccenda lo ha creduto Platone, che per quelle sue idee archetipe, a norma di cui tutte le cose son fatte altro non intese che i rapporti, e le proporzioni delle cose. E nello stesso modo ha pensato Pitagora, mentre ha detto che tutte le cose sono fatte di materia e di numeri, per i quali numeri egli ha inteso le proporzioni da essi numeri espresse, le quali mentre con certe leggi sono applicate alla materia, la dividono in specie, imprimendo ad essa le forme, a cui la materia che è in tutte le cose la stessa, diversificata in diverso modo nelle specie tutte, costituisce le varie classi delle cose, le quali classi, e specie sono costantemente

le stesse, come sempre le stesse sono le ragioni, da cui le specie stesse sono formate.

Si vuole osservare, che i spazj corsi dai gravi che cadono, in tempi eguali sono

Ne' tempi 1° · 2° · 3° · 4° · 5° · 6°

sono 1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11 n.i impari

e dal principio 1 · 4 · 9 · 16 · 25 · 36 quadrati

ma i numeri impari sono la somma de' termini delle semplici prime ragioni

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

2 · 1	2 + 1 = 3
3 · 2	3 + 2 = 5
4 · 3	4 + 3 = 7
5 · 4	5 + 4 = 9
6 · 5	6 + 5 = 11

Gli effetti adunque della gravità essendo come i numeri impari, sono come le somme de' termini delle semplici ragioni prime della progressione armonica; e le somme di questi effetti, sono come i n.i quadrati che sono la somma degl'impari. ~~Come~~ dalla serie armonica pertanto si derivano le quantità degli effetti.

derivano essi ancora dalla serie armonica 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6, la quale però nasce dalla serie armonica, come abbiamo provato di sopra.

1 + 2 = 3	1 + 3 = 4
2 + 3 = 5	1 + 3 + 5 = 9
3 + 4 = 7	1 + 3 + 5 + 7 = 16
4 + 5 = 9	1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25
5 + 6 = 11	1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36

Si potrebbe da qui prendere motivo di osservare se gli effetti di altre forze avessero ~~[illegible]~~ relazione alcuna all'armonica serie

Io so bene che questo nuovo modo di filosofare è da lungo tempo andato affatto in disuso. Onde prevveggo che parrà forse a più di uno che siavi a questi dì chi pretenda, che le ragioni e le proporzioni siano le forme delle cose, e che da queste proporzioni principalmente la loro natura dipenda. Anno addottato già i più che filosofar si deva ~~a~~ via di sperienze, acciò per mezzo di esse la natura manifesti il modo suo di operare, e quindi si deducano le proprietà delle cose, e dalle proprietà finalmente la indole e la natura delle cose stesse.

Ma si avverta che io non pretendo già che questa armonica maniera sia la sola a cui si debba filosofare; ~~ben~~ neppure so se a via di questi armonici principj si possano dilatar molto i confini della naturale filosofia. Io ~~in oggi~~ accinto mi sono solamente a proporr questa strada, come la unica a cui sono andati Pitagora, e Platone. Parendomi che così essendo la facenda, non si possa senza colpa di audacia condannare questi grandi uomini senza ridurre la cosa ad un esame: e tanto più, quanto non mancano esempj di cose naturali rette da armonico principio. Per altro abbiasi pure la dovuta stima per gli Esperimenti, i quali ancora a questo modo di filosofare sono onninamente necessarj; mentre da essi principalmente sono provedute le cose che ~~oggi~~ ova in questo proposito abbiamo detto, ~~come ancor quanto nella prima Lezione dell'anno scorso abbiamo avvanzato~~. Non sono già fra loro opposte

queste due maniere di Filosofare cioè le armoniche proporzioni, e gli sperimenti, ma possono fra loro benissimo combinarsi. Lo lodo quando a via di sperimenti si è scoperto delle proprietà, e delle forze de' corpi, e della varia loro indole. Ma vi manca ancora un principio universale che tutte queste cose congiunga e dal suo seno le cavi e le diffonda. Questo principio per merito di essere ricercato. Noi abbiam manifestato un nostro sospetto. Questo principio sarebbe Egli per sorte armonico, il cui ordine, e le cui proporzioni siano quelle appunto dell' armonica serie.?

Se c' ingannassimo, qual danno mai ne riporterebbe la naturale Filosofia.? Ma se non c' ingannassimo quanti mai e quali comodi non ne ricaverebbero i Fisici.?

Finora altre cause non si conoscono, che le infime e prossime. Ma s' ignora del tutto il principio da cui dipendono. Di queste cause che non s' ignorano, altro non se ne sa, senon se che son cause; ma cosa esse siano, e d' onde nascano del tutto s' ignora. L' osservazione, per esempio, che agisce in duplicata inversa delle distanze, si conosce che agisce così dagli effetti; ma cosa ella sia ed in qual modo ella operi, nessuno lo ha ancora scoperto. Si sa la quantità di questa forza, ma qual ne sia la natura, onninamente s' ignora. Ma se si scoprisse una volta che un armonico principio dall' interno del tutto fosse stato impresso alle cose; e da questo principio legittimamente si deducesse il modo di operare dell' attrazione: come ~~nella~~ prima

in questo stesso libro
~~Versione dell'anno scorso~~ ci siamo ingegnati di dimostrare: Non solo si conoscerebbe dalle leggi dell'osservazione sapere il modo delle pianeti, e la legge che tiene unito questo universo; ma si saprebbe ancora la natura di questa legge; e si conoscerebbe un principio armonico universale, da cui l'osservazione e tutti gli effetti di essa osservabbero la loro origine. Ed ecco già un vastissimo campo per cui l'armonica legge largamente si diffonderebbe. Le leggi inoltre de' moti e de' colori, e de' due nobilissimi sensi di cui i moti ed i colori sono gli oggetti e forse gli altri sensi ancora e gli oggetti loro dalla stessa armonica radice si troverebbero dipendenti.

Che se poi gli avversarj ci costringessero a dire cosa sia questo principio e quale sia il modo suo di operare. Prima di tutto siami lecito di osservare, che quando ancora niente sapessimo ad una siffatta interrogazione rispondere, Non sarebbe però la condizione nostra in modo alcuno peggiore di quella de' Newtoniani che ad ogni tratto ricorrono alle leggi della Natura benchè non di rado possiamo quell'armonico principio una legge di Natura; ma vi sarebbe fra loro e Noi questa importantissima differenza, che noi potressimo questo principio come una sola ed unica legge di Natura, mentre essi a tante ricorrono quante sono i fenomeni da piegarsi.

Se siamo ben lontani dal non rispondere alla loro interrogazione. Cosa è questo principio armonico? dicon essi. Cioè dimandano

quale sia la natura di questo principio. Rispondiamo franamente: Esso è armonico. Ma in qual modo opera questo principio. In quel modo (rispondiamo) in cui operar deve una forza che agisce insieme con una resistenza che reagisce. Ma d'onde sai tu, dimandano ancora, che da una forza che agisce, e da una resistenza che reagisce nascer deva questo modo di operare? Dall'esperienza, io rispondo, senza di cui niente può sapersi intorno ai corpi.

Sarebbevi adunque questa differenza fra questo e gli altri modi di Filosofare: che quelle cose che gli altri fan nascere da loro e fra loro affatto disgiunti principj: Noi le faremmo nascere da un principio comune di tutti i loro principj.

Conchiusione

Conchiusione.

Ma è tempo ormai che il nostro discorso ritorni là d'onde ci è da principio partito.

I. Conviene ai Filosofi il ricercare l'ordine delle cose, e la proporzione del tutto alle parti, e delle parti fra loro; giacchè senza conoscere questo ordine, noi con una vana lusinga ci andiam persuadendo di conoscere quelle cose, che onninamente non conosciamo.

II. Se questo ordine, questo rapporto, questa proporzione delle cose sia armonica savrebbe da seriamente esaminarsi, giacchè vi sono alcuni esempj che rendon probabile che ciò sia.

III. Se a tanto i Filosofi avvivar potessero coll'esperienza per guida, e col discorso, scoprirebbero un principio universale armonico, da cui come da fonte, e radice tutti gli altri principj inferiori trarrebbero la loro origine; e scoprirebbero quella catena, di cui la natura si serve per tenere unite tutte le cose e formarne questo bellissimo, ed ordinatissimo Universo, nel quale niente avvi di storto, niente fuor di misura, ma tutto coopera a formare la immutabile serie delle specie resa più bella dalla infinita varietà degl'individui e dai perpetui movimenti e dalle mutabilissime vicissitudini de' med.mi. I quali movimenti però, le quali vicissitudini, esse pure savrebbero rette dalle stesse leggi, e dalle medesime proporzioni

Rigorosamente

Ecco ove tendeva tutto questo nostro discorso. Cosa siavi in esso di nuovo, cosa contengi di vero, a voi lettori umanissimi, io ne rimetto il giudizio. Se queste cose nostre savranno da voi approvate, grande savà la nostra consolazione, e la approvazion vostra savà per noi un ammirino sprone che ci favà aumentare quel corso veemente, con cui ci affrettiamo di porre in tutto il nostro lume questa materia. Che se tali cose a voi non piacessero, ci lusinghiamo almeno (che è la astrazione) che i nostri sforzi non vi saran dispiaciuti. Ciò ci farà vedere i nostri [illegible] ci [illegible] e ci farà conoscere, e [illegible] ci fa ciò credere da Grandezza della cosa; Giacchè nelle cose grandi, nole spesso il buon volere essere creduto bastante

Addio

Delle Ragion. e Proporzioni

Libro IV.

Del Terzo suono

Del cerchio, in cui
v'è la formaz.
del 3.° suono

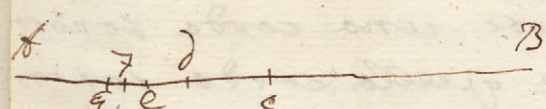
Delle Ragioni e Proporzioni

Libro V.

Del Terzo suono

e

Del cerchio, in cui v'è la formola del 3.° suono



1. La linea AB rappresenti una corda sonora. Questa corda è un dato fisico di quantità continua, non d'altro capace, che di sola divisione. I divisori son quelli dell'armonica serie 1.2.3.4.5.6; e si avrà $\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$.

Divido AB per mezzo in C, e nascono necessariamente due comparazioni, o due rapporti, o ragioni, l'uno fra la parte, ed il tutto AC · AB :: $\frac{1}{2} \cdot 1$ :: 1 · 2; l'altro fra le parti AC · CB :: 1 · 1.

Si divida la corda sonora AB in AB · Ac · Ad · Ae · AF · Ag

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

Prima c'è tutta la corda AB, e poi vi sono le parti. Se si dimanda qual sia la natura

Rapporto de' passi al tutto	Rapporto de' passi fra loro
AB assoluto = 1	AC · CB :: 1 · 1
Ac · AB :: 1 · 2	Ad · DB :: 1 · 2
Ad · AB :: 1 · 3	Ae · EB :: 1 · 3
Ae · AB :: 1 · 4	AF · FB :: 1 · 4
AF · AB :: 1 · 5	Ag · GB :: 1 · 5
Ag · AB :: 1 · 6	

di questo uno, di questa data
corda essa sonora 1/3: è mani-
festata questa natura nei due
suoni simultanei 1. 1/3 1/5 che
la corda percossa fa sentire,
cioè l'uno di tutta la corda,
e gli altri due 1/3 . 1/5 di essa corda
Ma i due numeri 1. 1/3 . 1/5, o
sia 15 . 5 . 3 sono in armonica
proporzione, e si hanno dalla
Fisica natura, non da scienza,
ed arbitrio umano; Come pure
si avrebbero da Natura i suoni
1 . 1/2 . 1/3 . 1/4 . 1/5 . 1/6 che alcuni
vogliono si abbiano tutti quanti
si percuote una corda sonora
Adunque quella corda sonora,
quel tutto, quell'uno assoluto,
è di armonica natura
Ciò si conferma dall'altro feno-
meno del terzo suono, che
risulta da due altri suoni
simultanei, descriminati o dalla
serie 1 . 1/2 ; 1/2 . 1/3 ; 1/3 . 1/4 ; 1/4 . 1/5 &c
o dall'altra 1 . 1/2 ; 1 . 1/3 ; 1 . 1/4 ; 1 . 1/5 &c
o da 1 . 1/3 ; 1/3 . 1/5 ; 1/5 . 1/7 &c
Cioè toccata due corde che siano
uguali di grossezza, ed ugual-
mente tese, e abbiano le loro
lunghezze in una delle ora
esposte ragioni: si sente per
terzo suono quel suono stesso
che nasce da tutta la corda.
Ora si osservi che moltiplicando fra
loro le due frazioni, che esprimono
una di esse ragioni, si ha sempre
un

1 . 1/3 . 1/5
15 . 5 . 3

un prodotto minore di ciascuna delle frazioni, o ragioni produ-centi $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ & e ciò perchè la moltiplicazione di due frazioni è propriamente una divisione; poichè in $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ si prende $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$, essendo la unità al moltiplicatore, come il moltiplicato al prodotto $\frac{1}{6}$

$$1 \cdot \tfrac{1}{2} :: \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{1}{6}$$

minore nella moltiplicazione degl' interi, si prende tante volte il moltiplicato, quante unità vi sono nel moltiplicatore Il prodotto per tanto di due frazioni, p. es. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, significa che per comprendere in un solo termine la misura comune delle due frazioni $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, bisogna dividere tutto AB3 in sei pezzi eguali, delle quali la misura comune è $\frac{1}{6}$. Di queste sei pezzi, la frazione $\frac{1}{2}$ ne comprende tre. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; la frazione $\frac{1}{3}$ ne comprende due. $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ Quando adunque si vuol moltiplicare AC × AD, o sia $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, cioè $\frac{AB3}{2} \cdot \frac{AB3}{3}$, e la coda AB3 si concepisce divisa in sei pezzi eguali: si moltiplicano tre pezzi della coda per due pezzi della med.ma, cioè si ha $3 \times 2 = 6$, e si ha il prodotto $= 6$, cioè a tutta la coda Così moltiplicando $\frac{AB3}{3} \times \frac{AB3}{4}$; AB3

si concepisce divisa in dodeci parti uguali (perche 12 è il minimo numero divisibile per 3, e per 4) e si moltiplicano $\frac{12}{3} \times \frac{12}{4}$, cioè 4×3 che vuol dire 4 di quelle dodeci parti della corda p ove delle medesime, e si ha il prodotto 12 = a tutta la corda.

Ciò succede perchè prendendone della corda divisa in sei parti, divido la corda, e prendo ove di quelle parti; prendendo $\frac{1}{3}$ della corda, la divido e ne prendo due di quelle parti. Moltiplicando adunque le ove parti della corda per le due vengo a disfare quanto ho fatto dividendola, onde ritorno a comporre tutta la corda.

Non sono $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3}$ dell'uno armonico le parti che moltiplico, ma sono $\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3}$ dell'uno, del tutto armonico 6. Sono $\frac{6}{12} \cdot \frac{6}{3}$ ovvero sono 3·2·, e così negli altri casi di moltiplica di frazioni, o porzioni di una corda sonora. Il numeratore 1 è eguale a tutte le parti del tutto insieme prese. La moltiplica delle frazioni diventa in questo modo una vera moltiplica d'interi, ed il prodotto $\frac{1 \times 1}{12 \times 3}$ di $\frac{1}{12} \times \frac{1}{3}$ mostra che invece del numeratore 1 si devono prendere tutte le sei parti che

che lo compongono $\frac{6\times6}{2\times3}=\frac{36}{6}=6$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1\times1}{6}$

$\frac{bB}{2}\times\frac{bB}{3}=\frac{bB\times bB}{6}$

$\frac{6}{2}\times\frac{6}{3}=\frac{6\times6}{2\times3}=\frac{36}{6}=6=3\times2$

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1\times1}{12}$

$\frac{bB}{3}\cdot\frac{bB}{4}=\frac{bB\times bB}{12}$

$\frac{12}{3}\times\frac{12}{4}=\frac{12\times12}{12}=12=4\times3$

$\frac{1}{a}\times\frac{1}{b}=\frac{1\times1}{ab}$

$\frac{ab}{a}\times\frac{ab}{b}=\frac{aabb}{ab}=ab$

$b\times a=ab$

se adunque dividerò la corda 1. in parti n°. ab; e poi la dividerò $\frac{1}{a}$, e $\frac{1}{b}$ $\frac{ab}{a}\times\frac{ab}{b}=b\times a$, il prodotto sarà sempre = a tutta la corda.

11. Sia ora la verga bB del Monocordo convertita nel diametro bB del semicerchio $bFGHB$. Tirati i seni da $bC=\frac{1}{2}bB$, $bD=\frac{1}{3}bB$, $bE=\frac{1}{4}bB$, e sono i seni CH, DG, EF, e da H,G,F, tirate le corde bH, bG, bF; e queste (fatto centro in b) siano trasferite su il diametro bB per mezzo degli archi di cerchio HM, GK, FC, in bM, bK, bC: Dico che supposto il diametro bB una corda sonora, tesa sul monocordo; e data qualsivoglia corda pendola, il cui suono con la tensione del peso 1. sia fatto unisono, o sia uguale al suono di bB: Il suono di AH

savà unisono, o sia uguale al suono della corda pendola tesa con due pesi; Il suono di BG savà uguale al suono della corda pendola tesa con tre pesi; Il suono di BF savà uguale al suono della corda pendola, tesa con 4 pesi
Per conseguenza le corde BH, BG, BF del semicerchio BHB, dalle quali si sono dedotte le eguali BM, BC, BL, pavoni del diametro BB, savanno le prime forme, e le prime leggi di questo fatto della uguaglianza de' suoni fra la corda pendola, tesa per la serie 1. 2. 3. 4 de' pesi uguali, e la corda BB del monocordo, divisa secondo la serie delle corde del cerchio in BM, BC, BL
Si vuol prima di tutto trovare la proporzione fra BB, BH
BB. BH. BG. BF
questo è 1. $\sqrt{1/2}$. $\sqrt{1/3}$. $\sqrt{1/4}$
Io provo BB = 1 = 60
BC = 1/2 = 30
BD = 1/3 = 20
BE = 1/4 = 15
$\overline{BB}^2$ = 3600
$\overline{BH}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CH}^2$ = 900 + 900 = 1800
$\overline{BG}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DG}^2$ = 400 + BD×DB = 400 + 20×A
= 400 + 800
= 1200
$\overline{BF}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{EF}^2$ = 225 + BE×EB
= 225 + 15 × 45 = 225 + 675 = 90

Dunque

Adunque $\overline{AB}^2 \cdot \overline{AH}^2 \cdot \overline{AG}^2 \cdot \overline{AF}^2$
sono 3600. 1600. 1100. 900
come 36. 16. 12. 9
come 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$

Adunque $AB \cdot AH \cdot AG \cdot AF$
come $\sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$
Infatti i quadrati delle corde stanno come i seni versi di la 8ª. e 17ª. del VI°. di Eucl.
adunque $\overline{AH}^2 = BAC$
$\overline{AG}^2 = BAD$
adunq; $\overline{AH}^2 : \overline{AG}^2 :: BAC : BAD :: AC : AD ::$
$:: \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$
$\overline{AG}^2 : \overline{AF}^2 :: BAD : BAC :: AD : AE :: \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$.

Ora vengo alla proposizione principale, premettendo in questo fatto la esperienza alla dimostrazione. Pongasi un filo mobile, o sia cagnello fra l'asse del monocordo, e la corda tesa nel punto M del diametro AB, convertito nuovamente nella corda AB del monocordo. La corda pendola (qualunque sia, purchè sonora) si faccia unisona al suono della corda AB con la tensione di un dato peso, vago relativo alla magg.re o minor resistenza della corda pendola. Aggiunto il 2do peso eguale al 1°, il suono della corda pendola si ha eguale al suono della corda AM.

Portando tu 't piano dell' ab
del monocordo il fulvo mo-
bile al punto C della AB;
ed aggiugnendo alla corda
pendola il terzo peso uguale
agli altri: I due suoni di B
e della corda pendola ti hanno
unissoni. Portando il fulvo
mobile al punto C, ed aggiu-
gnendo alla corda pendola
il 4°. peso, ti hanno i due
suoni unissoni &c. serie indefinita.

Questa esperienza per se stessa
dimostrava la verità del fatto,
perchè i due suoni AB, AC
del monocordo, essendo due
suoni irrazionali fra i due
razionali di AB, e di AC, ed
essendo intermedj fra gli estremi
dupli AB, AC, cioè fra 1. $\frac{1}{2}$.
Incontrandosi gli estremi di
suoni razionali con gli estremi
di suoni razionali de' pesi
1. 4 della corda pendola,
se sono veri gli estremi unis-
soni, lo saranno pure gl' in-
termedj irrazionali; perchè il
rapporto de' suoni si nella
corda del monocordo, che
nella corda pendola, dipende
da due serie regolari, e rispetto
ai Dabi, omninam.te necessarie.

Ma questa verità è dimostrabile
indipendentemente dalla espe-
rienza nel sistema de' pesi, in cui
i suoni razionali si hanno dai

pesi

peri di numero quadrato, e gl' irrazionali dai peri interme dij fra i quadrati.

Se nella corda pendola dai peri 1. 4. si hanno i due suoni razionali in ragion dupla; adunque dai peri 2. si avrà il suono medio proporzionale fra i suoni de' peri 1. 4. cioè fra i suoni 2. 1, cioè si avrà il suono della corda Att, ch'è media proporzionale fra ♯B. ♯C, fra 2. 1.

Se dai peri 1. 9. si hanno nella corda pendola i due suoni razionali in ragion tripla; adunque da' peri 3. si avrà il suono medio proporzionale fra i suoni de' peri 1. 9; cioè fra i suoni 3. 1 il qual suono medio sarà quello della corda ♯G che è media proporzionale fra ♯B. ♯D, cioè fra . - - - 3. 1

Finalmente se dai peri 1. 16. si hanno i due suoni razionali in ragion quadrupla; adunque da' peri 4. si avrà il suono mezzo proporzionale fra i suoni ~~de~~ de' peri 1. 16. si avrà stanno da' peri 4. il suono che è mezzo proporzionale dalla corda ♯F media fra ♯B. ♯E cioè fra 4. 1. Ma ♯A. ♯G. ♯F sono regnali ad. A. ♯C. ♯C. adunque

la legge di questo fatto si ha nelle corde del cerchio.

Premessa così la prova Fisica, e dimostrativa del fatto, passi in 2do luogo all'esame delle oscillazioni della corda pendola, e delle vibrazioni della corda BB su i due accordi musicali: l'uno consonante della sesta minore la di cui forma è nelle proporzioni $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8} :: 5 \cdot 8$, e l'altro dissonante nella nona, la cui forma è nelle proporzioni $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9} :: 9 \cdot 4$. Notando che l'essere uno di questi accordi consonante, e l'altro dissonante è l'uno, e l'altro composti, è conosciuto vero comunemente da tutta la Musica Famiglia. La sentenza, e dottrina de' Filosofi, e musici moderni, desume la cagione, e la ragione dell'accordo consonante dalla unità equitempovanea delle già loro diverse vibrazioni, ed oscillazioni, e dal loro N°. minore, come più semplice del maggiore e però più atto, non già nel rovescio delle med.me, ma nel loro effetto di unione nel far muovere dalle onde dell'aria il timpano dell'orecchio, e però nel piacevole con piacere dall'udito, fino ad un determinato segno,

e confine

e confike ; olove di cui va cessando il piacere a misura del n° magg.e delle vibrazioni, che sempre più cvescendo, con= fonde sempre più l'vdito nella percezione dell' accordo

Questa sensazione, e dottrina è fondata nelle coincidenze, in cui si risolvono le vibrazioni ed oscillazioni. Dato, per esempio l'accordo consonante in sesquialtera fra $\overline{bc} \cdot \overline{bd} :: \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} :: 3 \cdot 2$ della corda $\overline{bB}$ che è il diapente, o sia la quinta, le vibrazioni di $\overline{bc} = \frac{1}{2}$ saranno 2; di $\overline{bd} = \frac{1}{3}$ saranno 3. e saranno equitempovanee alla vibrazione = 1. della corda $\overline{bB}$.

Moltiplicando $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$: la coinci= denza comune in $\frac{1}{6}$ di $\overline{bB}$, la quale non solo determina la divisione di $\overline{bB}$ in sei parti eguali, la cui metà, $\frac{\overline{bB}}{2} = 3$; $\frac{\overline{bB}}{3} = 2$; ma in olove le determina fisicamente; essendo noto per comune esperienza, che sottoposto un fulvo artificiale alla stessa parte della corda, presa dall'uno, o dall'altro capo: la vibrazio= ne di questa parte aliquota determina, e produce i fulvi naturali delle vibrazioni eguali alla prima di $\frac{1}{6}$, nel vestibolo di $\frac{5}{6}$ della detta corda, senz'altro bisogno di fulvi artificiali.

Ciò fa vedere, che se in questo
proposito si sono ingannati
soggetti insigni, un tal ingan-
no è compatibile; Poichè chi
mai non s'ingannerebbe, vedendo
prevenuto dalla dimostrazione,
e dalla sperienza, per dover
attribuire la cagione, e la
ragione della consonanza
alle vibrazioni, ed oscillazio-
ni? Eppure non è così.

Poichè come si salva, secondo
questa Teoria, la manifesta
contradizione di tal sentenza
e dottrina ne' due sopra
assegnati intervalli, il con-
sonante $= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}$, la cui coincidenza
è in $\frac{1}{40}$; ed il dissonante
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{9}$, la cui coincidenza
è in $\frac{1}{36}$.

Se il nº minore della coinciden-
za si trova nell' intervallo,
o sia accordo dissonante;
ed il magᵉ nel consonante;
significando il detto numero
che le vibrazioni dell'inter-
vallo dissonante si risolvono
in $\frac{1}{36}$ della corda BF; e del
consonante in $\frac{1}{40}$ della stessa
corda BF: sarà certamente
più difficile all'udito il
percepire le 40 parti di BF
che le 36. nella unità dell'
effetto. Ma le 40 sono dell'
accordo consonante, e le 36. del
dissonante. Vi è adunq. manifesta

contradizione

contraddizione in tal sentenza e dottrina. E' quanto siasi studiato finora di sostenerla con solide ragioni: Chiunque è avverso a giusto ragionare, benchè inesperto di Musica, non può non avvedersi, che il fatto è incompatibile con la proposta cagione, qualora più unicamente vivo, che l'intervallo 5.8. è consonante, e quello di 4.9. è dissonante. lo che è vero di consenso comune.

L'o sbaglio precisamente consiste nell'essersi confuse due ragioni ben distinte in una sola comune. Le vibrazioni, oscillazioni, tensioni, tremori delle pavoje, sono effetti della elasticità di un corpo che non può essere sonoro, se non sia elastico; e però la elasticità in genere è la cagione del suono: cosa evidente nell'elemento dell'aria, la di cui elasticità resa nulla, o quasi nulla, nella macchina del Boyle Pneumatica, non dà più suono.

Ma questa cagione nulla ha che fare con l'accordo de' suoni che già si suppongono ordinariamente fatti, e stabiliti dalla elasticità ne' fisici corpi sonori; i quali dovendo

posteriormente stabiliti fra loro in accordo, o consonanze o dissonanze: è chiaro che la cagione, per cui sono sonori, non può essere la cagione, per cui sono consonanti, o dissonanti; e che per ottenere questo effetto è necessaria un'altra cagione ben diversa. Se adunque prima dell'accordo de' suoni, è necessario supporre i corpi sonori, e questi non possono esser sonori, senonchè per mezzo della elasticità: la elasticità diventa la causa istrumentale, il suono è la causa materiale, e per l'accordo de' suoni manca la causa formale.

Eppure è succeduto il contrario. Essendo inseparabile la vibrazione dal corpo sonoro (altrimenti non è sonoro) si è preso il suono per la materia, e le vibrazioni per la forma; Nè si è avveduto che l'armonia musicale (sia simultanea, o successiva) non è un suono, ma un accordo di più suoni; e se ha per oggetto materiale il corpo sonoro, non ha per oggetto formale un solo corpo sonoro, ma la unione di più corpi sonori. La sola parola Armonia bastava a far capire questa

verità, nulla meno che ciò
costa una qualunque dottrina
= la causa [redacted] esiste nelle va=
=gioni, e proporzioni applica=
=te ai corpi sonori. Le va=
=gioni, e proporzioni esisteva=
=no fisicamente nel corpo sonoro,
= prima di essere applicate al
= mes suo dalla umana diteggiazione.

Questa proposizione esigge due
prove separate. L'una che
applicando le ragioni, e pro=
porzioni ai corpi sonori, ottie=
niamo la causa formale del
loro accordo, e di conseguenza
dell'armonia; l'altra che
prima di applicarle, esistevano
fisicamente nei corpi sonori,
indipendentemente dalla umana
diteggiazione.

Incominciando dalla prima,
si applichi la forma o sia
ragione dupla r. 1. alla corda
BB = r. ed alla sua metà = 1;
si avranno i due suoni succes=
sivi r. 1. cioè la ottava.
Si facciano simultanei in
due corde separate = r. 1;
si avrà fisicamente un terzo
suono = r. in una corda aerea
elastica, formata dalla collisio=
ne fra loro de' due volumi
di aria, mossi dalle dette due
corde; e questo terzo suono
essendo = r; sarà unisono
al suono di tutta la corda BB = r

Quindi si ha una numerica formola di questo terzo genere, la quale regge fisicamente per serie indefinita delle prime formole de' due primi generi, molteplicate, supposticolate, e reperpavicate. Questa si ha nel solo numero, moltiplicando fra loro i numerici termini della ragione, in cui si trovano i due dati suoni; il prodotto sarà il terzo suono per serie indefinita de' due generi suddetti. Perciò nella proposta ragione n. 1. si verifica che il 3.° suono (=x) sia unisono, o sia eguale al suono della corda $\overline{BB}=x$, perchè $1\times x=x$.

A confronto di questa formola si esamini la formola delle vibrazioni di $\overline{BB}=1$; $\overline{BC}=x$, cioè di $\overline{BB}$ che fa una vibrazione intanto che $\overline{BC}$ ne fa x. Moltiplicati fra loro questi numeri delle vibrazioni, il prodotto x dimostra non il suono di $\overline{BB}$ che è di una vibrazione, ma il suono di $\overline{BC}$ che è di due vibrazioni. Adunque non regge al bisogno. Si esamini nella frazione $\frac{1}{x}$ moltiplicata per la unità $\frac{1}{x}\times 1=\frac{1}{x}$. Egualmente non regge, perchè il terzo suono è $=1$, e non già $=\frac{1}{x}$.

È adunque

È adunque chiaro, che in questo fenomeno il solo numero ha luogo, e che positivamente dinota, non le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, ma le fisiche grandezze delle parti della corda, bc, bd, be, relative alla grandezza totale della corda bf. La grandezza di bc, relativa alla grandezza di bf, è fisicamente :: 1 . 2 . di bd . bf :: 1 . 3 ; di be . bf :: 1 . 4 ?

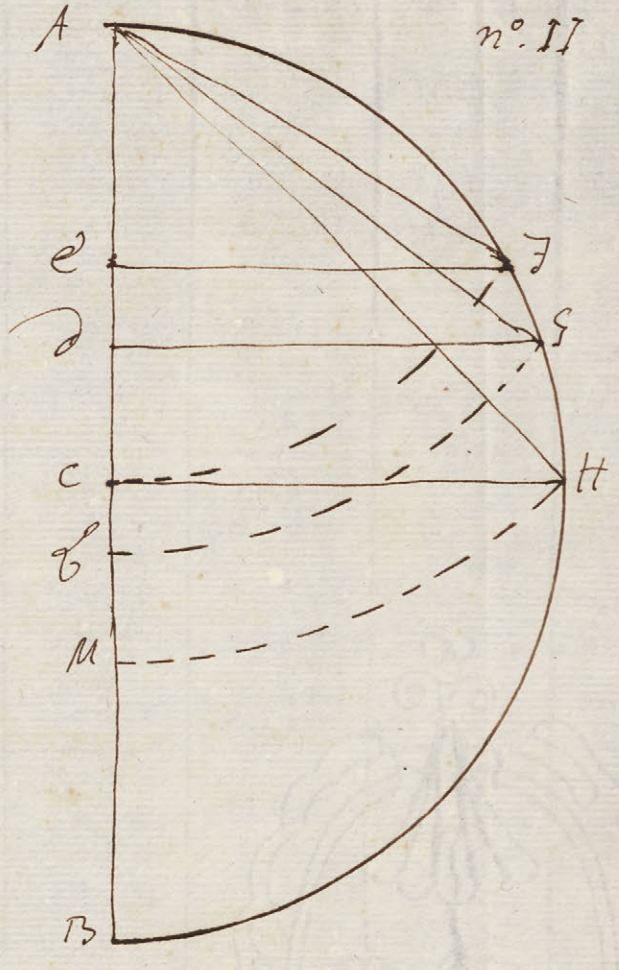
Quindi è che in questa serie molteplice, adoprando la formola delle frazioni $\frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3}$?; ed adoprando la formola delle fisiche grandezze $1 \times 2 = 2$; $1 \times 3 = 3$?; Nella prima risulta in prodotto la frazione, e nella seconda l'intiero. Ma fisicamente si ha l'intiero, non la frazione. Adunque adoprar si deve la formola delle fisiche grandezze, e non quella delle frazioni.

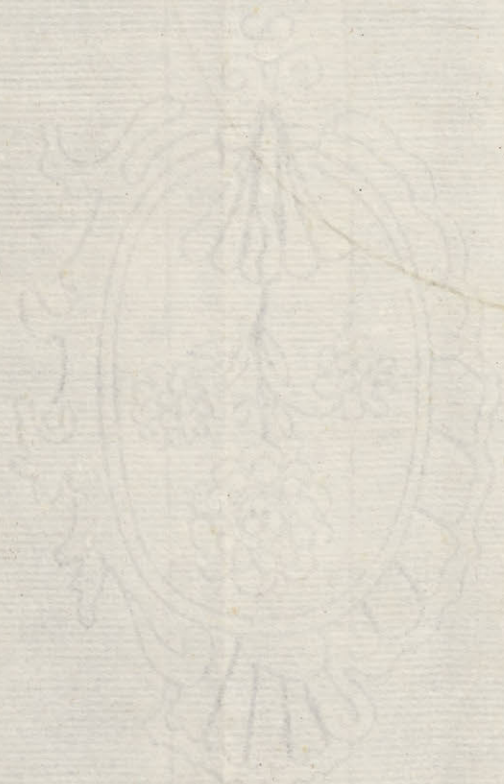
Così nella serie ripartitore $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ nelle frazioni; e nelle grandezze $2 \times 3 = 6$. Il terzo membro è fisicamente $= 6$, e non già $= \frac{1}{6}$. E così pure nella serie ripartitore delle frazioni $\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$; e nelle grandezze $3 \times 5 = 15$. Il terzo membro è fisicamente $= 15$, e non già ad. $\frac{1}{15}$.

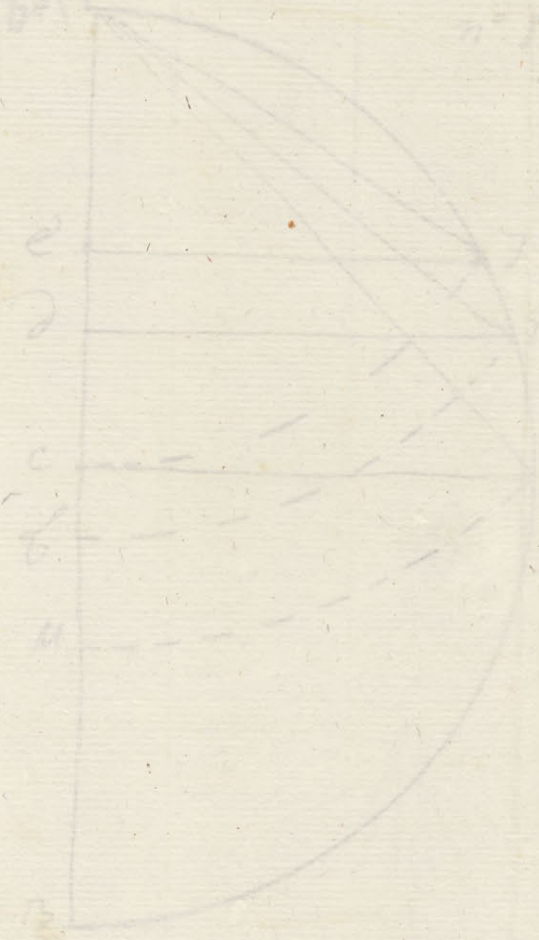
Se adunque è necessario determinare, ed assumere in primo

luogo le grandezze ϕ avere la
misura fisica e dimostrativa
del prodotto nella formola
del vero suono: è chiaro che
da ognuno di queste grandezze
essendo fisicamente inseparabili
le vibrazioni, perchè sono
grandezze di corda sonora;
le vibrazioni corrisponderanno
fisicamente alle grandezze,
ma non per questo determi-
neranno l'accordo, che già
è anteriormente determinato
dalle rispettive grandezze; e
nulla più favranno che legge
la loro natura, rispettivamente
a ciascuna grandezza della corda
ma le grandezze sono anterior-
mente determinate dalle numa-
riche forme, o piano vagioni.
1.2; 2.3; 3.4 &. Adunque la
causa degli accordi de' suoni,
(e per conseguenza dell'armonia)
esiste nelle vagioni applicate
alle date parti di ϕ, perchè
queste determinano le fisiche
grandezze di dette parti.
Si opporrà forse che se ciò si verifica
nella corda ϕ, rispetto alle
sue parti; Non si verifica
certamente in tanti corpi
sonori costituenti una musica
di voci, e strumenti, diversi
di mole, di materia, di figura,
di grandezza ϕ, insomma dal tutto
fra loro dell'ottava vagepèi,
e diversi

Terzo suono
n°. II







e diversi. Ma questi non
saranno mai fra loro in accordo,
e per conseguenza in armonia,
se insieme non si verifichi la
legge delle vibrazioni, ed oscilla-
zioni - Adunque la vera legge
degli accordi, e dell' armonia
è questa delle vibrazioni
ed oscillazioni, e non quella
delli pavoi della corda, che è
puramente speciale.

Ma si risponde che la legge
dell' uno in se stesso cioè
dell' uno diviso nelle sue
parti, che vuol dire la serie
armonica $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c è la
essenzialmente prima, ed ori-
ginale; e la legge dell' uno
fuori di se stesso, cioè dell'
uno aggiunto ad un altro uno,
che vuol dire la serie
arithmetica $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ &c, è ne-
cessariamente derivata, e
posteriore. Ma la legge dell'
uno in se stesso è la dimo-
strata nella corda BF. Adunq.
non solo è essenzialmente
prima, e generale, ma è
originale. Ciò è sarà vero,
quando che le parti della
corda BF, congiunte ne'
loro nodi determinati
dalla ragione, non produ-
cono il terzo suono, ma

benì lo suoprono quale nel suo principio primo, ch è l'armonica unità, e però l'uno come tutto, e continuo. Si chiede se sia prima il tutto 6B3, o le sue parti; conviene rispondere che per dividere in parti il tutto, conviene che a questa divisione preesista il tutto come uno, e continuo. Le adunque nel terzo suono le parti fanno sentire il tutto = 6B3, altro non può concludersi, senonchè le parti si risolvono nel suo tutto come in loro principio primo, nè mai che lo producano, come loro effetto. Ma questo in 6B3 è il principio originale, perchè 6B3 in se stesso è uno, tutto, e continuo; ed il terzo suono, che si ha dagli accordi uguali alle parti di 6B3, è unisono, o sia uguale al suono di 6B3. Adunque il terzo suono è il principio generale degli accordi e per conseguenza dell'armonia; o sia il principio generale dell'armonia è il principio armonico impresso alle cose, il qual principio è la causa del terzo suono. Ma il terzo suono si ha dalla numerica formola, ch'esprime le fisiche parti della corda sonora

antecedentemente determinate dall'armonica numerica formula, o sia ragione; e non si ha dalla formola delle vibrazioni, nè delle frazioni: dunque il principio originale rimane, qual era prima, dimostrato nel terzo suono, o nella causa di esso.

Che da questo principio originale dell'uno in se stesso, ossia della serie armonica, derivi poi la legge posteriore dell'uno fuori di se stesso, o della serie aritmetica: la massima prova ne è appunto il fatto de' corpi sonori eterogenei, e diversi, approvato poi anzi per la massima delle opposizioni. Da' due corpi sonori, quanto si voglia disparati fra loro, si abbiano i due suoni unissoni ai suoni di 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ della corda BB: si avrà il fisico terzo suono unissono al [redacted] suono della corda BB, ch'è l'esemplare. Siano poi quanti più si vogliano: sarà sempre vero che quando i loro suoni siano determinati dalla legge originale della corda BB armonicamente divisa per la serie delle frazioni; il loro terzo suono, sempre più sensibile secondo il loro numero magg.

/avà unisono al suono della
corda BB.
Ecciò poi da questi corpi diparo
/i abbiano i toni, o i gradi pa
unisoni ai suoni dell'esempi
re BB: E' veriſſimo che le
loro rispettive vibrazioni,
oscillazioni, e tremori delle
onde, devono essere determi
nati dalle forme 1.2 della
duplo 1.½; 1.3 della tripla
1.⅓; 1.4 della quadrupla
1.¼ &c. Ma è ben altrettanto
vero, che queste diventano
cause ipotenusali inservien
e divette alla causa formale
della fisico armonica unità
del terzo suono, in cui, come
in principio originale, si risol
vono fisicamente gli accordi
e di conseguenza l'armonia
delle parti, congiunte tutte
nella unità di questo prin
cipio, ugualmente che le
frazioni tutte si risolvono
in BB.

Questo è stato, ed è precisamente
l'equivoco de' musici mo
derni, i quali si sono fermati
nelle vibrazioni, ed oscilla
zioni, come in ultimo termine
del fisico progresso di questo
fenomeno. Brevano ragione,
perchè non si era ancora
scoperto il fenomeno del
terzo suono, che è l'ultimo

termine

vermi pe di questo progetto.
Quindi è necessaria conseguenza
il supposto ultimo termine
delle vibrazioni, ed oscilla=
zioni, diventa merso, dicea.
a questo fine, che cadi
dire, causa isbomentale,
diceva a questa causa formale

Rimane a provarsi, che le
vazioni, e proporzioni esi=
stevano nel corpo sonoro
prima di ogni umana
dissegnazione. Ma qui non
v'è bisogno di prova, poichè
questo è un fatto nel fenomeno
della detta corda sonora, in
cui oltre il suono della
corda intiera, s'odono i
due suoni unisoni ai due,
che si hanno da $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{5}$ della
stessa corda. Ma $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ è
armonica proporzione;
e se realmente vi siano
i più suoni $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$:
questa pure è un'armonica
progressione a serie. Dunq.
indipendentem.te dalla umana
dissegnazione, vi è un'armo=
nica legge di vazioni, e
proporzioni, fisicamente
impressa nella detta corda
sonora, da un armonico
principio (qualunque esso sia)
che non può non essere
proibitivo, e reale, poichè il

fisico effetto ne è positivo, e reale

Si osservino intanto questi due fenomeni fisico-sonori ove, o più suoni della corda $\overline{OB}$ in armonica proporzione, e serie; ed avvero suono, che si ha dai suoni delle armoniche parti della stessa corda $\overline{OB}$. Il primo procede armonicamente dal tutto alle parti; il secondo risolve armonicamente le parti nel tutto; ed in entrambi così succede nella corda $\overline{OB}$, ch'è l'uno in se stesso, e succede indipendentemente da arbitrio umano.

111°. Abbiamo detto ancor in altro luogo, cioè nel 3°. Libro che potte due corde sonore, date nel monocordo, ugualmente grosse, ed ugualmente tese, una lunga $\frac{1}{2}$, l'altra lunga $\frac{1}{3}$; ed è $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3 : 2$. Ed eccitati in esse due suoni contemporanei: si sentono tre suoni; cioè quello della corda = 2; quello della corda = 3, e quello di tutta la corda = 6. E se le lunghezze fossero $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$: oltre il suono di esse due corde si sente il terzo suono di tutta la corda = 15. Se le lunghezze fossero $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} :: 5 \cdot 4$; il 3°. suono è quello di tutta la corda = 20

Nel 1°. caso, 3°. suono = $2 \times 3 = 6$

Nel secondo $= 3 \times 5 = 15$

Nel terzo $= 4 \times 5 = 20$

Si avverta (lo che abbiam avvertito ancora nel luogo ora citato) che 6. 15. 20 in tutti ove i casi rappresentano tutta la corda = 1. divisa nel 1°. caso in sei parti uguali; nel 2do in 15; e nel 3°. in 20.

Il 3°. suono induce sempre ad armonica serie i due suoni delle due corde che nello stesso tempo si toccano.

$\Gamma \cdot 3 \cdot 6$ $\quad 1 \cdot \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad 60 \cdot 30 \cdot \Gamma 0$ tripla determinata ad.ca prop.

$3 \cdot 5 \cdot 15$ $\quad 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ $\quad 60 \cdot \Gamma 0 \cdot \Gamma\Gamma$

$4 \cdot 5 \cdot \Gamma 0$ $\quad 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ $\quad 60 \cdot 30 \cdot \Gamma 0 \cdot 15 \cdot \Gamma\Gamma$

$\frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{1}{3}$

$5 \cdot 6 \cdot \Gamma 30$ $\quad 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ $\quad 60 \quad \Gamma 30 \cdot \Gamma 0 \cdot 15 \quad \Gamma\Gamma \cdot \Gamma 0$

$\frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$

$\Gamma \times 3 = 6$ $\quad 6 \cdot 3 \cdot \Gamma$. tripla determinata ad.ca proporz.

$3 \times 4 = 1\Gamma$ $\quad 1\Gamma \cdot \underset{6}{} \quad 4 \cdot 3$. quadrupla, manca il termine $\cdot 6 \cdot$

$4 \times 5 = \Gamma 0$ $\quad \Gamma 0 \quad \underset{10 \cdot 6\frac{\Gamma}{3}}{} \cdot 5 \cdot 4$ quintupla, mancano $\cdot 10 \cdot 6\frac{\Gamma}{3}$

$5 \times 6 = \Gamma 30$ $\quad \Gamma 30 \quad \underset{15 \cdot 10 \cdot 7\frac{1}{\Gamma}}{} \quad 6 \cdot 5$. sestupla mancano $15 \cdot 10 \cdot 7\frac{1}{\Gamma}$

$6 \times 7 = 4\Gamma$ $\quad 4\Gamma \cdot \underset{\Gamma\Gamma \cdot 14 \cdot 10\frac{1}{\Gamma} \cdot 8\frac{\Gamma}{3}}{} \quad 7 \cdot 6$. settupla, mancano $\Gamma\Gamma \cdot 14 \cdot 10\frac{1}{\Gamma} \cdot 8\frac{\Gamma}{3}$

$\frac{6 \cdot 3 \cdot \Gamma \quad 60 \cdot \Gamma 30 \cdot \Gamma 0}{1\Gamma \cdot 4 \cdot 3 \quad 60 \quad \Gamma 0 \cdot 15}$ $\quad \underset{30}{}$

$\frac{\Gamma 0 \cdot 5 \cdot 4 \quad 60 \quad 15 \cdot 1\Gamma}{\Gamma 30 \cdot 6 \cdot 5 \quad 60 \quad 1\Gamma \cdot \Gamma 0}$ $\quad \underset{30 \cdot \Gamma 0}{}$

$\frac{\Gamma 30 \cdot 6 \cdot 5 \quad 60 \quad 1\Gamma \cdot \Gamma 0}{4\Gamma \cdot 7 \cdot 6 \quad 4\Gamma 0}$ $\quad \underset{30 \cdot \Gamma 0 \cdot 15}{}$

$70 \cdot 60$

$\Gamma\Gamma 0 \; \Gamma 40 \cdot \frac{60}{7}$

$\Gamma\Gamma 0 \; \Gamma 35 \; \Gamma 30$

$4\Gamma 0 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot 70 \cdot 60$

$\Gamma 10 \cdot 140 \cdot 105 \cdot 84 \cdot 70 \cdot 60$

$1 \cdot \frac{1}{\Gamma} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$

cioè. data la serie aritmetica $1 \cdot \Gamma \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$, moltiplicati fra loro a due a due i denominatori vicini

vicini (si eccettuino i due primi
1. 2. formanoi la ragion dupla)
Il terzo termine, che ne risulta
determina i due termini a
serie armonica; e questa
incomincia da una determi-
nata armonica proporzione

IV.° Ci accingeremo ora a provare
che dal terzo nuovo si ha scien-
za positiva e reale della
consonante armonia, di cui
non è vero che alcuni principj
non ci siano, se non se il
piacere che dà all'orecchio
Dalla sola Musica si ha la vera
intelligenza delle ragioni, non
solo in genere per quella di-
letevole armonia, che procede
dall'applicazione di esse
ragioni ai corpi sonori, e che
ha la facoltà di arrivare a
dominare negli animi umani,
ma ancora in specie e precisi-
one per quel terzo nuovo, che
risulta da ciascuna ragione,
applicata a' corpi sonori, come
abbiam provato a suo luogo.
Questo terzo nuovo è stato scoperto
dal celebre Sig.r Giuseppe Tartini
nel 1714. in Ancona, e da
lui stampato nel 1754. nel
suo trattato di Musica, e comu-
nicato a molti celebri mate-
matici, ma da loro
poco compidevato, come apparisce

unicamte alla musica, perche
è il basso fondamentale della
armonia
la formola del 3°. suono risolve
tutte le indefinite ragioni
nell' armonica unità, ch'è il
principio, ed il tutto della serie
armonica.
Da questo terzo suono si deducono
i numeri consonanti, e la
ragione, da cui sono tali; cioè
si deduce la scienza dell'armonia,
indicata, e dedotta dal
terzo suono
Infatti = la consonante armonia
= è la congiunzione delle parti
= nella unità del tutto.
Perchè quanto più le parti
sono congiunte nella unità
del tutto, tanto più
l'armonia è consonante
nel suo effetto, ch'è il piacere
dell'udito; e però la perfet-
tissima consonante armonia
è la perfettissima congiun-
zione delle parti nella
unità del tutto. Dati p.es.
in simultanea consonante
armonia tre suoni
in ragione di $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$: Questa
armonia non sarà così
perfetta, come lo sarà
coll' interporvi fra $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$
il mezzo armonico $\frac{1}{3}$
similmente dati tre suoni
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$. l'armonia non
sarà

60

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$

30. 15. 12

20

non sarà così perfetta (come ovvero provando la dupla $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{0}$: al suo vero luogo in $\cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$ · Lichè si abbia $\cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ · Evidentissimo magr piacere dell'orecchio prova quanto abbiamo asserito.

Si ha adunque dal terzo suono scienza positiva, e reale della consonanze armonia; e non è vero, come si è creduto dai musici, e da altri fra i Filosofi, che consonanza sia quella che piace all'udito, e dissonanza quella che dispiace, e nulla più. Poichè nella unità del 3° suono ritrovandosi la cagione della consonanze natura, e la notizia della cagione formando vera scienza, con ciò si verifica precisamte il detto di Platone, in cui asserisce che nell'albo suono, che odesi fra lo spazio de' suoni, v'è la cagione, per cui i numeri consonanti siano tali

Rimane da verificarsi l'altra parte dello stesso detto che dice ovvero si lo stesso mezzo quali siano i numeri armoniosi, o sia consonanti. Nella Musica attuale cinque sono le ragioni consonanti

Dupla $1 \cdot \frac{1}{2} :: 2 \cdot 1 :: 60 \cdot 30$

Sesquialtra $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} :: 3 \cdot 2 :: 30 \cdot 20$

$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} :: 4 \cdot 3 :: 20 \cdot 15$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} :: 5 \cdot 4 :: 15 \cdot 12$

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} :: 6 \cdot 5 :: 12 \cdot 10$

Due sono i modi, magre e minore; armonico, aritmetico di questa consonante armonia cioè l'armonica espressa dalle frazioni in armonica progressione $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$; dal numero $60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$; e questa praticamente si chiama del modo magre; e l'aritmetica espressa dal numero in aritmetica progressione

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60$

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \mid 60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \mid 10 \cdot 20 \cdot 30 \cdot 40 \cdot 50 \cdot 60$

e questa praticamente si chiama del modo minore

Questi due modi essendosi fino alla sesquipla.; il magre da .1. fino ad $\frac{1}{6}$; ed il minore da .1. fino a .6.: è chiaro che i numeri consonanti devono esser .6., non più, nè meno.

Ma quì appunto s'incontra la massima difficoltà della consonante armonia: Difficoltà finora inspugnabile, che da ridotto, e mantiene i Musici ed i Fisico-matematici nella disperazione di scioglierla. Questa consiste in due punti

Primo. La consonante armonia è determinata

$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$

è determinata con tal rigore al sestuplo confine, che oltrepassandolo di qual si voglia ragione, che non sia delle replicate della sestupla, ma diversa: il consonante risorto inevitabilmente si cambia nel più consonante, ch'è il dissonante risorto. Dopo $\frac{1}{6}$. armonico succede immediatamente $\frac{1}{7}$, dopo 6. aritmetico succede 7., la ragione formata da $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$, ovvero da 6.7. è dissonante. E così è di qualunque aggiunta ragione, diversa dalle cinque costituenti la sestupla. Quale è adunque la ragione di questo cambiamento totale di natura fra $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$; o fra 6.7, o fra quale altra ragione si assegni? Dopo infinite, ma vane ricerche, la cagione non si sa, e si confessa di non saperla.

Secondo punto. Il modo maggiore consonante, che è l'armonico, (praticamente di Terza magg.) è determinato fisicamente consonante dal 5°. suono = 1. come quì sopra si è spiegato. Il modo minore consonante, ch'è l'aritmetico (praticamente di Terza minore) non solamente non è, nè può essere determinato consonante dal terzo suono = 1; ma dal risorto di terza minore risultando, non

uno, ma più avvi ne ne divi-
1. 2. 3. 4. 5. 6.
1×2=2; 2×3=6; 3×4=12; 4×5=20; 5×6=
ne viene, che se questi fossero
sensibili egualmente, che i
dabi suoni, dai quali risulta
la consonante armonia del
modo minore, diverrebbe disso-
nante, nè in guisa veruna
potrebbe aver luogo nella
musica attuale.

Sebbene è più perfetta l'armonia
del modo magre; il più pre-
ed il meno non mutano
specie; l'uno e l'altro vetta
nel genere della consonante
armonia; anzi insieme costi-
tuiscono il genere universale
della consonante armonia,
la quale poi si divide nelle
due specie de' suddetti modi,
magre, e minore

Ma che il modo magre corso-
nante dipenda da una ca-
gione, ch'è la fisica del
terzo suono, e che il modo
minore dipenda certamente
da una cagione diversa dal
terzo suono, e certamente
di genere diverso dal fisico,
questa è la massima difficoltà
del suddetto punto

Questa è impossibile a sciogliersi
quando non si assegni, e di-
mostri un principio primo
ed universale della consonante
armonia

armonia, il quale conderga in se stesso i due diversi principj, come due specie diverse di consonante armonia de' due suddetti modi: e questi due principj diversi si risolvano nell' assegnato, e dimostrato principio primo ed universale, il quale conderga in se stesso eminentemente la essenza, e natura dell' armonica unità, estesa a più d'un genere; Perchè se potrebbe essere di genere Fisico, non può comprendere la consonante armonia del modo minore; se sia di genere non fisico, non può comprendere la consonante armonia del modo magre

Da ciò si rileva, che nel vero universale principio della consonante armonia deve infallibilmente ovovarsi la cagione del sestuplo consonante confine; devono ovovarsi i due diversi principj consonanti de' due modi, magre e minore

Ma la consonante armonia è la principalissima parte dell' armonica scienza; e questa è fondata nel cervello, ch' è il suo vero ed unico soggetto. Adunque nel cervello deve infallibilmente ovovarsi la

la cagione del sesquiterzo compagna confine; devono ovvero vi due diversi compagni principj de' modi magore e minore.

Così è in fatti. Dacchè Egli asserisce più che proporzione che quando la stessa formola si verifica in due soggetti diversi: questi sono necessariamente della stessa natura, e dipendono dallo stesso principio. ovvero una stessa formola si verifica nel terzo suono, e nel cerchio. adunque l'uno e l'altro sono di una stessa natura, e dipendono dallo stesso principio.

Date in serie le ragioni

1 · ½ :: 2 · 1 — 2

½ · ⅓ :: 3 · 2 — 6

⅓ · ¼ :: 4 · 3 — 12

si hanno i terzi suoni 2. 6. 12. che sono il terzo termine fisicamente posto, e voluto dalla natura, la quale con questo terzo suono fa passare i due dati suoni, ch'erano in semplice ragione all'armonica proporzione, e serie

La formola della dupla 1 × 2 = 2 è in semplice ragione, perchè vi sono due soli termini. La formola della sesquialtera 2 × 3 = 6

2×3=6 è in armonica proporzione 2.3.6. La formola della sesquiterza 3×4=12. è in armonica serie 12.6.4.3, indevopotrovi il mezzo armco. 6 fra 12.4.

Le stesse forme delle vagioni $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c piano applicate al diametro del cerchio OA sicchè OA.OB.OH.OI.OG.OM siano :: $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ e si divino i seni BC.Hd.Ie.GF.MG, e le corde OC.Od.Oe.OF.OG e le sottese AC.Ad.Ae.AF.AG relative a ciascuna vagione, cioè BC seno, OC corda, AC sottesa della dupla; Hd seno, Od corda, Ad sottesa della sesquialtera; Ie seno, Oe corda, Ae sottesa della sesquiterza &c e si assegnino poi i quadrati de' seni, corde, e sottese di ciascuna vagione; saranno

Tav. 1ª. fig. 10

dupla	$\overline{BC}^2=1$;	$\overline{OC}^2=2$; $\overline{AC}^2=2$	$1 \cdot 2 \cdot 2$
Sesquialtra	$\overline{Hd}^2=2$;	$\overline{Od}^2=3$ $\overline{Ad}^2=6$	$2 \cdot 3 \cdot 6$
Sesquiterza	$\overline{Ie}^2=3$;	$\overline{Oe}^2=4$ $\overline{Ae}^2=12$	$3 \cdot 4 \cdot 12$

$\overline{BC}^2 = AC \times CI = 1 \times 1 = 1$
$\overline{OC}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{HC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$\overline{Hd}^2 = OH \times HA = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 1 \times 2 = 2$
$\overline{Od}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{Hd}^2 = 1 + 2 = 3$
$\overline{Ad}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{Hd}^2 = 2^2 + 2 = 6$

$\overline{Ie}^2 = OI \times IA = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 1 \times 3 = 3$
$\overline{Oe}^2 = \overline{OI}^2 + \overline{Ie}^2 = 1^2 + 3 = 4$
$\overline{Ae}^2 = \overline{AI}^2 + \overline{Ie}^2 = 3^3 + 3 = 12$

1	Ma questa è la stessissima		
2	formola del terzo moto		
2	seni	corde sottese	terzi nomi
1	1	2 . 2	$1 \times 2 = 2$
2	2 . 3 . 6		$2 \times 3 = 6$
3	3 . 4 . 12		$3 \times 4 = 12$
6	Dunque il cerchio ed il 3°		
4	moto hanno ragione e proprio comune		
12			

Adunque se il soggetto Fisico cioè il 3°. suono è reale, ed il cerchio è della stessa natura e principio del fisico soggetto: sarà il cerchio egualmente reale, ed egualmente indipendente dall'umano intelletto.

La formola poi del cerchio è dedotta dai quadrati, de' quali sono radici le linee de' seni, delle corde, e delle secanti. Ma la formola del 3°. suono è di quantità razionale nel prodotto de' termini delle ragioni $1 \times 1 = 1$, $2 \times 3 = 6$ Adunque la maggiore realità è nella formola del cerchio, fondata nelle radici $\sqrt{1} \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ non nella formola del 3°. suono, espressa nel diametro la quale è fondata non nelle radici, ma ne' quadrati di esse; essendo fuori di controversia che la radice sia il fondamento del quadrato, come la è la cagione dell'effetto

Ora mi rivolgo a quella parte della obiezione che dice, essere i due principj dell'armonica unità opposti fra loro, cioè del 3°. suono, la cui unità risulta da due dati suoni, fondati sopra una retta linea

linea ₹o corda fisico-sonora, e del cerchio, la cui unità non può avere rapporto con una retta linea.

La obiezione svanisce; perchè il rapporto del terzo suono al cerchio è tale, quale è la loro formola. Ma questa è la stessa nel 3°. suono, e nel cerchio, ed è dedotta dalle stesse ragioni, costituenti l'armonica unità del 3°. suono. Adunque la loro armonica unità è la stessa di natura, e di principio; e questo principio comune sono le Ragioni. Il numero esprime tutte le ragioni; adunque dal numero è effetto il principio universale dell'armonia. La cognizione del numero Platone la fa nascere dall'Astronomia, e dalla Musica, cose reali, e non Geometriche.

n 36

V. Tav. Rispetto a M.r le serve pag. 30. e seguenti

Tav. n.° fig. 20

Teorema

V.° Col diametro BC facciasi un semicerchio, cui si tirino negli estremi B, C del diametro, le tangenti AB, CD ciascheduna uguali al raggio del cerchio, e si tiri la terza tangente BD dall'estremo del raggio, tirato dal centro, perpendicolare al diametro BC. Poi col centro C, e con l'intervallo CB si descriva il quadro di cerchio BuF, e si compisca BF, quadrato di BC.

Fatto tutto questo, dal punto u. ove la BD taglia il quadrante, si tiri il seno Mu, e dal centro la Cu, prolungandola fino che tagli in n. la tangente BA; e tirisi nE parallela ad BC, e si prolunghi la Mu in h: Sarà il rettangolo ME = BD. Poichè il supplemento Bo = uE, onde aggiunto di comune MD, ne risulta BD = ME

Similmente la per. o. ove la nE taglia il quadrante, si tiri il seno No, ed il raggio Co, prolungandolo fino che incontri in s. la Mu prolungata, e da questo punto s. tiratasi la sF, parallela ad BC: Ne risulta per la stessa ragione ME = NF Poichè i supplementi No, oF sono uguali; onde aggiunto di comune NE, sarà ME = NF e così sempre. Sono adunque gli i parallelogrammi BD = ME = NF = Rt = Bs

Cor. I

Il terzo piano è rappresentato in linea da tutta la corda AC; ed in area, o superficie dal parallelogramo AD. tutti i parallelogrammi AD. MC. NZ. RK. PB rappresentano il terzo piano.

Cor. II.

Da questa facile costruzione non sarà difficile il dedurre in quale proporzione stiano fra loro i lati di quei parallelogrammi

CK. CM. CN. CR. CP

CD. CE. CZ. CK. CX; Poichè

1° $\overline{CK}^2 = \overline{Cu}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{Mu}^2 = \overline{CM}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{4}$

$\overline{CK}^2 = \overline{CM}^2 + \frac{\overline{AC}^2}{4}$. adunque

$\frac{3}{4}\overline{CK}^2 = \overline{CM}^2$

$3\overline{AC}^2 = 4\overline{CM}^2$

$\overline{CM}^2 . \overline{CK}^2 :: 3 . 4$

$CM . AC :: \sqrt{3} . \sqrt{4}$

$CM . AC :: \sqrt{3} . \sqrt{4}$

Passo ora a ricercare la ragione di CE. CM.

$AC \times CD = CM \times CE$

$AC \times \frac{AC}{2} = CE\sqrt{\frac{3}{4}\overline{AC}^2}$

$= CE \times AC \times \sqrt{\frac{3}{4}}$

adunq; $\frac{AC}{2} = CE\sqrt{\frac{3}{4}} = CD$

$AC = CE\sqrt{3}$

$\frac{AC}{\sqrt{3}} = CE = \frac{2CD}{\sqrt{3}} = CD\sqrt{\frac{4}{3}}$

$CE . CM :: 2 . 3$

adunque $CE . CM :: CD\sqrt{\frac{4}{3}} . \sqrt{\frac{3}{4}\overline{AC}^2}$

$:: \frac{1}{2}AC\sqrt{\frac{4}{3}} . AC\sqrt{\frac{3}{4}}$

$:: AC\sqrt{\frac{4}{3}} . 2AC\sqrt{\frac{3}{4}}$

$:: \sqrt{\frac{4}{3}} . 2\sqrt{\frac{3}{4}}$

$:: \sqrt{\frac{4}{3}} . \sqrt{3} :: \sqrt{4} . \sqrt{9}$

$:: 2 . 3$

seguitando nello stesso modo negli altri parallelogrami: sarà

II°. $\overline{CH}^2 = \overline{Co}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{No}^2 = \overline{CN}^2 + \overline{CO}^2$

$= \overline{CN}^2 + \frac{4}{3}\overline{CO}^2$

$= \overline{CN}^2 + \frac{\overline{CH}^2 \times 4}{4 \quad 3}$

$= \overline{CN}^2 + \frac{\overline{HC}^2}{3}$

adunque $\overline{CN}^2 = \overline{CH}^2 - \frac{\overline{HC}^2}{3} = \frac{2}{3}\overline{CH}^2$

$\overline{CN}^2 . \overline{CM}^2 :: \frac{2}{3}\overline{CH}^2 . \frac{3}{4}\overline{CH}^2$

$:: \frac{2}{3} . \frac{3}{4} :: \frac{6}{12} . \frac{9}{12}$

$\overline{CN}^2 . \overline{CM}^2 :: 6 . 9$

$CN . CM :: \sqrt{6} . \sqrt{9}$

$CN . CM :: \sqrt{6} . \sqrt{9}$

ma $C7 \times CN = CM \times CR = \frac{\overline{CH}^2}{2}$

$C7 \times \sqrt{\frac{2}{3}}\overline{CH}^2 = \frac{\overline{CH}^2}{2}$

$C7 = \frac{\frac{1}{2}\overline{HC}^2}{CH\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{2}HC}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$

$= \frac{HC}{2\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{HC}{\sqrt{\frac{8}{3}}}$

$C7 . CN :: \frac{HC}{\sqrt{\frac{8}{3}}} . \frac{HC}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$:: \frac{1}{\sqrt{\frac{8}{3}}} . \sqrt{\frac{2}{3}}$

$:: 1 . \sqrt{\frac{8}{3} \times \frac{2}{3}}$

$:: 1 . \sqrt{\frac{16}{9}} :: 1 . \frac{4}{3}$

$C7 . CN :: 3 . 4$

$C7 . CN :: 3 . 4$

III°. sarà in 3° luogo

$\overline{CH}^2 = \overline{Ci}^2 = \overline{CR}^2 + \overline{Ri}^2$

$= \overline{CR}^2 + \overline{C7}^2$

$= \overline{CR}^2 + \frac{\overline{HC}^2}{4}$

$\overline{CR}^2 = \overline{CH}^2 - \frac{\overline{HC}^2}{\frac{4}{3}} = \overline{CH}^2 - \frac{3\overline{CH}^2}{4}$

$= \frac{1}{4}\overline{CH}^2$

$\overline{CR}^2 . \overline{CN}^2 :: \frac{1}{4}\overline{CH}^2 . \frac{2}{3}\overline{CH}^2$

$:: \frac{1}{4} . \frac{2}{3} :: 15 . 16$

$CR . CN :: \sqrt{15} . \sqrt{16}$

$CR . CN :: \sqrt{15} . \sqrt{16}$

ma $CR \times CH$

Ma $CR \times CK = \frac{\overline{CA}^2}{2}$

$$CK = \frac{\overline{CA}^2}{2CR} = \frac{\overline{CA}^2}{2\sqrt{\frac{5}{4}}\overline{CA}^2}$$

$$CK \cdot CR :: \frac{\overline{CA}^2}{2\sqrt{\frac{5}{4}}\overline{CA}^2} \cdot \sqrt{\overline{CA}^2 \times \frac{5}{4}}$$

$$:: \frac{\overline{CA}^2}{2} \cdot \overline{CA}\sqrt{\frac{5}{4}}$$

$CK \cdot CR :: 4 \cdot 5$

$CK \cdot CR :: \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} :: 4 \cdot 10 :: 4 \cdot 5$

IV° Sarà $\overline{CA}^2 = \overline{Cq}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{Pq}^2$

$$= \overline{CP}^2 + \overline{CK}^2$$

$$= \overline{CP}^2 + \frac{\overline{CA}^4}{\frac{20}{4}\overline{CA}^2}$$

$$= \overline{CP}^2 + \frac{4}{20}\overline{CA}^2$$

$$\overline{CP}^2 = \overline{CA}^2 - \frac{4}{20}\overline{CA}^2$$

$$= \frac{16}{20}\overline{CA}^2 = \frac{3}{5}\overline{CA}^2$$

$$\overline{CP}^2 : \overline{CR}^2 :: \frac{3}{5}\overline{CA}^2 \cdot \frac{5}{4}\overline{CA}^2$$

$$:: \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4} :: 24 \cdot 25$$

$CP \cdot CR :: \sqrt{24} \cdot \sqrt{25}$

$CP \cdot CR :: \sqrt{24} \cdot \sqrt{25}$

Ma $CP \times CX = \frac{\overline{CA}^2}{2}$

$$CX = \frac{\overline{CA}^2}{2CP} = \frac{\overline{CA}^2}{2\sqrt{\frac{3}{5}}\overline{CA}^2}$$

$$CX \cdot CP :: \frac{\overline{CA}^2}{2\sqrt{\frac{3}{5}}\overline{CA}^2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}\overline{CA}^2$$

$$:: \frac{\overline{CA}^2}{2} \cdot \frac{3}{5}\overline{CA}^2$$

$CX \cdot CP :: 5 \cdot 6$

$CX \cdot CP :: \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} :: 5 \cdot 6$

Ecco quanto mi è dedotto dal mio Teorema, quanto alle proporzioni de' lati de' paralleloggrammi uguali.

CM. CA.

CM · LA :: V3 · V4 :: V3 · 2
CL · CM :: 2 · 3

CN · CM :: V8 · V9 :: V8 · 3
C7 · CN :: 3 · 4

CR · CN :: V15 · V16 :: V15 · 4
CK · CR :: 4 · 5

CP · CR :: V24 · V25 :: V24 · 5
CX · CP :: 5 · 6

Cor. III.°

Se per tanto si faranno con queste proporzioni ova eguali, i rettangoli: ogni saranno uguali

$\phi d = Me = Nz = Rk = Px$ &

tutti esprimersi la formola del terzo primo, che è $\phi B \times \phi C$. Se fosse $\phi B = 1, \phi C = 2$, sarà $\phi B \times \phi C = 1 \times 2 = 2$ ma se facesti $\phi C = 1, \phi B = \frac{1}{2}$, sarebbe $\phi B \times \phi C = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Cor. IV.°

Si ha una serie di rettangoli uguali ad $\overline{Fd}$, la qual serie di rettangoli si deduce in genere dalla serie delle proporzioni q.d

2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 9 · 12 · 15 · 16 · 20 · 24 · 25 · 30 · 35 · 36 · 42 &

e si ha la serie de' rettangoli predetti uguali fra loro di area, si ha, dico, principalmente dal centro delle dette proporzioni formato

formato dai due mezzi, armonico, ed aritmetico come si vede.

Si ha in individuo il rdo rettangolo, facendo l'altezza del rdo rettangolo all'altezza del p°. :: V3. V4 ; e la base di questo rdo alla sua altezza :: r. 3.

Si avrà il 3°. rettangolo, facendo la sua altezza CN all'altezza CM del rdo :: V5. V9 e la base di questo verso alla sua altezza :: 3. 4 &

La costruzione di tanti di questi rettangoli, che danno il 3°. suono, è essenzialmente fondata in quelle specifiche proporzioni g.d.; il mezzo di cui si dimostra il cerchio armonicamente costruito

Cor. V°.

Questa serie di rettangoli di area uguale si risolve in una serie di diagonali, tutte rispettivamente uguali ad Ac, lato del semiquadrato BD, A' è il suo principio p°. Questa è quella linea che dipende dal semiquadrato circoscritto BD, e rappresenta il 3°. suono seguente coll'ottava figura. Il semiquadrato, come fig. è = 1/2 ; Il lato Ac, come linea è = 1. Tutte due queste formole

del 3°. suono, o basso fondamentale conducono egualmte. e necessariamte. al cerchio come abbiam provato di sopra

Cor. VI

Essendo adunque eguali i rettangoli $cd \cdot ce$, e cM, essi avranno attorno dell'angolo c i lati reciprocamente proporzionali (alla 14. lib. VI. di Eucl.). Sarà adunq. $cd \cdot ce :: cM \cdot cK$ cioè $Mu \cdot Mk :: cM \cdot cK :: \sqrt{3} \cdot \sqrt{4}$ quindi $\overline{Mu}^2 \cdot \overline{MK}^2 :: 3 \cdot 4$: Ragione che somministra due merzi, 3 armonico, e 4 aritmetico della proporz.e $2 \cdot 3 :: 4 \cdot 6$

Parimenti essendo $eM = 7N$, sarà $ce \cdot 7 :: cN \cdot cM$

$No \cdot Nl :: cN \cdot cM :: \sqrt{8} \cdot \sqrt{9}$. adunq. $\overline{No}^2 \cdot \overline{Nl}^2 :: 8 \cdot 9$: ragione che forma il centro della proporzione $g \cdot d \cdot 8 \cdot \mathfrak{S} :: g \cdot 12$, in cui $\mathfrak{S}$ è merzo armonico, e g aritm.co. Nello stesso modo, essendo $7N = KR$, sarà $Ri \cdot Rs :: \sqrt{15} \cdot \sqrt{16}$ ed $\overline{Ri}^2 \cdot \overline{Rs}^2 :: 15 \cdot 16$: ragione che forma il centro della proporz.e $g \cdot d \cdot 12 \cdot 15 :: 16 \cdot 20$ in cui 15 è merzo armonico e 16 merzo aritmetico &

Cor. VII.

Si vede &. dallo che i quadrati $\overline{Mu}^2 = 3$ i quali sono merzi armonici fra $2 \cdot 6$; fra $6 \cdot 12$; fra $12 \cdot 20$. & determinano con $\overline{No}^2 = 8$, $\overline{Ri}^2 = 15$

la estremità

coll'estremità de' lavo lati, i ove punti u. o. i. della circonferenza del cerchio, descritto col raggio CR. è lavà

$$\overline{bC}^2 = \overline{cM}^2 + \overline{Mu}^2$$
$$= \overline{CN}^2 + \overline{No}^2$$
$$= \overline{CR}^2 + \overline{Ri}^2$$

Scolio

Il rettangolo CM è di area uguale all'area del semiquadrato bd; ma non per questo la supposta diagonale Ch del rettangolo CM è uguale al lato bc del semiquadrato bd. è bensì = bc la proposta Cu del triangolo CMu, e questa è determinata ad esser raggio di cerchio, non già da Mh, il di cui quadrato, = 4, è il mezzo aritmetico, ma da Mu, il di cui quadrato, = 3, è il mezzo aritmetico della proporzione 2. 3. 4. 6; e così negli altri parallelogrammi se adunque Mh, mezzo aritmetico, conduce ad Mu, mezzo armonico della stessa proporzione, per formare la proposta Cu, raggio di cerchio = bc. e così Vt ad No, ed Rs ad Ri; ed il 3° resta la formola comune alla semplice retta linea, ed alla figura piana, è necessariamente in bc: ciò è

Egli è evidente che la formo della costruzione de' rettangoli rappresentanti in figura piana il terzo suono, conduce necessariamente al cerchio, e si risolve in πr^2; la di cui formola è il terzo suono essendo $1 \times r = r$, è la retta, e la semplice retta linea, e la figura piana; Nè sostanzialmente vi è altra diversità. Dal progetto di questa sua formola si ha nelle suddette proporzioni vera scienza dell' armonico principio del terzo suono

Cor VIII.

Quindi si fa luogo ad una osservazione su gli avvanzi, ovvero eccessi. Poichè

$\overline{Mu}^2 \cdot \overline{Mk}^2 :: 3 \cdot 4$	sarà $\overline{Mk}^2 - \overline{Mu}^2 = 4-3$	$= \frac{1}{12}$
$\overline{No}^2 \cdot \overline{Nl}^2 :: 6 \cdot 9$	$\overline{Nl}^2 - \overline{No}^2 = 9-8$	$= \frac{1}{8}$
$\overline{Pi}^2 \cdot \overline{Ps} :: 15 \cdot 16$	$\overline{Ps}^2 - \overline{Pi}^2 = 16-15$	$\frac{1}{15}$

eccessi $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15} :: 120 \cdot 45 \cdot 24$

$6 \cdot 3$

$15 \cdot 8$

le differenze sono come i numeri armonici $3 \cdot 8 \cdot 15$, cioè come i quadrati de' seni

$\overline{Mu}^2 \cdot \overline{No}^2 :: 3 \cdot 8$

$\overline{No}^2 \cdot \overline{Pi}^2 :: 8 \cdot 15$

$\overline{Pi}^2 \cdot \overline{Pq}^2 :: 15 \cdot 24$

$\overline{Mk}^2 - \overline{Mu}^2 \cdot \overline{Nl}^2 - \overline{No}^2 :: \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{8} :: 8 \cdot 3$

$\overline{Nl}^2 - \overline{No}^2 \cdot \overline{Ps}^2 - \overline{Pi}^2 :: \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15} :: 15 \cdot 8$

$\overline{Ps}^2 - \overline{Pi}^2 \cdot \overline{Pt}^2 - \overline{Pq}^2 :: \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{24} :: 24 \cdot 15$

differenze $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{24}$

$CM = Ck\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\quad \sqrt{\frac{3}{4}}$ $\quad \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} :: 9\cdot 8$

$CN = Ck\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad \sqrt{\frac{2}{3}}$

$CR = Ck\sqrt{\frac{5}{8}}$ $\quad \sqrt{\frac{5}{8}}$ $\quad \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{8} :: 16\cdot 15$

$CP = Ck\sqrt{\frac{7}{12}}$ $\quad \sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} :: 25\cdot 24$

$Cd = Ck\sqrt{\frac{4}{12}}$ $\quad \sqrt{\frac{7}{12}}$ $\quad \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{12} :: 36\cdot 35$

$Cl = Ck\sqrt{\frac{4}{7}}$ $\quad \sqrt{\frac{4}{7}}$ $\quad \frac{7}{12}\cdot\frac{4}{7} :: 49\cdot 48$

Differe $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{24}$

$8\cdot 3$

$15\cdot 8$

$24\cdot 15$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3+5}\cdot\frac{1}{8+7}\cdot\frac{1}{15+9}$

$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3+5}\cdot\frac{1}{3+5+7}\cdot\frac{1}{3+5+7+9}$

si potrebbe così fare questo in infinito.

$Bv = Ck - CM = Ck - Ck\sqrt{\frac{3}{4}} = Ck\sqrt{\frac{4}{4} - \frac{3}{4}} = \frac{Ck}{2} \times \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$

$ho = CM - CN = Ck\sqrt{\frac{3}{4}} - Ck\sqrt{\frac{2}{3}} = Ck \times \sqrt{\frac{9}{12} - \frac{8}{12}} = \frac{Ck}{2} \times \frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$

$li = CN - CR = Ck\sqrt{\frac{2}{3}} - Ck\sqrt{\frac{5}{8}} = Ck\sqrt{\frac{16}{24} - \frac{15}{24}} = \frac{Ck}{2} \times \frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$

$sq = CR - CP = Ck\sqrt{\frac{5}{8}} - CA\sqrt{\frac{3}{5}} = Ck \times \sqrt{\frac{25}{40} - \frac{24}{40}} = \frac{Ck}{2} \times \frac{\sqrt{25}-\sqrt{24}}{\sqrt{10}}$

$kz = CP - Cd = Cb\sqrt{\frac{3}{5}} - Ck\sqrt{\frac{7}{12}} = Ck \times \sqrt{\frac{36}{60} - \frac{35}{60}} = \frac{Ck}{2} \times \frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$

$xy = Cd - Cl = Ck\sqrt{\frac{7}{12}} - CA\sqrt{\frac{4}{7}} = Ck \times \sqrt{\frac{49}{84} - \frac{48}{84}} = \frac{Ck}{2} \times \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{\sqrt{21}}$

Bv	ho	li	sq	kz	xy
$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{1}}$	$\frac{\sqrt{9}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$	$\frac{\sqrt{16}-\sqrt{15}}{\sqrt{6}}$	$\frac{\sqrt{25}-\sqrt{24}}{\sqrt{10}}$	$\frac{\sqrt{36}-\sqrt{35}}{\sqrt{15}}$	$\frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{\sqrt{21}}$

divisori $\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}$ dividendi

	radici de' medj aritm.	radici de' medj armon.	
1°.	$\sqrt{4}-\sqrt{3}$		$Ck - CM$
2°.	$\sqrt{9}-\sqrt{8}$		$CM - CN$
3°.	$\sqrt{16}-\sqrt{15}$		$CN - CR$
4°.	$\sqrt{25}-\sqrt{24}$		$CR - CP$
5°.	$\sqrt{36}-\sqrt{35}$		$CP - Cd$
6°.	$\sqrt{49}-\sqrt{48}$		$Cd - Cl$

$Cd = \frac{AC}{2}$

$Ce = \frac{AC}{\sqrt{3}}$

$Cf = \frac{AC}{\sqrt{\frac{6}{3}}}$

$Ck = \frac{\frac{AC}{2}}{\sqrt{\frac{5}{8}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$

$CX = \frac{\frac{AC}{2}}{\sqrt{\frac{3}{5}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{24}{10}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{7}{3}}}$

$CV = \frac{\frac{AC}{2}}{\sqrt{\frac{4}{7}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{16}{7}}}$

$uh = Ce - Cd = \frac{AC}{\sqrt{\frac{3}{1}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{4}{1}}} = \frac{AC\sqrt{1}}{\sqrt{3}-\sqrt{4}}$

$ol = Cf - Ce = \frac{AC}{\sqrt{\frac{6}{3}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{3}{1}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{6}{3}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{9}{3}}} = \frac{AC\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{9}}$

$is = Ck - Cf = \frac{AC}{\sqrt{\frac{5}{2}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{6}{3}}} = \frac{AC}{\sqrt{\frac{25}{10}}} - \frac{AC}{\sqrt{\frac{16}{10}}} = \frac{AC\sqrt{6}}{\sqrt{15}-\sqrt{16}}$

$\frac{uh}{\sqrt{1}}$	$\frac{ol}{\sqrt{3}}$	$\frac{is}{\sqrt{6}}$
$\sqrt{3}-\sqrt{4}$	$\sqrt{6}-\sqrt{9}$	$\sqrt{15}-\sqrt{16}$

dividendi $\sqrt{1}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}$ | 60 · 30 · 20 · 15 · 12 · 10

divisori radici de' medj arm. — radici de' medj aritmetici | 30 · 10 · 5 · 3 · 2

mv. 1 · 3 · 6 · 10 · 15

$\not{AD} = \not{AC} \times CD = \not{AC} \times \frac{\not{AC}}{2} = \frac{\overline{\not{AC}}^2}{2}$

$CM \cdot C\not{A} :: \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} :: \sqrt{3} \cdot 2$ | $CM = \frac{C\not{A}}{2}\sqrt{3}$

$CE \cdot CM :: 2 \cdot 3$ | $CE = \frac{2}{3}CM = \frac{2}{3} C\not{A} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{C\not{A}\sqrt{3}}{3}$

$ME = CM \times CE = \frac{C\not{A}\sqrt{3}}{2} \times \frac{C\not{A}\sqrt{3}}{3} = \overline{C\not{A}}^2 \times \frac{3}{2\times 3} = \frac{\overline{C\not{A}}^2}{2}$

$CN \cdot CM :: \sqrt{8} \cdot \sqrt{9} :: \sqrt{8} \cdot 3$ | $CN = \frac{CM\sqrt{8}}{3} = \frac{\sqrt{8}}{3} \times C\not{A}\frac{\sqrt{3}}{2} = C\not{A}$

$CF \cdot CN :: 3 \cdot 4$ | $CF = \frac{3CN}{4} = \frac{3}{4}\frac{\sqrt{24}}{6} CA = C\not{A}\sqrt{\frac{24}{48}}$

$NF = CN \times CF = \frac{\sqrt{24}}{6} C\not{A} \times \frac{\sqrt{24}}{48} C\not{A} = \overline{C\not{A}}^2 \times \frac{24}{48} = \frac{\overline{C\not{A}}^2}{2}$

$CR \cdot CN :: \sqrt{15} \cdot \sqrt{16} :: \sqrt{15} \cdot 4$ | $CR = \frac{\sqrt{15}}{4} CN = \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{24}}{6} \times$

$= \frac{\sqrt{15\times 24}}{24} C\not{A} = \frac{\sqrt{360}}{24} C\not{A}$

$CK \cdot CR :: 4 \cdot 5$ | $CK = \frac{4}{5} CR$

$= \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{360}}{24} C\not{A} = \frac{4\sqrt{360}}{120} C\not{A} = \frac{\sqrt{360}}{30} C\not{A}$

$RK = CR \times CK = \frac{\sqrt{360}}{24} C\not{A} \times \frac{\sqrt{360}}{30} C\not{A} = \overline{C\not{A}}^2 \times \frac{360}{720} = \frac{\overline{C\not{A}}^2}{2}$ &

$CP \cdot CR :: \sqrt{24} \cdot \sqrt{15} :: \sqrt{24} \cdot 3$ | $CP = \frac{\sqrt{24}}{5} CR = \frac{\sqrt{24}}{5} \times \frac{\sqrt{360}}{24} C\not{A}$

$= \frac{\sqrt{24\times 360}}{120} C\not{A}$

$= \frac{\sqrt{8640}}{120} C\not{A}$

$CQ \cdot CP :: 5 \cdot 6$ | $CQ = \frac{5}{6} CP$

$= \frac{5}{6} \times \frac{\sqrt{8640}}{120} C\not{A}$

$= \frac{5\sqrt{8640}}{720} C\not{A}$

$= \frac{\sqrt{8640}}{144} C\not{A}$

$QX = CP \times CQ = \frac{\sqrt{8640}}{120} C\not{A} \times \frac{\sqrt{8640}}{144} C\not{A} = \overline{C\not{A}}^2 \times \frac{8640}{17280} C\not{A} = \frac{\overline{C\not{A}}^2}{2}$ y

Delle Ragioni, e Proporzioni

Libro VI.

De' Triangoli Ribagonici

Teorema

Data una ragione co' mezzi determinati, armonico, aritmetico, e contrarmonico: La differenza de' quadrati de' mezzi armonico, e contrarmonico sarà sempre un quadrato.

Poichè per le cose dette nel lib. 5to la ragione di $a \cdot a+rd$ con tutti i suoi mezzi è la seguente

$$aa+rad \underset{\text{arm.}}{.} aa+rad \underset{\text{ariom.}}{.} aa+rad+dd \underset{\text{contrarm.}}{.} aa+rad+rdd \cdot aa+rad+rdd$$

la differenza per tanto de' quadrati del mezzo armonico e contrarmonico sarà

$$\overline{aa+rad+rdd}^{\,2} - \overline{aa+rad}^{\,2} = 4aadd+8rad^3+4d^4 = \overline{rad+rdd}^{\,2}$$

adunque la differenza de' quadrati del mezzo arm.co e contrarm.co sarà sempre un quadrato

$$\begin{array}{l|l} aa+rad+rdd & aa+rad \\ aa+rad+rdd & aa+rad \\ \hline a^4+ra^3d+raadd & a4+4a^3d+4aadd \\ \quad +ra^3d+4aadd+4ad^3 & \\ \quad +raadd+4ad^3+4d^4 & \\ \hline a^4+4a^3d+8aadd+8ad^3+4d^4 & \\ a^4-4a^3d-4aadd & \\ \hline 0 \quad 0 \quad +4aadd+8ad^3+4d^4 = & \\ \overline{rad+rdd}^{\,2} & \end{array}$$

Cor. 1

È chiaro per tanto che il mezzo armonico, il contrarmonico, e la radice della differenza de' lor quadrati faranno sempre

250

N°. 1.

1·3·4·5·6	5×5 − 3×3 = 16	4·3·5
6·8·9·10·11	10×10 − 8×8 = 36	6·8·10
11·15·16·17·20	17×17 − 15×15 = 64	8·15·17
20·24·25·26·30	26×26 − 24×24 = 100	10·24·26
30·35·36·37·41	37×37 − 35×35 = 144	12·35·36

N°. 2

un triangolo Pitagorico. Ecco

$$\overline{aa+rad}^{\text{um.co}} \cdot \overline{rad+dd}^{\text{rad. da diffa}} \cdot \overline{aa+rad+dd}^{\text{converum.e}}$$

$$\overline{a\times a+rd} \cdot \overline{a+d\times d} \cdot \overline{1\times a+d} - \overline{a\times a+rd}$$

Cov. II.

E se i lati del triangolo Pitagorico si potessero dimezzare, cioè se i mezzi armonico, e contrarmonico fossero numeri pari: Lavrebbero lati di triangolo Pitagorico anco la metà del mezzo armonico, la metà del mezzo contrarmonico ed $\overline{a+d\times d}$, giacchè $\overline{a+d\times d}$, è sempre numero pari, che dimezzato diventa N°. Caffo.

Cov. III

N°. 2

Si osservi che i quadrati di numeri Caffo

9		4·5
25	divisi in	12·13
49		24·25

danno i quadrati di numeri così divisi che hanno per diff.a sempre lo stesso quadrato

$$\left.\begin{matrix} 4\times 4 = 16 \\ 3\times 3 = 25 \end{matrix}\right\} 25-16=9$$

$$\left.\begin{matrix} 12\times 12 = 144 \\ 13\times 13 = 169 \end{matrix}\right\} 169-144=25$$

I triangoli Pitagorici di questa specie; cioè che nascono da una propoz.e g.d. che ha il mezzo armonico un N°. Caffo sono quelli del Cov. 2do, ed appartengono alla serie delle semplici prime forme $1\cdot 2$; $2\cdot 3$; $3\cdot 4$ &, le quali ridotte a propoz.e g.d. co' mezzi determinati,

non

a 250

N.° 1.

1·3·4·5·6	5×5 − 3×3 = 16	4·3·5
6·8·9·10·11	10×10 − 8×8 = 36	6·8·10
11·15·16·17·20	17×17 − 15×15 = 64	8·15·17
20·24·25·26·30	26×26 − 24×24 = 100	10·24·26
30·35·36·37·41	37×37 − 35×35 = 144	12·35·36

un triangolo Pitagorico.

$aa+2ad \cdot 2ad+2dd \cdot aa+2ad+2dd$
aum.to 2ad. da diffo con

$a \times a+2d \cdot \overline{a+d \times 2d} \cdot 2 \times \overline{a+d}^2 - a$

Cor. II.

Se i lati del triangolo Pita si potessero dimezzare, cioè i mezzi armonico, e contra fossero numeri pari: Lavebbe lati di triangolo Pitagorico la metà del mezzo armon la metà del mezzo contra ed $\overline{a+d \times d}$; giacchè $\overline{a+d \times 2}$ sempre numero pari, che i lato diventa N.° Caffo.

Cor. III

N.° 2

si osservi che i quadrati di n Caffo 9 4·5
25 divisi in 12·13
49 24·25

danno i quadrati di num così divisi che han per differenza lo stesso quadro

$4 \times 4 = 16$
$5 \times 5 = 25$ $\Big\}$ $25 - 16 = 9$

$12 \times 12 = 144$
$13 \times 13 = 169$ $\Big\}$ $169 - 144 =$

I triangoli Pitagorici di 2 specie; cioè che nascono da proposz.e g.d. che ha 2 mezz mezzo un N.°. Caffo sono que del Cor.rio, ed appartengon serie delle semplici prime 1·2; 2·3; 3·4 &, le quali n a proposz.e g.d. co' mezzi debbono

ne

non ammettono il mezzo armonico
altro quadrato che di n°. caso

1 · 2	2 · 3	3 · 4
2 · 4	4 6	6 · 8
2 · 3 · 4	4 · 5 · 6	6 · 7 · 8
2×2=4	5×5=25	7×7=49
6 · 8 · 9 · 10 · 12	20 · 24 · 25 · 26 · 30	42 · 48 · 49 · 50 · 56

Questi triangoli sono. 3·4·5
5·12·13
7·24·25
9·40·41 &

I primi lati di questi triangoli 3·5·7·9 &
sono le somme de' termini delle
ragioni, da cui detti triangoli son
dedotti 3 = 1+2; 5 = 2+3; 7 = 3+4 &
delle quali ragioni si son
raddoppiati i termini per trovar
senza rotti il mezzo arithm°. della
forma 1·2 | 2·4 | 2·3·4

Cor. IV.

Questi triangoli si deducono
ancora dalle proporzioni arithme=
tiche discrete co' mezzi armonico,
e contrarmonico; ed il p°. termine
è sempre la somma de' termini
appartenenti la ragione; oppure
è il p°. termine della p^a. arithm. disc.,
il p°. diviso per 2 della ada; il
p°. diviso per 3. della terza &

3·4·5·6	3·6 :: 1·2	1+2 · 4·5	3·4·5
10·12·13·15	10·15 :: 2·3	2+3 · 12·13	$\frac{10}{2}$ · 12·13
21·24·25·28	21·28 :: 3·4	3+4 · 24·25	$\frac{21}{3}$ · 24·25
36·40·41·45	36·45 :: 4·5	4+5 · 40·41	$\frac{36}{4}$ · 40·41
55·60·61·66	55·66 :: 5·6	5+6 · 60·61	$\frac{55}{5}$ · 60·61 &

Cor. V

Si osservi nel cor. p°. che i primi
termini de' triangoli rettangoli
sono 4 · 6 · 8 · 10 · 12 &, numeri continui

6·8·9·10·12 | 20·24·25·26·30

$\frac{6}{2}$ · 3 · $\frac{30}{2}$ | $\frac{24}{2}$ · 5 $\frac{26}{2}$

4 · 3 · 5 | 12 · 5 · 13

AC · 48 · 49 · 50 · 56

$\frac{48}{2}$ · 7 · $\frac{50}{2}$

24 · 7 · 25

N°. 2°

dalla somma de' termini delle ragioni

1 · 3	1 + 3 = 4
2 · 4	2 + 4 = 6
3 · 5	3 + 5 = 8
4 · 6	4 + 6 = 10
5 · 7	5 + 7 = 12

Cor. VI.

Le somme delle due lati de' triangoli Pitagorici indicano abbastanza la ragione, da cui son presi, dando esse somme l'ultimo termine della proporz. co' medii determinati, dedotta da essa ragione

4 + 3 + 5 = 12	6	8
6 + 8 + 10 = 24	12	16
8 + 15 + 17 = 40	20	40
10 + 24 + 26 = 60	30	45
12 + 35 + 37 = 84	42	21

N°. 4

Cor. VII.

Quando $d = 1$, quel lato del triangolo Pitagorico, che è $= \overline{a+d} \times 2d$, diventa $\overline{a+1} \times 2$ = al doppio della radice del medio aritmetico della proporzione co' suoi medii determinati; e però prendendo la radice del medio aritmetico (per es. di 9) ~~è~~ non si ha che la metà del lato del triangolo Pitagorico $= \overline{a+d} \times 2d = \overline{a+1} \times 2$ e ciò quando i numeri de' medii armonico, e contr'armonico sono pari (lo che succede quando $d = 1$) e succede sempre che il medio aritmetico sia n°. caffo: saranno

ancor

ancor determini di triangolo Pitagorico, la radice del medio aritmetico (3) è la metà de' merzi armonico, e conarmonico di ella vagione co' merzi determinati.

Cor. VIII.

N.° 3

Ma quando il merzo aritmetico della vagione co' merzi determinabi, è n.° pari, e però (essendo d=1) i merzi arm.co ed conarmonico sono caffo; ti prendono quali sono i merzi arm.co e conarm.co, e per l'altro lato del triangolo Pitagorico ti prende un numero che sia il doppio della radice del medio aritmetico della vagione co' noi merzi determinati.

1.3.4.5.6	1.4.5	
6.8.9.10.12	8.8.10	4.3.5
12.15.16.17.20	15.8.17	
20.24.25.26.30	24.10.25	12.5.13
30.35.36.37.42	35.12.37	
42.48.49.50.56	48.14.50	24.10.25

Cor. IX.

Dalle cose dette ti deduce un altro modo di trovare, oltre i merzi armonico e conarm.co, il terzo lato del triangolo Pitagorico, che è = $\overline{a+d} \times 2d$. Questo è = alla differenza del p.° ed ultimo termine della vagione co' noi merzi determinati.

Poiché

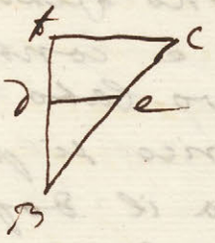
Poiché l'ultimo termine è = aa+3ad+2d
il primo è = aa+ad
la sua differenza è = 2ad+2d
= a+d · 2d

Ma questo è quel terzo lato che si cercava. Adunque il terzo lato è la differenza che passa fra gli estremi della ragione co' suoi mezzi determinati

1·3·4·5·6	6−1·3·5	4·3·5
6·6·9·10·12	12−6·6·10	6·6·10
12·15·16·17·20	20−12·15·17	8·15·17

N°. 3.

Cor. X



Se ABC è un triangolo Pitagorico che abbia tutti i lati di n°. pari; la metà di tutti i lati formeranno altresì un triangolo Pitagorico DBE; come pure lo saranno il doppio, il triplo de' lati

6·8·10	3·4·5
6·8·10	12·16·20
4·3 5	12·9·15

Cor. XI. Teor. 11.

Il mezzo contrarmonico è eguale alla somma de' due quadrati de' due termini corrispondenti la ragione, divisa per la somma de' due termini della ragione stessa. Cioè fra a·b, ossia della ragione a·b. il mezzo contrarm°. sarà $\frac{aa+bb}{a+b}$ · 2 però

$$a \cdot \frac{aa+bb}{a+b} \cdot b$$

è una contrarmonica proporzione

Poiché

poiche $b \cdot a :: \frac{aa+bb}{a+b} - a \cdot b - \frac{aa-bb}{a+b}$

$b \cdot a :: aa+bb - aa-ab \cdot ab+bb-aa-bb$

$:: bb-ab \cdot ab-aa$

$:: b \cdot a$

adunque il mezzo conbovarmonico fra $a \cdot b \cdot$ è $= \frac{aa+bb}{a+b}$

Co che si volea dimostrare

Cor XII.

ma non può darsi proposta di triangolo rettangolo, il cui quadrato non sia la somma di due quadrati. la proposta adunque è di conbovarmonica natura, cioè che a rappresentare un mezzo conbovarmonico

Scolio

I triangoli Pitagorici il primo osservatore fu Pitagora Questi triangoli nascono dalle ragioni co' mezzi determinati arm.co, arion.co, e conbovarm.co. Da ciò si vede che Pitagora maneggiava in questo modo le ragioni, trovandone i determinati mezzi. Lo che si comprova ancora con altre ragioni

Cor XIII.

I triangoli det.i corollarij 3.o e 4.o la somma de' mezzi arm.co e conbovarmonico corrisponde il quadrato, la cui radice quadrata è il p.o termine del triangolo

i cui lati sono determinati dai merij armonico aritmetico e contrarmonico

3 · 4 · 5 4+5=9

5 · 12 · 15 12+15=25

7 · 24 · 25 24+25=49

Cor. XIV

Dividendo il diametro AB del cerchio AMB in le serie delle frazioni

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ &c

60 · 30 · 20 · 15 · 12 · 10

AB · AC · AD · AE · AF · AG

si trova che AF è la sede originale del pr. triangolo Pitagorico 3 · 4 · 5

CF · FM · CM

Poichè CF = AC − AF = 30 − 12 = 18

$\overline{FM}^2$ = AF × FB = 12 × 48 = 756

FM = 24

CF · FM · CM

18 · 24 · 30

3 · 4 · 5

Cor. XV.

Il vero termine del triangolo Pitagorico (colore i merij arm.co e contrarm.co) sarà sempre tante volte moltiplice della radice del quadrato, medio aritmetico della proporzione, di quante unità è la differenza degli esponenti della forma. Poichè a+d è il medio aritmetico della forma, il quale si deve moltiplicare per 2d, differenza fra il primo ed ultimo

7a Cor. 2da fig. 25

ed ultimo termine della forma;
Il qual mezzo aritmetico della
forma è la radice del quadrato,
mezzo aritmetico della proporz.
I cov. 7. 8. non sono senon
conseguenze di questo.

a . a+d . a+2d | a=1; d=3
1 . 4 | diff. 2d=6=2×3
1 . 4 . 7
10 . 16 . 25 . 34 . 40
16 . a+d × 2d . 34
2+3 × 6 = 30 = 5×6 rettangolo di 5
16 . 30 . 34
8 . 15 . 17

Scolio

Molte sono le forme de' triangoli
Pitagorici. Si vuole spiegarle
ed applicarle al cerchio

Forme di ragione 2 differ. 1.
Forma 1. 2. doppia

AB = 1
BC = √(AB × BD) = √(1×9) = 3 | AB = 10, BC = 5
BC = 4 = 1×2 raddoppiato
CC' = 5 = 1+4 3 . 4 . 5
Indi nascono i mezzi della
doppia 6 . 6 . 9 . 10 . 12
BC = 4, raddoppiato in 8. armonico
BC = 3, quadrato in 9. aritmetico
CC = 5, raddoppiato in 10. contrario
Forma seguente alternativa

AB = 1 | AD = 16, BC = 12
BC = √(AB × BD) = √(1×25) = 5
BC = 12 = 2×3 raddoppiato
CC' = 13 = AB + BC
Indi si hanno i mezzi della seguente
20 . 24 . 25 . 26 . 30 .

1 . 5
1 . 3 . 5
3 . 5 . 9 . 13 . 15
5 . a+d × 2d . 13
3 . 1+2 × 4 . 13
5 . 12 . 13
12 quadruplo di 3

Tav. 2 . fig. 27 .

1 . 2
2 . 4
2 . 3 . 4
6 . 6 . 9 . 10 . 12

2 . 3
4 . 6
4 . 5 . 6
20 . 24 . 25 . 26 . 30

$\overline{BC}$ = 12, raddoppiato in 24. armonico
$\overline{BC}$ = 5, quadrato in 25. aritmetico
$\overline{CE}$ = 13 raddoppiato in 26 convarm.

Forma di ragione differ. 2.

Forma triplа . 1 . 3 .

$\overline{AD}$ = 10
$\overline{AC}$ = 5

$\overline{AB}$ = 2
$\overline{BE}$ = $\sqrt{\overline{AB} \times \overline{BD}}$ = $\sqrt{2 \times 8}$ = 4 = 1+3
$\overline{BC}$ = 3 − 2 = 3 = 1 × 3
$\overline{CE}$ = 5 = $\overline{AB}$ + $\overline{BC}$ 4 . 3 . 5

quindi si hanno i mezzi della
tripla 2 . 3 . 4 . 5 . 6

$\overline{BC}$ = 3, mezzo arm.co
$\overline{BE}$ = 4, mezzo arion.co
$\overline{CE}$ = 5, mezzo convarm.co.

Forma 3 . 5

$\overline{AD}$ = 34
$\overline{AC}$ = 17

$\overline{AB}$ = 2
$\overline{BE}$ = $\sqrt{\overline{AB} \times \overline{BD}}$ = $\sqrt{2 \times 32}$ = 8 = 3+5
$\overline{BC}$ = 15 = 3 × 5
$\overline{CE}$ = 17 = 2 + 15

quindi si hanno i mezzi della
ragione 3 . 5

$\overline{BC}$ = 15, mezzo arm.co
$\overline{BE}$ = 8, raddoppiato in 16. arion.co
$\overline{CE}$ = 17, mezzo convarm.co.

$\overline{BE}$ = $\overline{a+d} \times nd$ | a = 3 , d = 1
$\overline{3+1} \times 2$ = 8 = a due volte
il medio 4 della forma . 3 . 4 . 5 .

Nelle progressioni di differ. 2. si
osserva questa regola.
Nella pr. di 1 . 3 | 2 . . 3 . 4 . 5 . 6
il terzo termine $\overline{BE}$ non si
altera ; nella rag 3 . 5 |
12 . 15 . 16 . 17 . 20 . $\overline{BE}$ si raddoppia.
Nella 3ª si triplica . Nella
quarta si quadruplica, e così
si trova il mezzo aritmetico
della

3 . 4 . 5
12 . 15 . 16 . 17 . 20

rispettiva proporzione in un
termine sempre quadrato
Poiché ella è proprietà de'
numeri pari, sommati di serie
di ragioni, il non incontrar
mai un nº. quadrato

2 · 4 · 6 · 8 · 10 · 12
2 · 4 · 6 · 8 · 10
6 · 10 · 14 · 16 · 22

ed è proprietà del caffo sommati
di serie di ragioni, l'incontrare
molti nº. quadrati · e molti-
plicate poi di serie le somme
4 · 8 · 12 · 16 · 20 · 24 · 28 · 32
e l'aritmetica serie 1 · 2 · 3 · 4
l'incontrarvi sempre in nº
quadrato

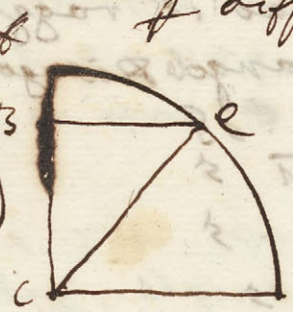
1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11 · 13 · 15
1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11 · 13
4 · 8 · 12 · 16 · 20 · 24 · 28
1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7
4 · 16 · 136 · 64 · 100 · 144 · 196
radici 2 · 4 · 6 · 8 · 10 · 12 · 14

Un'altra serie di questi triangoli
Rettangolari appartiene alla
serie delle proporzioni con-
giunte · si desume il pº
termine dal pº nº. quadrato
della proporzione congiunta.
Se il quadrato è nº. dispari,
si prende intiero · se è pari,
se ne prende la metà.
Il 2do termine si desume
dalle ragioni rispettive alle
differenze 1 · 2.
Se il quadrato, pº. termine della

proporzione congiunta, è
vari, appartiene alle ragioni
p differenza 1., la è caffo,
alle ragioni p differ.a 2.
Perciò nella p.a proporz.e congi=
unta 1.2.3.4.6. il qua=
drato 1. primo termine, essendo
caffo, la p.a ragione sarà
1.3. i di cui termini roma=
sono 1+3=4; Il quale 4to
termine 4 unito al p.o
1. dà 1+4=5, e forma il
Diametro 5., col quale
formato il quadrato, e
tirato il seno BE, si avrà
il triangolo CBE, che appar=
tiene alla p.a proporz.e
congiunta
Il 2do triangolo appartenente
alla 2da proporz.e con=
giunta 4.6.6.9.12. avrà
il p.o termine la metà
del quadrato 4. & 2do
termine avrà la somma
de' termini della p.a ragione
p differ.a 1., che è = 1.2.
sarà adunque il 2do termine
~~2.3~~ = 1+2 = 3. Sommasi
il p.o 2. col 2do 3. si avrà
il semidiametro = 5, e con
questo fatto il quadrato,
e tirato il seno, si avrà
il triangolo Diagonico appar=
tenente alla 2da proporz.e congiunta
La serie adunque sarà la seguente

Triangoli delle ragioni
differ.a 2

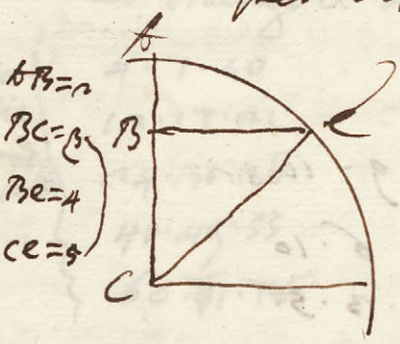
1.3



Le proporzioni relative al semid. 5 conservano

1.2.3.4.6

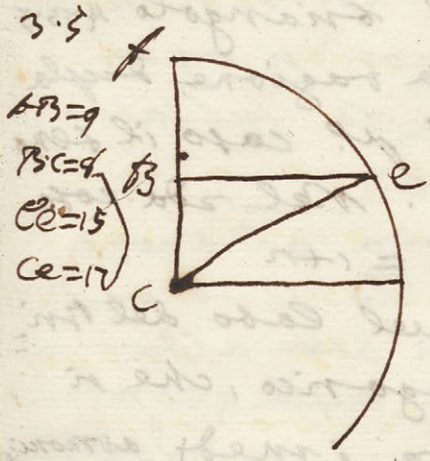
Triangoli delle ragioni per differ.a 1.



diam.o conser.

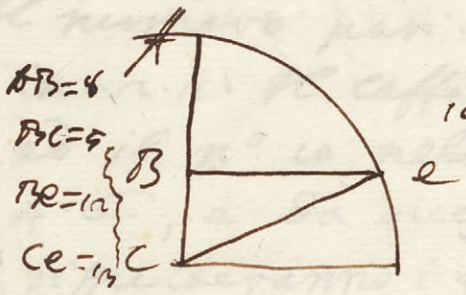
4.6.8.9.12

3.5



AC semid. 17 conservano

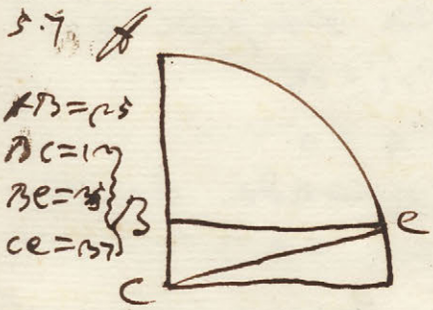
9.12.15.16.20



diam. 16. Conser.

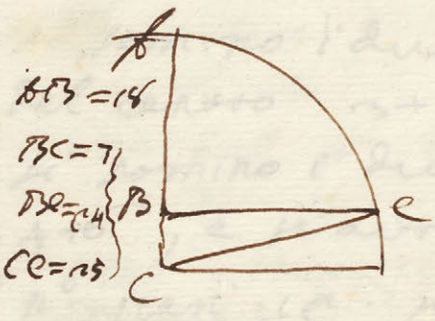
16.20.24.25.30

5.7



AC semid 37 conservano

25.30.35.36.42



diam.o 50 conser.

Cor. 16

Tav. II. fig. 16. Se col raggio AD=5 favò un semicerchio AGM, e preso AC=2, tirerò il seno CO ed il raggio DO, avrò il triangolo rettangolo DC.CO.DO

3.4.5

2.3.4.5.6

3. Vatican. 5

3. Vat. 5

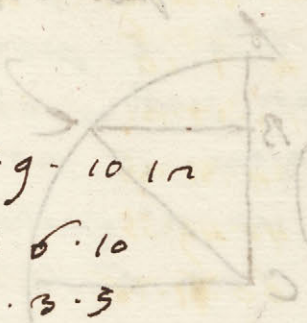
3. V16. 5

3.4.5

6 · 6 · 9 · 10 1r

8 · 6 · 10

4 · 3 · 5



Se favò $BB3 = 1$, e divevò il seno $B3\,9$ ed il raggio $B9$, avrò il triangolo Pitagorico

$$\frac{DB \cdot B3 \cdot B9}{4 \cdot \sqrt{AB \times BM}\ 5}$$

$$\frac{4\ \sqrt{1 \times 9} \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 5}$$

dunque il triangolo 3 · 4 · 5 nasce dalla ~~duplicata~~ tripla 1 · 3; ed il triangolo 4 · 3 · 5 nasce dalla ragione dupla 1 · 2. Nel 1° caso il seno $e = 4 = 1 + 3$. Nel 2da caso il seno $e = 3 = 1 + 2$

Il seno è quel lato del triangolo Pitagorico, che si cerca dove i medj armonico e contrarmonico, o le metà di questi.

Serie radicale

Serie radicale, relativa ai Triangoli Pitagorici

serie radicale	
4 · 7 · 10	1 · 3 · 4 · 6
10 · 17 · 21	6 · 8 · 9 · 12
24 · 31 · 36	12 · 15 · 16 · 20
40 · 49 · 53	20 · 24 · 25 · 30
60 · 71 · 78	30 · 35 · 36 · 42

Questa serie è fatta con queste leggi.

Il numero pari · 4 · si divida in · 2 · 2 · Il caffo · 7 · in · 3 · 4 · ed il n° 10 nella sesquialtera 4 · 6 · , e da questa divisione risulteranno i quattro termini

1 · 3 · 4 · 6

della tripla · 2 · 6 · si doppia a g · d · , posta di riscontro oppure si raddoppj il p° termine · 2 · della tripla g · d · , si sommino i due termini del centro 3 + 4 , e poi si sommino i due ultimi 4 + 6 , e si avranno 4 · 7 · 10 .

Il n° pari · 12 · si divida in · 6 · 6 ; Il n° caffo · 17 · in · 8 · 9 ; il n° 21 nella sesquiterza g · 12 , e da questa divisione risulteranno

6 · 8 · 9 · 12

della duepla · 6 · 12 si doppia a g · d · che sta dirimpetto oppure si raddoppj il p° termine 6 · della duepla g · d · , si sommino

4 . 7 . 10 .
2 . 3 . 4
4 . 6 sesquialtera

2x2 . 3+4 . 4+6
4 . 7 . 10

12 . 14 . 21
6 . 6 . 9
9 . 12 sesquial.

2x6 . 6+9 . 9+12
12 . 14 . 21

4 . 6 . 9
4 . 6 . 8 9 . 8 :: 6 . 48/9
4 . 48/3 . 6 . 8
12 . 16 . 18 . 24
6 . 8 . 9 . 12

i due termini del centro 6+9, e poi si sommino i due estremi 9+12. e si avrà 12 . 14 . 21 . e così si faccia nelle altre

Ritornando da capo . 4 . 7 . sono radici della tripla, perchè 2x2 . 3x4 :: 4 . 12 :: 2 . 3
Così 12 . 14 . sono radici della dupla, perche 6x6 . 8x9 :: 36 . 72 :: 1 . 2 . , e così si operi, e s'intenda la infinita serie radicale .

Riflettiamo ora al secondo termine della serie radicale . abbiam detto altrove che data la dupla geometrica continua 1 . 2 . 4 . e ridotala ad arit.ca con . 1 . 2 . 3 ; facendo 4 . 3 :: 2 . 2x3/4 = 6/4 = 3/2 . si corrisponde la tripla 9 . 6
1 . 3/2 . 2 . 3
2 . 3 . 4 . 6
e così s'intenda della sesquialtera continua
4 . 6 . 9
della sesquiterza 9 . continua
9 . 12 . 16

Si osservi di più che il termine avvocato = 3/2 . è sesquialtero di 1 . e formando il medio armonico fra gli estremi . 1 . 3 . corrisponde la tripla in arm.a proporz.
3 . 3/2 . 1 | 6 . 3 . 2
Chiara ne è la cagione, perchè

perchè nell' aritmetico n°. comune non può darsi originalmente proporzione geometrica continua, se non se fra due estremi di n°. quadrato, ed il mezzo armonico è sempre uno di meno del n°. quadrato in tutte le proporzioni g.d. che hanno la forma $\frac{1}{2}$ diffen°. 1., e $\frac{1}{3}$ diffen°. 2.; ed in quelle che hanno la forma $\frac{1}{n}$ magn°. differenza, il mezzo armonico è eguale al quadrato, che forma il mezzo aritmetico, meno il quadrato della diffen°. della forma

Apposto tutto questo: egli è un fatto che il vero termine 10 della p^a. proporzione 4.T.10. è somma dei termini della sesquialtera 6.4. ma è pure un fatto che $\frac{3}{2}$ è sesquialtero del 2°. termine 1. in 1. $\frac{3}{2}$. 2. 3., ed è pure mezzo armonico fra gli estremi in ragion tripla 1. 3. dunque il 3°. termine 10. come somma di due termini sesquialteri 6.4. scuopre il vero principio di questa ragione; lo scuopre di armonica natura; e lo scuopre dedotto dalle proporzioni corrispondenti, altrove dimostrate

Poichè

Poichè dalla pª proporzione congiunta 1.2.3.4.6. di cui è cervo la subseq. altera 2.3::4.6., tornando i denomini congiunti colleghi si ha la prima posizione

4 pª 10

1+3.3+4.4+6

e così pure dalle altre si hanno le corrispondenti posizioni.

Infatti gli esponenti della pª posizione 4.10; in numeri pl. 2.5. sono radici della seconda poichè 1x1.2x3::1.6ª; della 2da gli esponenti 12.22::4.7 sono radici della cubica poichè 2x2.3x4::4.12::1.3, nella qual ragione sono pure gli esponenti della 2da congiunta 4.6.8.9.12. Della 3ª gli esponenti 24.36::6.9. dan le radici della ragione 9.20; poichè 3x3.4x5::9.20; nella qual ragione sono gli esponenti della 3ª proporzione congiunta 9.12.15.16.20. In questa si osservi 12.16.20. cervo 3.4.5 della cubica 2.3.4.5.6.

Non può darsi la proporz. congiunta 9.12.15.16.20. senza l'anteriore separata 12.15.16.20

nella qual ragione sono pure gli esponenti della pª congiunta 1.2.3.4.6

12 · 15 · 16 · 20 · dalla forma de' cui sevmini si ha la proporzione 24 · 31 · 36, raddoppiando 12 · in 24, e sommando i due mezzi 15 + 16 = 31, e poi sommando il mezzo · 16 · con l'estremo 20 · - Null'altro adunque v'è di più nella propos. congiunta, senon il n° quadrato · 9 ·, aggiungendo alla 9 · 12 · 15 · 16 · 20 ·; e con ciò si cambia la ragione degli estremi 12 · 20 · nella ragione 9 · 20 ; fra le quali passa la differ.a sesquis.a formata da 12 · 9 · e vi sono due numeri quadrati · 9 · 16 ·, de' gli è radice la forma sesquis.a 3 · 4 poiche 3 × 3 = 9 ; 4 × 4 = 16

$\frac{12}{20} \cdot \frac{9}{20} :: 240 \cdot 160$

$\frac{20}{9} \cdot \frac{20}{12} :: 240 \cdot 160$

Divisi i sei sevmini delle semplici forme · 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · in

1 + 2 + 3 = 6 }
4 + 5 + 6 = 15 }

si han le somē 6 · 15 :: 2 · 5 :: 4 · 10, estremi della p.a proporzione · 4 · 7 · 10 · come la somma · 21 · de' sevmini delle p.e semplici forme è uguale alla somā 21 de' ove sevmini 4 + 7 + 10 = 21

Egli è un fatto che i due numeri quadrati · 9 · 16 · della proporzione congiunta 9 · 12 · 15 · 16 · 20 sono i precisi che formano il triangolo Pitagonico · 3 · 4 · 5 ·

F.° triang.° Pitag.
3 · 4 · 5 ·

4·7·10	1·2·3·4·6	3·4·5
12·17·21	4·6·8·9·12	5·12·13
24·31·36	9·12·15·16·20	7·24·25
40·49·55	16·20·24·25·30	9·40·41
60·71·74	25·30·35·36·42	11·60·61

perche $3 = \sqrt{9}$. $4 = \sqrt{16}$; e sonnati i due quadrati $9+16 = 25$, si ha il quadrato del 3°. lato 5 di esso triangolo

Data le ove serie, delle posizioni, delle proporzioni congiunte, e de' triangoli Pitagorici, si verifica il legame, e la relazione delle serie delle cinque posizioni, e de' triangoli Pitagorici, non solamente nella colonna comune, prima delle posizioni, e rda de' triangoli; ma osservando che in questa colonna comune è fondata la proprietà, ed affezione della somma degli esponenti de' triangoli, la quale col mezzo de' medii forma la serie ordinata delle cinque ragioni elementari del sestuplo armonico, sistema

$3+5 = 8$ $\quad 8 \cdot 4 :: 2 \cdot 1$

$5+15 = 16$ $\quad 16 \cdot 12 :: 3 \cdot 2$

$7+25 = 32$ $\quad 32 \cdot 24 :: 4 \cdot 3$

$9+41 = 50$ $\quad 50 \cdot 40 :: 5 \cdot 4$

$11+61 = 72$ $\quad 72 \cdot 60 :: 6 \cdot 5$

Oltre a questa proprietà della colonna comune, si rileva il particolar legame della serie delle posizioni, e della serie de' triangoli, sommando gli esponenti de' triangoli, e comparando

comparando la somma agli estremi della 3ª. colonna delle posizioni; si trova la serie seguente.

Somme	3ª. colonna	
8 .	10	:: 4.5
16 .	21	:: 6.7
32 .	36	:: 6.9
150 .	55	:: 10.11
72 .	78	:: 12.13

Questa essendo serie razionale di ordinate ragioni, si vede, che le due serie hanno un principio comune, e sono fra loro congiunte di comuni proprietà, ed affezioni: senza perdere il tempo a mostrare gli altri legami che realmente vi sono.

Ritornando con l'occhio alle tre serie delle posizioni, proposte congiunte, e dei triangoli Pitagorici: si osservi che in riconoscendo della 3ª. mezzana posizione 24. 31. 36. si trova il terzo mezzano triangolo Pitagorico. 7. 24. 25. Questo è il triangolo della sesquiterza g.d., 49. 46. 49. 50. 56 essendo 49 = $\sqrt{24\ 25}$ 24+25, e 7. la radice di 49. e somma de' termini della sesquiterza 3.4. Così 49. è necessariamente il mezzo aritm.co della sesquiterza g.d.

Qui si tocca con mano, che se
li esponga gli esponenti g.co
della 3ª. proporz.e congiunta
e 24.36 della 3ª. mezzana
proporzione, e 4a.36 della
sesquis.ª g.d. di cui è il
triangolo Sibagonico 7.24.25.
e da questi sei termini
ordinabi si deducano le
differenze così

g.co. 24.36. 4a.36
11 . 4 . 12a . 6 . 14

gli estremi 11.14 costituis-
cono la ragione di Archimede
del cerchio inscritto 11. al
quadrato circoscritto 14.
dè ove mezzi poi 4.12a.6,
il mezzo 12a. è triplo del
4., duplo del 6, ed i due
6.4 sono in sesquialtera.
cosicchè ordinabi 12a.6.4
formano la tripla armca.
6.3.2a.

g. co. 24. 36. 4a. 36
11 . 4 . 12a . 6 . 14
7 . 8 . 6 . 8
1 2a 2a
1 0
1

$\overline{33}$ $\overline{4a}$
11 . 14

Si sa che $1 \cdot \frac{1}{2}$ può essere anche armca.
geometrica, armonica. ma
$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} :: 6.3.2a.$ è armonica.
adunq;

N°. 1

2 · 3 · 4 · 5 · 6	$5^2 - 3 \times 3 = 25 - 9 = 16$	4 · 3 · 5	
6 · 8 · 9 · 10 · 12	$10 \times 10 - 8 \times 8 = 100 - 64 = 36$	6 · 8 · 9	3 · 4 · 5
12 · 15 · 16 · 17 · 20	$\overline{17}^2 - \overline{15}^2 = 289 - 225 = 64$	8 · 15 · 17	
20 · 24 · 25 · 26 · 30	$\overline{26}^2 - \overline{24}^2 = 676 - 576 = 100$	10 · 24 · 25	5 · 12 · 13
30 · 35 · 36 · 37 · 42	$\overline{37}^2 - \overline{35}^2 = 1369 - 1225 = 144$	12 · 35 · 37	

N°. 2 · 3 · 4 · 5 · 6	3 · 6 :: 1 · 2	1 + 2 · 4 · 5	$\frac{3}{1} \cdot 4 \cdot 5$
10 · 12 · 13 · 15	10 · 15 :: 2 · 3	2 + 3 · 12 · 15	$\frac{10}{2} \cdot 12 \cdot 13$
21 · 24 · 25 · 28	21 · 28 :: 3 · 4	3 + 4 · 24 · 25	$\frac{21}{3} \cdot 24 \cdot 25$
36 · 40 · 41 · 45	36 · 45 :: 4 · 5	4 + 5 · 40 · 41	$\frac{36}{4} \cdot 40 \cdot 41$

N°. 3.

2 · 3 · 4 · 5 · 6	6 − 2 · 3 · 5	4 · 3 · 5	
6 · 8 · 9 · 10 · 12	12 − 6 · 8 · 9	6 · 8 · 9	3 · 4 · 5
12 · 15 · 16 · 17 · 20	20 − 12 · 15 · 17	8 · 15 · 17	
20 · 24 · 25 · 26 · 30	30 − 20 · 24 · 26	10 · 24 · 26	5 · 12 · 13
30 · 35 · 36 · 37 · 42	42 − 30 · 35 · 37	12 · 35 · 37	
42 · 48 · 49 · 50 · 56	56 − 42 · 48 · 49	14 · 48 · 49	7 · 24 · 25

N°. 4.

4 · 3 · 5		de Renaldy	
6 · 8 · 10	3 · 4 · 5	8 · 6 · 10	12 · 9 · 15
8 · 15 · 17		12 · 16 · 20	16 · 24 · 30
10 · 24 · 26	5 · 12 · 13	16 · 30 · 34	24 · 45 · 51
12 · 35 · 37		20 · 48 · 52	30 · 72 · 78
14 · 48 · 50	7 · 24 · 25	24 · 70 · 74	36 · 105 · 111
		28 · 96 · 100	42 · 144 · 150

cresce la pr. colonna di n. pari di differ. 2. la 2da e 3a. di 2 in 2 fino 5 · 7 · 9 · 11 2

cresce la pr. colonna di dispari di differ. pari = 2. e le altre di 4 · 12 · 16 2

questa serie ha sui i termini doppj di quei della prima

cresce la pr. colonna de' pari di n. pari 4 · e le altre di 10 · 14 · 18 · 22

questa serie ha sui i termini tripli di quei della prima

cresce la pr. colonna di n. pari 6; e le altre di 15 · 21 · 27 · 33 · 39 ·

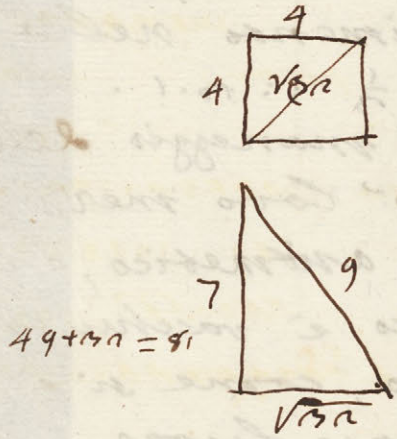
adunque $1.\frac{1}{2}$ è principio di armonica proporzione, e. serie, ma non si fa armonica se non per via della sesquial= tera $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} :: 3.2$; ed ha il suo compimento nella tripla $1.\frac{1}{3} :: 3.1$. Ecco tutto il maneggio delle ragioni co' loro mezzi, armonico, aritmetico, e con= troarmonico è racchiuso nel cerchio, come si è ve= duto a suo luogo

Terza classe di Triangoli Disagonici

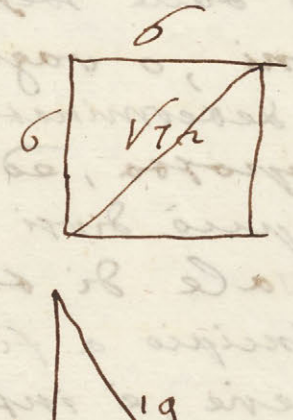
Ecco una 3ª classe di triangoli che chiamar si possono Disagonici perchè nascono dalle stesse pro= porzioni, o ragioni co' mezzi determinati. Questa è composta, ed in un senso può dirsi la più universale di tutte: Perchè da principio a fine della sua serie, è inseparabile dalle radici duple lineari, cioè dalla ragione che passa fra il lato, e la diagonale del quadrato, in cui ha il suo principio; ed in questa agiscono egual= mente i tre mezzi, armo= nico, aritmetico, e contrar= monico. Si spiega.

Dabi i tre mezzi 3. 4. 5
della tripla g.d., si formino
nel modo seguente { 3+4=7 / 4+5=9
Dico che dedotta la
diagonale del quadrato, il
cui lato BC sia uguale a 4
(lato dedotto da $\sqrt{7+9}=\sqrt{16}=4$)
Posta la diagonale $\sqrt{32}$
p base di un triangolo
rettangolo; l'altro lato ne
sarà =7; e la Ipotenusa sarà
=9: E questo sarà un tri-
angolo che dir si può Dibago-
nico perchè nasce da' mezzi 3.4.
della ragione tripla ó mezzi
deeerminati

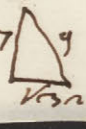
$$7\times 7+32=81=9^{\square}$$

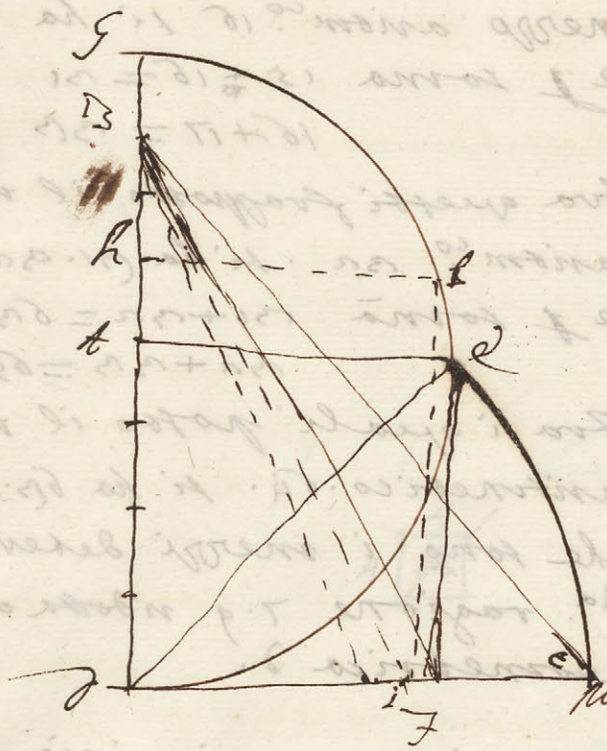


Similmente dabi i tre mez-
mini 6. 9. 10. della tripla g.d.
lomabili $6+9=17$
$9+10=19$
e costruito un quadrato con
un lato = ~~$\sqrt{36}$~~ $\sqrt{17+19}=\sqrt{36}=6$,
la diagonale $\sqrt{72}$ si faccia
base di un triangolo rettangolo,
col lato = 17, e la Ipotenusa
= 19: Questo triangolo si
potrà chiamare Dibagonico
E così s'intenda di questi
triangoli in ordinata indefin.
progressione de' tre mezzi delle
solite proporzioni g.d.



Per costruire il pr. di questi
triangoli che era 7 9, divida





Bd in sette parti eguali, e su quattro di queste parti facciasi il quadrato b7, e fatto raggio della diagonale d2, col centro d descrivasi l'arco 2c, e prolungato d7 fino in c, sarà dc la base del triangolo ricercato, e Bc ne sarà la perpendicolare = 9
Poichè 7×7 = 49; 9×9 = 81;
81 − 49 = 32. ma $\overline{Bd}^2 = 16$,
adunque la diagonale de sarà = $\sqrt{Bc}$
ma $\overline{B7}^2 = \overline{Bd}^2 + \overline{d7}^2 = 49 + 16 = 65$.

7 · 9
7 · 8 · 9
56 · 63 · 64 · 65 · 72

65 è il mezzo convavm.o della propovz. g.d. nata dalla ragione 7·9.
Pavenne il mezzo aritmetico 64; si prolunghi dB in g ficchè dg = 8; $\overline{dg}^2 = \overline{hl}^2 = 8 \times 8 = 3 \times 5 = 15$, sarà $\overline{Bg}^2 = 49 + 15 = 64$. In dg = $\sqrt{15}$, e d7 = 16. si ha il centro della propoz.e g.d. 12 · 15 · 16 · 20, la cui forma è 3 · 4 · 5, e si ha 15 determinabam.te medio armonico, e 16 medio aritmetico. ma dai mezzi 3 · 4 · 5 della tripla si ha la forma della propovz.ne nata dalla ragione 7·9, ~~3+4=7~~ 4+5=9 fra i quali frapporto 8. si ha la forma 7+8 = 65; 64 9 = 17.

Fra 15. 17. frapposto il
mezzo aritm.co 16 si ha 15.16.17
e la somma 15 + 16 = 31
16 + 17 = 33
Fra questi frapposto il mezzo
aritm.co 32. si ha. 31. 32. 33
e la somma 31 + 32 = 63.
32 + 33 = 65
Fra i quali posto il mezzo
aritmetico. 64. si ha 63. 64. 65
che sono i mezzi determinati
da ragione 7. 9 ridotta a propor.
geometrica.

La operazione principia dalla
tripla co' suoi mezzi determi-
nati. 2. 3. 4. 5. 6.
e si continua nella
56. 63. 64. 65. 72
perche di questa è somma
7. 8. 9, ugualmente che
del triangolo BCD
da 3. 4. 5; da 15. 16. 17; da 63. 64. 65.
si hanno triangoli della prima
specie. Da 7. 8. 9; da 31. 32. 33;
da 127. 128. 130, si hanno
triangoli della ~~ultima~~ seconda specie,
dimostrabi di sopra
Resta da provare che quel modo
di operare ~~si~~ per somma, dà un
quadrato.
Non dandosi 3. 4. 5 senza il suo
quadrato ch' è il loro mezzo
aritmetico; formandoli nel detto
modo, la somma delle due somme
deve

deve essere un quadrato;
perchè 3+5. è uguale
a due quadrati del medio, ma
4+4. sono due altri quadrati
del medio. onde 3+4+4+5
cioè 7+9 sono quattro quadra-
ti del medio; adunque fanno
un quadrato, la cui radice
è lo stesso medio 4., duplo
della radice 2. di esso medio
4. Dalla $\sqrt{16}=4$ si deve
fare il quadrato e trovarne
la diagonale. E similmente
nel 2do caso di 8.9.10

$8+9=17$
$9+19=19$
$17+19=36$; $\sqrt{36}=6$. questo
è il lato del quadrato, di
cui trovar si deve la dia-
gonale, che si pone poi
per base del triangolo

4 $\sqrt{32}$ 4

Abbiamo fin quì dimostrato
che i triangoli Diagonici
dipendono essenzialmente
dalle vagioni co' loro
mezzi determinati, e che
si applicano al cerchio gli
stessi triangoli, come abbiamo
provato di sopra

Fine del lib. VI.

Libro VII.°

Del rapporto fra il diametro, e la circonferenza

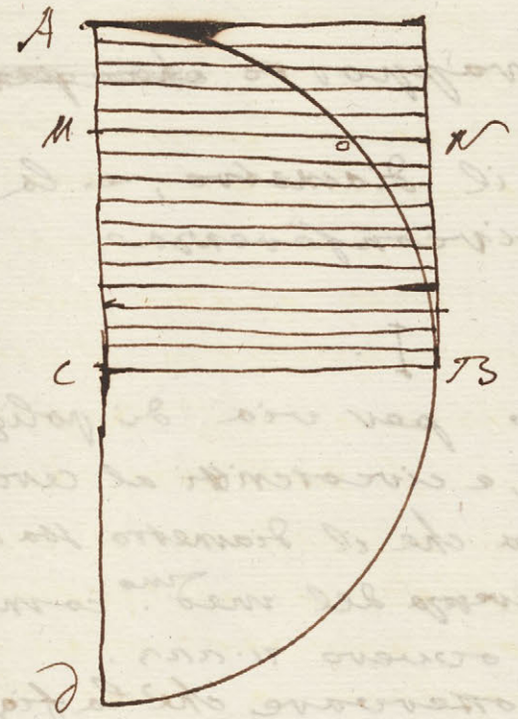
I.

1. Archimede per via di poligoni inscritti, e circoscritti al cerchio dimostrò che il diametro sta alla circonferenza del med.mo come 7. a 22; ovvero 71. a 223.

Si vuole osservare che la figura circolare è una, e tutta la stessa, sempre uniforme. Perchè il raggio, o diametro è misura del cerchio in qualunque punto della circonf.a e però la circonf.a stessa in qualunque suo punto può avere principio, e fine.

Questa unità del cerchio nasce dall' armonica proporzione, da cui il cerchio è costituito.

Si supponga il quadrato BB pieno di linee rette, parallele al lato CB; e fatto centro in C, intervallo in R si descriva il quadrante di cerchio CbB. La circonf.a bB da ciascuna di esse parallele, uguale alla CB, leva una porzione NO, e lascia la No tale, che il quadrato di Ne



MO, determinata dalla circonf.a del quadrante, è sempre un mezzo armonico, mentre il quadrato della MN è sempre un mezzo aritmetico di quella ragione, in cui la stessa linea MN ha diviso il diametro AD; ridotta che sia la ragione stessa a proporz.e geometrica di circoli combinata, e determinata dai due mezzi armonico, ed aritmetico; cioè moltiplicati i termini di essa ragione tra MN, e la metà della loro somma, come si è provato nel p.o libro.

AM = r	r . 4
MD = 4	r . 3 . 4
AD = 6	r×3 . r×4 . 3×3 . 3×4
AC = 3	6 . 8 . 9 . 12
	MO. arm. — MN. aritm.

Il seno MO, come radice del medio armonico, è determinato dalla circonf.a; ed il seno provato MN, come radice del medio aritmetico, è determinato dal lato del quadrato; locche si verifica in ogni seno, e seno provato. Dunque ~~il arco~~ la curva circolare è armonica, e la linea retta, lato del quadrato, è aritmetica.

Si vuol vedere se da questi principj arrivar si possa a ritrovare la ragione che passa fra il diametro, e la circonf.a

si osservi

Si osservi per ora, che le dimostrazioni di Archimede, di Metio, di Euler, sono fondate ne i poligoni inscritti, e circoscritti. Questi, come geometricamente dimostrabili, sono confinati fra rettilinei determinati, perche sono in certi quadri, cioè il triangolo equilatero, il quadrato, il pentagono, e l'esagono regolari. I Poligoni, che da questi dipendono, si moltiplicano bensì all'infinito, ma non arrivano mai a corrispondere a tutte le divisioni possibili del diametro. Tutte le altre figure che non dipendono da queste, e che sono di numero illimitato, sono capaci solamente di Meccanica ~~costruzione~~ costruzione. Ma per lo contrario, di queste divisioni è capace il diametro, è esso altresì capace di altrettante vagioni, e di altrettanti seni, e di altrettante code, e sopra agli archi, in cui il semicerchio resta diviso dai seni; e le code e sopra dano i medj armonici fra la vesta, e il vaggio, come abbiamo provato altrove.

Essendo questa capacità illimitata, pare che a questo modo di

d'investigare la ragione che passa fra il diametro, e la circonfa, non pia da pavo= gonavsi il rispetto confine di quattro soli poligoni, e dei dipendenti da essi, come geometricamente dimostrabili, quando a confronto sono dimostrabili tutti i seni, come mezzi armonici delle infinite ragioni, nelle quali è capace di essere diviso il diametro, e g conseguenza dimostrabili ugualmente le code, e le ipotese, come relative a ciascun seno, ed a ciascuna ragione, ridotta dal cerchio ad armonica proporz., e nobile

Egli è certo, che le indefinite code del cerchio comprendono si i quattro poligoni geome= tricamente dimostrabili, ed i lor dipendenti, come pure tutti i possibili ad inscrivervi, e circoscrivervi al cerchio, ma non geometricamente dimostrabili - Ma è dimo= strativamte certo, che a ciascuna coda corrisponde il suo seno, che il quadrato di ciascun seno è mezzo armo= nico della ragione, in cui è diviso il diametro, sia pure il diametro diviso in parti razionali, o irrazionali

Non vi è adunque confronto fra la

fra la scienza che si ha dal limitato confine, a cui sono ridotti i poligoni inscritti, e circoscritti, e quella che più avvi dalla illimitata estensione de' seni, corde, e tangenti.

Hanno i Geometri considerati i seni come mezzi Geometrici, non solo della ragione, in cui si divide il diametro. Si deve avvertire in oltre che i quadrati de' seni sono mezzi armonici della stessa ragione ridotta a proporzione g.d., e che l'arco il cerchio è armonico.

Se alcuno obiettasse che il cerchio è geometrico, e non armonico, perche nella circonferenza vanno a finire i seni, che sono medj geometrici fra i pezzi del diametro; onde la circonferenza è geometrica, perchè passa per gli estremi di tutti i mezzi geometrici; anzi è geometrica a più forte ragione di quello sia armonica, perchè non i seni, ma i quadrati de' seni son medj armonici; e la radice è sempre prima del quadrato:

Se uno così obiettasse: Egli è pregato avvertire, che qui non si tratta di trovar mezzi fra due termini, ma mezzi di una ragione; Non si tratta di trovare un mezzo solo, ma

tutti i possibili mezzi; volendosi trovare di quante proporzioni possano esser quegli estremi che stan fra loro in una data ragione; giacchè il trovare la sola proporz. geometrica è una cognizione più ristretta che trovarle tutte

Sia data la ragione 1.2. Fra li numeri 1.2. si trova il mezzo geometrico $\sqrt{2}$, e si ha la proporzione 1. $\sqrt{2}$. 2.; ma se uno vuole tutti i mezzi possibili fra i due estremi, che stanno fra loro :: 1.2 Egli ha discoverà così 1.2 :: 2.4. Fra 2.4 il medio aritmetico è = 3, e si ha 2.3.4. proporzione aritmetica continua. Se dico poi 1x3.2x4 :: 3x3.3x4

6. 8 :: 9. 12

e ci aggiungo inoltre il 6. fra 9.12: Io ho 8. medio armonico; 9 medio aritmetico; & 6 contr'armonico; e $\sqrt{6 \times 9} = \sqrt{72}$. medio geometrico fra gli estremi 6.12 :: 1.2. Ecco dunque trovati tutti i mezzi, e tutte le proporz.

6. 8. $\sqrt{6 \times 9}$. 9. 10. 12

Prima v'è la ragione 1.2, ovvero 2.4, e poi v'è il prodotto de' termini della media 1x4=8 ch'è

ch'è il quadrato del seno, medio armonico; in secondo luogo poi si ha la radice del medio armonico, ch'è il seno, mezzo geometrico fra i pezzi del diametro, l'ultimo a ritrovarsi. Scorro leggiermente queste cose, perchè ne abbiam parlato altre volte.

Dunque il cerchio prima di tutto è armonico; e il cerchio geometrico, fa bisogno moltiplicare il mezzo armonico, ch'è il 1° a ritrovarsi, per il mezzo aritmetico, che si trova dopo l'armonico; e poi di questo prodotto devesi trovar la radice, la quale in questa operazione non è prima del quadrato, ma si deduce dal quadrato. Onde il cerchio non è geometrico se non per deduzione, cioè perchè il prodotto del mezzo armonico per mezzo aritmetico è sempre il quadrato del mezzo geometrico

$$1 \cdot \square$$
$$\square \cdot 4$$
$$\square \cdot 3 \cdot 4$$
$$6 \cdot 9 \cdot 1\square$$
$$6 \cdot 8 \cdot 9\ 1\square$$
$$6 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 1\square$$
$$6 \cdot 4 \cdot \sqrt{8 \times 9} \cdot 9 \cdot 10 \cdot 1\square$$
$$1 \qquad \square$$
$$\frac{6}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{\sqrt{8\times 9}}{6} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{1\square}{6}$$
$$1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{\square}}{6} (=\sqrt{\square}) \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot \square$$

11. Analisi del rapporto fra il diametro, e la circonfa. del cerchio.

Archimede il diametro alla circonfa. sta come 7. ad 22, o come 71. ad 223. Il pr. rapporto è un po minor del vero; il 2do un po magg^re del vero cioè la circonfa. è più di $3\frac{10}{71}$, meno di $3\frac{10}{70}$

le frazioni $\frac{22}{7} \cdot \frac{223}{71} :: \frac{156}{497} \cdot \frac{156}{497}$

Posto il tanto il diametro = 497, sarà 156 magg^re della circonfa., e 156 il minore della medesima: la differenza fra l'uno e l'altro valore è minore di $\frac{1}{497}$

che se $\frac{7}{22} \cdot \frac{71}{223}$ si riducano a comun denominatore si ha $\frac{1561}{4900} \cdot \frac{1562}{4900}$

Posto per tanto il circonfa. = 4900, sarà. 1561. minore del diametro, e 1562. magg^re del diametro. e l'uno, e l'altro valore sarà differente dal vero diametro meno di $\frac{1}{4900}$. Sarà

497. 1561. 1562 4900

poiché il prodotto degli estremi è eguale a quello de' mezzi

Data la ragione tripla 1. 3 :: 22. 66 co' mezzi determinati, 3. è il mezzo arm^co, quello anarmonico

5. convarmonico, cioè dato

2 · 3 · 4 · 5 · 6

ciascuno de' due mezzi 3 · 4 · 5 · determina la proporzione 7 · 22 fra due mezzi delle consecutive proporzioni, e mostra co'l metodo della differenza la natura di essa ragione

1° Prendasi per il diametro il mezzo armonico 3; si troverà la circonferenza fra 9 · 10 ·

Poichè 7 · 22 :: 3 · $\frac{3\times22}{7}=\frac{66}{7}=9\frac{3}{7}$

adunque la circonf.a del diametro 3, è $\frac{3}{7}$ più di 9, adunque è $\frac{4}{7}$ meno di 10. Le differ.e sono $\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{7}$ :: 3 · 4; e 3+4=7

Se il diametro fosse = 1;

7 · 22 :: 1 · $\frac{22}{7}=3\frac{1}{7}$

la circonf.a sarebbe $\frac{1}{7}$ più di 3, e $\frac{6}{7}$ meno di 4. Le differ.e $\frac{1}{7}\cdot\frac{6}{7}$ :: 1 · 6 | 6+1=7

Se il diametro fosse = 2

7 · 22 :: 2 · $\frac{44}{7}=6\frac{2}{7}$

la circonf.a sarebbe $\frac{2}{7}$ più di 6, e $\frac{5}{7}$ meno di 7; $\frac{2}{7}\cdot\frac{5}{7}$ :: 2 · 5 | 2+5=7

Poichè parzialmente facendo 7 · 22 :: 3 · 9
:: 3 · 10

si avrà 7×9 . 3×22 . 7×10
63 . 66 . 70

differenze 3 . 4
3+4=7

la circonf.a è più che tripla, meno che quadrupla del diametro. Resta diviso il diametro 7 nella ragione 3 · 4, centro della tripla 2 · 6 co' mezzi armonico, ed aritmetico, cioè centro di 2 · 3 · 4 · 6, da cui desumendo la tripla armonica 6 · 3 · 2, si ha 6+3+2=11; e la somma del centro è 3+4=7; ed 11 · 7 è la ragione del cerchio al quadrato inscritto.

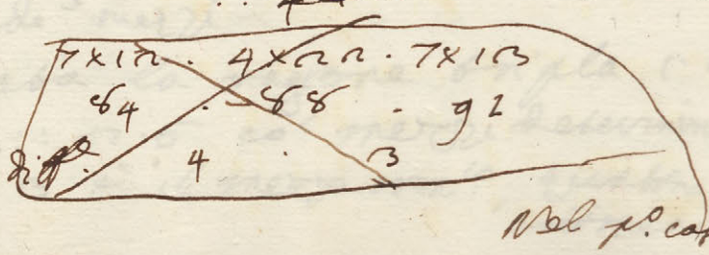
Si ha ancora la ragione 7 · 11 nè due termini esclusi da 6 · 8 · 9 · 10 · 12
7 11

e di più si ha da 6 · 8 · 9 · 10 · 12
3 · 4 5 · 6

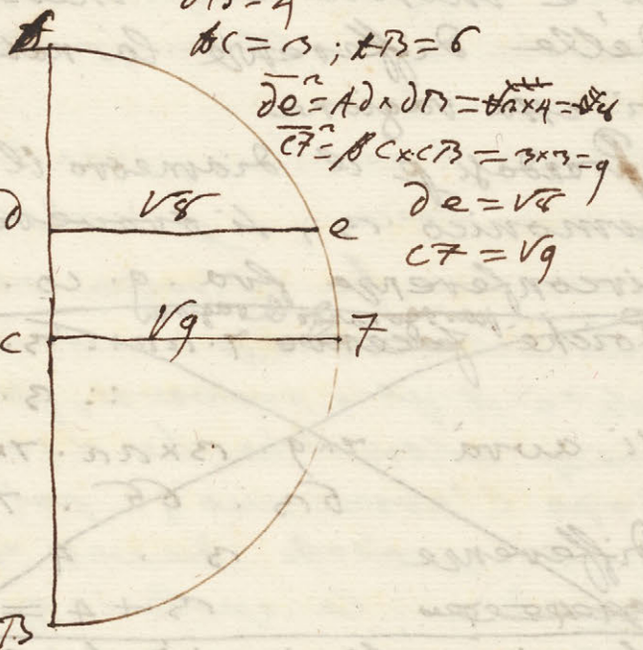
proporz.e aritmetica diretta col mezzo armonico 4., e contr armonico 5., in cui 3+4=7, e 5+6=11. Dalla 10.14.15.16.30 si ha 20.12 13.15
in cui restan esclusi 11. 14
ch'è la ragione del cerchio inscritto al quadrato circoscritto Ma la duplà è prima della sesquialtera, e questa determina la duplà 1.$\frac{1}{2}$ ad armonica proporz.e 1.$\frac{1}{2}$.$\frac{1}{3}$. Il seno corrispondente alla metà del diam.o è = $\sqrt{9}$; Il seno trovato da $\frac{1}{3}$ del diametro è = $\sqrt{8}$ i cui quadrati 8.9. danno il rapporto della duplà 8.12. co' mezzi armo.co ed aritm.co 6.8.9.12; onde indica che nella duplà si hanno i confini della circonfa fra 9.10 di 6.8.9.10.12
aritm. corr.
Posto il diam.o = 3 la circonfa sarà più di 9, meno di 10 come posto il diametro = 1, era la circonfa più di 3, meno di 4.

4°. Prendasi 4. per il diametro: sarà la circonfa fra 12.13 cioè maggiore di 12, minore di 13. Poiché ~~guadagnando la~~ ragione

$7.22 :: 4.\frac{4\times 22}{7} = \frac{88}{7} = 12\frac{4}{7}$
$:: \frac{4}{7}$ si avrà



Nel p.o caso



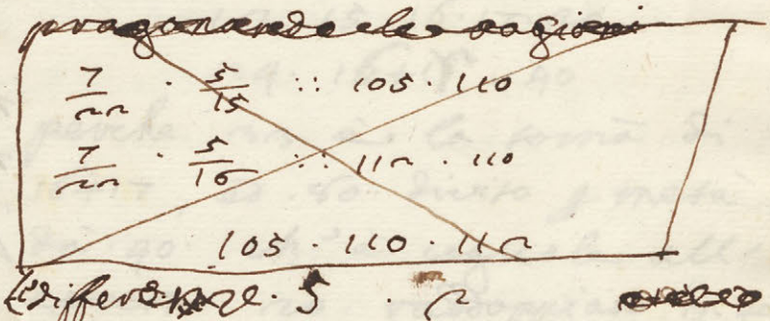
$\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{4} :: 36.30$

$\frac{12}{13} \cdot \frac{9}{10} :: \frac{120}{} \cdot 117$

adunque la circonfa è = a $\frac{4}{7}$ più di 12; ed è $\frac{3}{7}$ minore di 13. differ.a $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} :: 4.3$ (4+3=7)

Nel 1°. caso, in cui il diametro era rappresentato dal mezzo armonico .3., si avea la circonferenza fra il mezzo arm.co e contrarm.co 9.10, e le differ.e erano 3.4 - ora che il diametro è rappresentato dal mezzo aritmetico .4. si ha la circonfa. fra il mezzo armonico ed il contrarmonico 12.15, e si hanno le differ.e 4.5. ch'è la stessa ragione di prima, ma inversa; giacchè la serie aritmetica è la inversa dell'armonica; onde le differ.e indicano che il diametro che prima era il mezzo armonico .3., ora è divenuto il mezzo arm.co 4.

III°. Essendosi il diametro il mezzo contrarmonico .5., si troverà la circonfa. fra 15.16, mezzi di 12.15.16.17.20. Poichè



differenze 5 . 2 sono i primi numeri della serie de' contrarmonici 2 . 5 . 10 . 17 . 26 &c che conservano la natura contrarmonica del diametro .5.. ed è 5 = 1+4 sequialtera = 1+4 il .5. in quanto composto di 1+4

7 . 11 : 5 . 110/7 = 15 5/7

adunque la circonfa. del diametro 5 è 5/7 più di 15, e 2/7 meno di 16; è fra 15.16. Le differe sono 5/7 . 2/7 :: 5 . 2 / 5+2=7

Posto il diam°. = 6

7 . 11 : 6 . 132/7 = 18 6/7

Circonfa. 6/7 magg.e di 18 ed 1/7 minor di 19

differe. 6/7 . 1/7 :: 6 . 1 / 6+1=7

Posto il diam°. = 8 / 7 . 11 :: 8 . 176/7 = 25 1/7

6

è di natura contrarmonica, essendo la somma di due quadrati

si osservi che c. 5 dan le radici della sestupla, dachè diviso due in . 1 . 1 , e 5 in . c . 3 , si ha

1 × 1 ● c × 3 :: 1 . 6

III°.

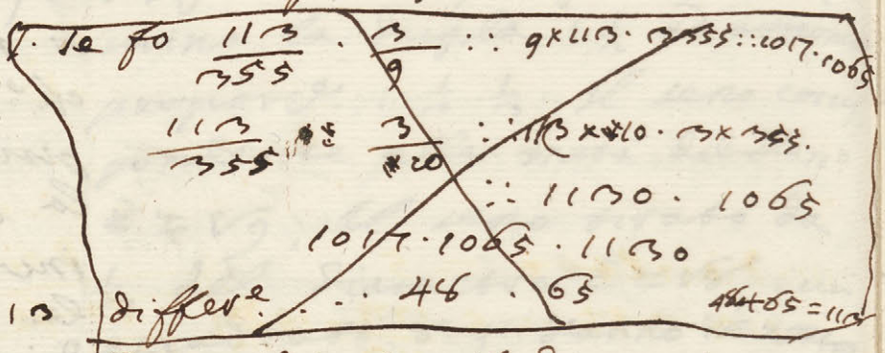
Vediamo ora cosa succeda nella posizione di Mezio

1. diam. = 3

2. Se fo. 113 . 355 :: 3 . $\frac{1065}{113}$ = $9\frac{44}{113}$ la circonfa. del diametro. 3. sarà $\frac{46}{113}$ magg. di 9 ; e $\frac{65}{113}$ minor di 10.

differe. $\frac{46}{113}$. $\frac{65}{113}$ :: 46 . 65

46 + 65 = 113



Resta diviso il diametro 113 in 46 . 65 , e 46 , è il medio armonico di 42 . 46 . 49 . 50 . 56 ; e 65 è il mezzo contrarmco. di 56 . 63 . 64 . 65 . 72 .

Per Archim. 3 . 4 :: 46 . 64

P. mezio 46 . 65

46 . 64 . 65

P. Archim. 46 + 64 = 110 cir. 355

P. mezio 46 + 65 = 111 355

c c 5 707

$\sqrt{c\,c\,5}$ = 15 2° 8 | 101

14 . 15 . 16

mezzo contr. di 90 . 99 . 100 . 101 . 110

14 × 15 = 14 × 16 . 15 × 15 . 15 × 16

c 10 . c c 4 . c c 5 c c 6 . c 240

110 113

in cui si trova precisamente il diametro di Mezio, dividendo il pari c c 6 a mezzo

11. Se fo

II. diametro = 4

113 . 355 :: 4 . $\frac{1420}{113}$. 1c $\frac{64}{113}$

la circonfa del diamo 4 è $\frac{64}{113}$ magr di 1c; $\frac{49}{113}$ minor di 1c

differe $\frac{64}{113} \cdot \frac{49}{113}$ :: 64 . 49

64 + 49 = 113

113 / 1c / 1420 / 113 / 1356

II. 1c 80 $\frac{113}{355} \cdot \frac{4}{1c}$ :: 1c × 113 . 4 × 355

:: 1356 . 1420

e $\frac{113}{355} \cdot \frac{4}{1c}$ :: 113 × 113 . 4 × 355

:: 1469 . 1420

1356 . 1420 . 1469

differe 64 49

La differenza di mezzo cresce vano della sesquiterza :: 65 . 64

e mancavano :: 48 . 49

Ma 48 . 49, e 64 . 65 sono mezzi fra 42 . 7a :: 7 . 1c

che sono radici dello triplo

perchè 3 × 4 . 6 × 6 :: 1c . □36. la quale tripla si è proposta per principio dell'esame

III. diametro = 5

113 . 355 :: 5 . $\frac{1775}{113} = 15\frac{60}{113}$

la circonfa è $\frac{60}{113}$ magre di 15, e $\frac{53}{113}$ minore di 16. sta fra 15 . 16

le differe sono

$\frac{60}{113} \cdot \frac{53}{113}$ :: 60 . 53

60 + 53 = 113

113 / 15 / 65 / 113 / 1695

III. 80 $\frac{113}{355} \cdot \frac{5}{15}$ :: 15 × 113 . 5 × 355

:: 1695 . 1775

$\frac{113}{355} \cdot \frac{5}{16}$ :: 113 × 16 . 5 × 355

:: 1808 . 1775

trovai 1695 . 1775 . 1808

differe 80 . 53 dividono

(. perchè dividesi 60 per mezzo :)

il diametro 113 in questa ragione, che viene da

1c . 15 . 16 . 17 . 2c

c4 . 16 + 17 . 40

perche 33 è la somma di 16 + 17, ed . 60 . diviso per metà dà . 40 . ch' è eguale all' esterno 2c raddoppiato in 40. perchè si sono somati i due mezzi 16 aritmetico, e 17 contrarmonico, la quale somma ha dato 33.

la natura di questa ragione avendo principio dal estremo contrarmonico . 5 ., che si è preso

C. Perchè si sommano questi due termini? 5·16 +16 = 36

C. [illegible] d'onde nasce il termine 37?

C. Perchè dividesi 107. per 7. giacchè 107. ai minimi termini

C. e perchè ridursi ai minimi termini?

C. perchè sommare 25+26?

per il diametro, segue la contrarmonica nativa del suo principio, perchè 33+40 = 73 = 36+37 della 30. 35. 36. 37. 42

Nè può negarsi questa analisi e somma, perchè somati i tre termini 5+15+16 = 36, si ha la somma 36, mezzo aritmetico della detta proporzione, di cui è mezzo contrarmonico il 37.

Ma nella posizione di Archimede, posto il diametro = 3, si trovano nelle differenze 2. 5. le radici della equazione seguente. Vediamo ora cosa si deduca da 33. 60. anzi 33. 40. 16×17 = 272; 40×40 = 1600; Moltiplicato 272×6 = 1632, si avrà

1600. 1632

differenza 32, a cui divisa 1600. 1632, si ha 30. 31 i quali sommati insieme danno 61; onde la differenza 33. 60. ridotta a 33. 40, si risolvono in 61. contrarmonico di 90. 99. 100. 101. 110, il quale 61. si è trovato ancora sommando le circonferenze di Archimede, e di Mezio 355+355 = 707, che diviso per 7. dà 101 ridotto ai minimi termini.

Si noti che 30. è il mezzo contrarmonico di 42. 48. 49. 50. 56; e 31 = 25 + 26 di 10. 24. 25. 26. 30

Quindi si ha la indicazione che

che l'albero cercato (oltre 50.51) sia 49 = n4 + n5

49 . 51

radici di 48 5n

1n 1

e sono 99.101

radici di 98 10n

49 . 51

Tutto adunque si risolve nella sesquialtera vagione, determinante l'armonica serie; ma la sesquialtera, e la sesquiterza composte, dan la dupla, prima di tutte le vagioni.

ma 35.49 :: 5.7 } principi di serie radicale 2da dupla

36.51 :: 1n.17 }

e 35.36. sono il centro

di 30.35.36.37.4n.

in cui 30.4n :: 5.7 / 5=3+2 / 7=3+4

si vuol osservare che sono i diametri di Bochim.° 7

di Ceulen. 5. con o apicato

fondati in .5.7.10.

Sottrar le due vagioni

di Bochim. 7.n. 70.n10

71.n13

70.71. si risolvono nel centro 35.36 della

30.35.36.37.4n

poiché 35+35 = 70

35+36 = 71

In olbe. la circonf.a di Metio = 355 (divisa da 5) si risolve in 71 = 35+36

e paragonate le due posizioni

Ceulen diam. ½ circonf.a

500000 . 157079.

C. diam.° di Ceulen non è 5. ma. 10. e rapporto a tutta la circonf.a, cui si riferisce il diam.° 7. di Boch.

C. olbo arbicio

C. Bue è andato ova la seconda.°

di Archimede $\frac{7}{22}$
di Metio $\frac{113}{355}$

$\frac{7}{22} - \frac{113}{355} :: 7\times355 . 113\times22$

si risolvono in :: 2485 . 2486

di cui la circonfa di Archime. eccede ~~quella~~ l'altra

ma data la raddoppia 35.70
i suoi mezzi di proporz.ne sono . 49 . 50 . così 35 . 49 :: 50 70
poiché il prodotto degli estremi e de' mezzi è = 2450.
la circonfa di mezzo è = 2485
e 2450 . 2485 :: 70 . 71 (div. per 35); adunque dipendente dal centro 35 . 36 degli estremi 70 . 71 :: 5 . 7;
ed aggiunta la stessa differa alla circonfa di mezzo, viha 2485 + 35 = 2520. dovo devenire in armonica proporz.ne 2450 . 2485 . 2520, che dividendo danno . 70 . 71 . 72
35 36

Indi si verifica che dato il diametro . 791 ., comune alle due circonfe di Archim. 2485
e di mezzo . . . 2485
e moltiplicabolo per 3, viha 791 × 3 = 2373 (e ciò poiché la circonfa è tripla, e più del diametro) e comparabolo al 3°. termine 2520, risulta la ragione 2373 . 2520 ::
$16\frac{21}{147} . 17\frac{21}{147} :: 16\frac{1}{7} . 17\frac{1}{7}$
La differa 147 = 60+30+20+15+14+6
cioè = alla somma della seconda armonica . l'avanzo 21 è =
1+2+3+4+5+6

rl = 1+r+3+4+5+6, somma della seconda armonica. La ragione 16.17 è quella del mezzo armonico, e del contrarmonico di 12.15.16.17.20 in cui 12.20 :: 3.5, [illegible] de' due mezzi 3.4.5 - della tripla r.6 . cioè 2.3.4.5.6 Finalmente sommando 16+17 = 33, è 21.33 :: 7.11, ragione di Archimede fra il quadrato inscritto, ed il cerchio circoscritto

Vi è la ragione di [illegible] queste cose ne' due mezzi 3.4.5, [illegible] questi [illegible] fondamento di questa operazione.

La ragione che corre fra il quadrato circoscritto, ed il cerchio inscritto è minore di 4.3; poichè $\frac{14}{11} \cdot \frac{4}{3}$ :: 3×14 . 4×11 :: 42 . 44; ed è maggre di 5.4; poichè $\frac{14}{11} \cdot \frac{5}{4}$ :: 4×14 . 3×11 :: [illegible] . 55; e già la ragone di 4.3 è maggre di quella di 5.4 poiche $\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$ :: 16 . 15. Dunq; si dovrà trovare il cerchio cioè il termine che lo esprime, fra 16.15. centro di 12.15.16.20., in cui 12.16 :: 3.4, e 12.15 :: 4.5 e similmente 16.20 :: 4.5, e finalmente 12.20 :: 3.5

Dal diametro 3. si è trovato il diametro di mezzo = 113.

diviso in 48.63. dal diame-
tro 4 in 49.64. tutti due
quadrati e mezzi arithmetici
delle dette proporzioni

4r.48.49.50.56.63.64.65.7r

ma 4r.50 :: 3.4; e 56.7r :: 7.9

si faccia $\frac{11}{14} \cdot \frac{5}{6}$ :: 66.70

$\frac{11}{14} \cdot \frac{6}{7}$ :: 77.70

si avrà 66.70.77

differenze 4.7

r×r.3×4 :: 4.1r :: 1.3

Si converta la operazione co

$\frac{14}{11} \cdot \frac{7}{5}$ :: 70.77

$\frac{14}{14} \cdot \frac{7}{6}$ :: 64.77; si avrà

70.77.64 si avvanza

ediffegli 7.7

Adunque la operazione si riduce
in un principio di uguaglianza,
ed in un principio di radici
della tripla 1.3.

Ma 1.r.3. dà r.3.4.5.6; qui
proposta come principio,
e la detta 1.r.3. è compo-
di 1.r, e di r.3; adunque
da r.3.4.5.6 si ha la
guerra della vagione fra
il quadrato circoscritto, ed
il cerchio inscritto.

Si faccia la stessa operazione
su la posizione di Metio
di 45r. quadrato circoscritto,
e di 355, cerchio inscritto

$\frac{355}{45r} \cdot \frac{5}{6}$ :: 6×355.5×45r :: 1065.r65

$\frac{355}{45r} \cdot \frac{5}{7}$ :: 355×7.5×45r ::

:: r485.r050

Vidag Tanto

Si ha il canto 1130. 1260. 1485
differe
100 . 130 :: 126.45
Per archime. erano le differenze
14-7 . Per mezzo loro 126.45:
anco qui devono trovarsi
le radici cubiche
$\overline{126}^3 . \overline{45}^3 :: 676 . 1025 :: 1 . 3$
$\sqrt[3]{1025} . 1025 :: 676 . 675$

e facendo $13 \times 13 = 169$; e $169 \times 3 = 506$; questo diviso per 3. dà $168\frac{1}{3}$. Resta il canto che non si avvicini ad alcuna radici della cubica.
Per principio si son assegnati 3.4.5; ma $3 \times 3 = 9$; $5 \times 5 = 25$ ed il cubo di 9. non è già 25, ma 27.
Si faccia $25 . 126 . 27$
$3 \times 126 . 25 \times 27 . \overline{126}^2 . 126 \times 27$
$650 . 675 . 676 . 7020$
Nè due mezzi 625. arm., 676. aritmetico è compresa la ragione delle differe di
$1025 . 1024 :: 675 . 676$,
rappresentata dai due 126.45 presi, ed inseriti come radici numeriche della cubica
ma preso il mezzo armonico 675 (e nè mezzi armonici si risolve il cerchio) il suo cubo è precisamente $1025 = \overline{45}^3$
Si osserva che $126 + 45 = 171 = 33 + 138$; ed in oltre che 3.4; 6.6; 6.7.8 danno
48 . 48 . 49 . 50 . 56

e 6+7=13 ; 7+6=13 | 6×7=42
7×6=56

42 . 56 :: 3 . 4

Si moltiplichi 13 . 13 perchè 2 . 3 è quella che determina il
per 2 . 3 quoziente
26 . 45

IV°.

Ella è proprietà universale dell'aritmetica serie, che è ancor comune alle ragioni co' tre mezzi determinabili, armonico, aritmetico, e contr'armonico; che presi tre termini di ella serie aritmetica: la somma de' due estremi sta al termine di mezzo :: 2 : 1, Presi 5 termini: la somma de' due estremi sta a quello de' tre mezzi come 2 . 3;
Presi sette termini: la somma de' tre mezzi sta alla somma de' quattro estremi :: 3 . 4
e la somma de' due estremi sta alla somma de' 5 mezzi :: 2 . 5.
Lo stesso succede se si prendesse un n° pari di termini; cioè presi 4 termini, la somma degli estremi sarebbe uguale alla somma de' mezzi
1 . 2 . 3 . 4 | 1+4 = 2+3
E presi sei termini; la somma degli estremi alla somma de 4 mezzi :: 2 . 4; e la somma pure di quattro estremi alla somma de' due mezzi starebbe :: 4 . 2
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 | 1+6 . 2+5+3+4 :: 7 . 14 :: 1 . 2
1+a+5+6 . 3+4 :: 14 . 7 :: 2 . 1

$$\frac{a \cdot a+b \cdot a+2b \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \quad 1+3=2 \cdot 2}{\frac{a}{2a+2b}}$$

$$\frac{a \cdot a+b \cdot a+2b \cdot a+3b \cdot a+4b}{\frac{a+2b}{a+3b} \quad \frac{a}{2a+4b}}$$

$$\frac{}{3a+6b}$$

$$2a+4b \cdot 3a+6b :: 2 \cdot 3$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$$

$$1+5 \cdot 2+3+4 :: 6 \cdot 9 :: 2 \cdot 3$$

$$\frac{a \cdot a+b \cdot a+2b \cdot a+3b}{\frac{a+2b}{2a+3b} = \frac{a}{2a+3b}}$$

La ragione di questa proprietà si è, perchè ogni termine contiene il precedente, ed una differenza di più; onde la somma di ogni paio, del 1° ed ultimo, del 2do e penultimo ec è sempre eguale, come è altresì eguale al doppio del termine di mezzo

La stessa proprietà si verifica, sebbene la progressione aritmetica non fosse data sequente, ma inversa, purchè i termini egualmente distanti dal quello, o quelli di mezzo avessero eguali le differenze rispetto a quello o quelli di mezzo; lo che si dimostra nel med.mo modo

$$\frac{a \cdot a+2d \cdot a+3d \cdot a+5d \cdot a+6d \cdot a+3d}{a+5d} \qquad \frac{a}{2a+6d}$$

$$2a+6d \cdot 3a+9d :: 2 \cdot 3$$

Dati i cinque termini delle ragioni, co' loro mezzi determinabili, sono progressioni aritmetiche inversa colla legge ora esposta. Dunq; in queste proporzioni di cinque termini (1·3·4·5·6 / 6·8·9·10·12) la somma de' tre mezzi stava alla somma de' due estremi come 3·2. cioè in sesquialtera ragione, la quale sesquialtera, come

si è più volte osservato, riduce ad attualmente armonica Seupla, la quale lo evapolo in potenza.

Il nº 5. de' termini è = 1+4 = 2+3

Nel pº caso 5. appartiene alla contrarmonica naturale, perchè è somma di due quadrati; Nel 2do caso appartiene all'armonica naturale, perchè è somma della sesquialtera determinante l'armonico ristretto $\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} :: 3.2$ sia 60 il subb, la somma di $\frac{60}{2} + \frac{60}{3} = 30 + 20 = 50$; e però $50.60 :: 5.6$.

Questo nº 5. di termini è quello che risolve le somme di dette proporzioni nel pº quadrato, medio armonico della prop.ne, de' cui termini si è presa la somma

		di ordine
$2+3+4+5+6 =$	20	4
$6+8+9+10+12 =$	45 . . .	9
$12+15+16+17+20 =$	80 . . .	16
$20+24+25+26+30 =$	125 . . .	25
$30+35+36+37+42 =$	180 . . .	36

Nella indefinita serie di queste proporzioni non si trovava mai senon la sesquialtera, in cui si verifici la proprietà di radice quadrato e cubo

$$5 \cdot 25 \cdot 125$$

5 somma di $2+3$; 25 medio arm.co, e 125 somma di tutti i termini della proporzione

Questi numeri

Questi numeri quadrati sono determinati ancora dall'armonica serie così

		cifre			
1	60				
1/2	30	30	0	1	1+3=4
1/3	20	10	6	3	3+6=9
1/4	15	5	12	0	6+10=16
1/5	12	3	10	10	10+15=25
1/6	10	2	30	15	

la somma 5 + 25 + 125 = 155.
mezzo aritmetico fra 154. 156.
che sono mezzi di proporzione g.d. fra 143. 168

143. 154 :: 156. 168

---

11. 12. 13
132. 143. 144. 145. 156
12. 13. 14
156. 168. 169. 170. 182
11. 12. 13. 14

132. 143. 144. 145. 156. 168. 169. 170. 182

Gli estremi di queste forme sono 11. 14, cerchio a quadrato circoscritto. 12+13 = 25. mezzo aritm.co della sesquialtera 20. 24. 25. 30; 12. 13 sono i due mezzi, aritm.co e armonico della stessa proporz.
20. 24. 25. 26. 30
dividendo 12 : 13
Le cifre del prodotto di 143×168 = 24024, separate dallo zero, sono 24, 24, mezzo aritm.co della detta proporz.

300

V.°

Maggiore scienza contiene la proporzione di Archimede che qualunque altra. Poichè la circonfa armonicamente div

176

176