163

Tartini

11

XII

Tartini

Scienza universale
delle ragioni e proporzioni
espresse ed insegnate col numero
che di esso è l'unico legno reale
Conosciuto e dimostrato nel cerchio
che di essa è l'unico soggetto reale
ordinate e dimostrate con ~~R.U.A.~~ aggiunte illustrate

Osservazioni

su i numeri, e sopra le ragioni
e proporzioni da essi indicate.

ARCHIVIO CIVICO ANTICO
PISANO

Archivio Tartiniano
Arm. A Sez. 2ª
Mss. Colombani
N 2

1. Del rapporto fra il diam.°, e la circonf.a del cerchio pag.9
2. La inscriz.e delle rettilinee regolari figure nel cerchio prova necessariam.te alla divisione avm.ca della circonf.a in 1-1/2-1/3-1/4-1/5-1/8 pag.11
3. Per avere scienza vera del cerchio bisogna ricorrere alla quadratura geometrica d. a. 3-4-6 - - - pag.13
4. Il calcolo della pura scienza è intrinsecamente avmonico p.15
5. Dal 3.° suono si ha scienza positiva, e reale della consonanza avmonica, di cui non è vero che alcuni principj non vi siano se non il piacere che dà all'udito - - - pag.15
6. Idea diversa della unità p.19
7. Formola del 3.° suono - - p.19
8. De' principj ideali, e non ipotetici - - - pag.22
9. Tromba marina - - pag.23
10. I suoni musicali conducono necessariam.te qualunque intelletto alla nozione del numero p.24
11. Oltre la serie avm.ca di parti uguali s'impara dai suoni la serie avmonica - - pag.24
12. Se una sillaba breve si sottoponga ad una nota musicale che sia principio, o mezzo di quella tale misura di tempo che si chiama ordinario, è fisicam.te impossibile il pronunciarla breve pag.25
13. In 1.a 3.a; 5.a 1.a non costituisce la 1.a relazione, 2.a costituisce la 2.a ragione 1.a; 3.a costituisce la 3.a proporz.e 1.a 3.a - pag.26
14. L'avm.ca scienza è difficile; ma questa non è colpa nè di Platone, ne dell'buon della ragione tripla co' suoi merri - - - pag.26
15. Del merro contravm.co pag.
16. Data una ragione, ovvero ne i merri, avm.co, antim.co, contravm.co - - - pag.26
17. Natura intelligibile, attiva, della natura dello stesso, ch'è l'avm.ca unità delle ragioni Natura sensibile, passiva, della natura del diverso, ch'è l'antim.ca unità de' corpi p.30
18. Si ha la circonf.a dalla somma 355 de' termini delle 5. proporz.i 9.a d. della settupla serie delle forme, escluso il merro avm.co Aggiungendovi la somma 97 de' termini contravm.ci si ha 452 quadrato circoscritto pra
19. Delle radici di ragione p.32
20. Fra l'avmonica scienza, e le altre vi è diversità specifica e sostanziale pag.34
21. Il cerchio si rivoglie in se stesso denovo del settuplo confine - - - pag.36
22. Non si è osservata la indefinita cagione che v'è nell'1.° - pag.36
+ Proporz.i congiunte - - pag.37

+ n.3. Teoremi delle proporz. sono mezzi g. fra i quadrati de' n.i naturali — pag. 26
24. Ragione tripla e sue proprietà — pag. 36
+ 25. di quel genere di proporz.i che hanno il p.o termine un n.o quadrato, e i mezzi il p.o termine ed il mezzo armonico della loro proporz.e, i quali mezzi però non sono né arm.ci né aritm.ci né contrarm.ci eccettuata la tripla 4.6.8. + n.3.4.5 — pag. 36
26. Delle proporz.i congiunte pag. 37.
+ 27. Proporzione importante intorno alle radici — pag. 37
28. Proporzione importante in le terne de' n.i dispari p. 37
29. Nelle ragioni e proporz.i è fondato il rapporto del diam.o alla circonf.a pag. 38.
30 la ragione del quadrato circoscritto al cerchio inscritto maggiore di 4. 3., ed eccede 3. A pag. 38 sta fra 3.4.5. centro della tripla n. 3.4.5.6.
31. Delle differenze — — pag. 60.
32. confronto di quantità razionale, ed irrazionale pag. 63
33. Sentenza di Platone circa la forma dell'Universo. pag. 67.
34. Facilità, e difficoltà di questa scienza — — — — pag. 69.
35. Nella serie de' n.i niente v'è di ozioso; tutto è legato vacui pag. 69
36. In questa scienza non hanno luogo le frazioni, né possono aversi — — — — pag. 70.
37. Terne de' termini de' proporz.i pag. 71
38. Fra 2. e l'infinito non vi è alcun mezzo che l'arm.co n. pag. 72.
39. dei Triangoli Pitagorici — pag. 73.
40. Continuata armonia del modo magg.re e del modo minore — — — pag. 78
41. dai decimini n. 5. si ha il diametro, 113 e si ha ancora la circonf.a 355 — — pag. 80
42. mi angoli Pitagorici pavimentale — — pag. 84
43. Ragione, proporz.e progress.e pag. 87.
44. da le ragioni nasce prima delle cose, e le cose reali — — — pag. 90
44. delle Duple — — — pag. 90
45. altra ogg.e nelle radici duple pag. 93
46. Proporz.e dedotta da 11.12.13. pag. 93
47. calcolo di Terno — pag. 94
48. Il mezzo aritm.co di formula è sempre un quadrato pag. 94
49. 43.70 — — — — pag. 94
necessità d'un contrarm.co retto, e il calcolo del cerchio ivi
50. diametro contrarm.co pag. 95.
51. Non si può assegnare la vera quantità ma solo approssimare diam.o circonf.a pag. 96
52. della ragion duplà ivi
53. Formola universale del mezzo arm.co e il prodotto de' termini costituenti la ragione — — pag. 97.
54. Non si deve numerare 1.2.4; ma 1.2.3.4 pag. 97 similm.te, non 1. 1/2. 1/4; ma 1. 2/3. 1/2 pag. 96
55 L'armonica nasce non solo, che la reale metafisica nascosta delle ragioni e proporz.i p. 96
56. in 6.8.9. n. si è il fondamento della nascosta circolare pag. 96
57. Quantità materiale, e formale — — pag. 99
58. si deve esaminare — pag. 107
59. Moltiplicità di posizioni di diametro e circonf.a pag. 107.
60. si passi alla fig. VII. pag. 108

61. divisione del cerchio in qui 360 pag. 111
62. Tasso di Timeo da Locri dell'anima del mondo — pag. 111
63. due proprietà del N° non osservate prima — pag. 112
64. del n°. 10 — — — — pag. 113
65. di due frammenti di Mercurio Trismegisto pag. 114
66. de' pendoli — — — pag. 114

67. de' due principj — pag. 121
Propr. non può darsi un principio attuale privamte armonico senonche unicamte dedotto tale dalla ragione sesquialtera ivi
si dimostra in genere fisico, e metafisico la realità di q.to principio privamte armco, astraendo dalla sesquialtera — — ivi
la duplà è la pr. di tutte le ragioni — ivi
68. Terzo nono. c. 1. dimca dupla in potenza p. 120
69. c'è 6. c. c. pr. proporz. armca 1. 120 ivi
70. la divisibilità.
71. Progresso de' centri pag. 126
72. figure inscritte al cerchio pag. 127
73. si finisce nell'esagono e si torna al principio pr. cioè al raggio. ivi
e la sottesa è il lato del equil.o ivi
74. delle frazioni — — — — pag. 128.
Quadratura del cerchio impossr. ivi
75. V. pag. — — — — — — 134
76. 3a. osservaz.e — — — — ivi
77. 4a. osservaz.e $\frac{14}{11} > \frac{4}{3}$, $e < \frac{5}{4}$ pag. 135.
perché deve trovarsi il cerchio inscritto rispetto a cui quadrato ai. scritto; e rispetto all'esagono un cerchio inscritto, deve trovarsi il quadrato circoscritto fra 5. 6 p. 135.
78. la scienza presente appartiene alla intelligenza, e le scienze comuni al discorso — pag. 136
79. Il diam°. deve esser segnato da un principio sesquialtero, richiesto da un centro positivo, dipendeva dalla contramca. natura pag. 137

80. Serie di radici della 1 pag. 137
81a. 2°. triangolo Diagonico 3. 4. 5 formato da q. 16; perché 3 = √9; 4 = √16
5 = √25 = √9+16 pag. 143
82. Triang.i Diagonici, nati dalla serie delle radici — — pag. 143
83. Diagonico misterio — — pag. 146.
84. Quanto alla scienza del cerchio si è detto, si risolve in 1. 10 p. 147
85. che le cinque forme e relative proporz.i non possano oltre passare la sestupla lo dimostrano le cinque semplici consonanze ed il progresso, e regresso del cerchio rivoglientesi in se stesso denovo la sestupla — — pag. 147
86. si è dimostrata la natura circolare ne le proporz.i particolari ora si viene al complesso di q. p. 148
86. 2. pr. determine de' 3 proporz.i
4a; ultimo forme 6.
1+6=7; 1+2+4=8
87 1. 11. 21. 1×11. 1×21. 11×11. 11×21
arm.o 1 armm.e cons.
11. 21. 121. 231. 231 — ivi
90 1+1. 1+2+1. 1+2+3+2+1. 1+3+3+1
2. 3. 4. 5. 6. ivi
91. 11. 21. 121. 2211. 2431
diff.o 10 100 100 10 6. 8. 9. 10. 12 2. 1. 1. 2
1 10 10 1 pag. 149
Vedi pag. 54, 56. del Trattato di Musica
92. osservaz.i. avvisiamo pure le diff.e ivi
93. cerchio armonico di proprio intrinseco natura, principio, e costruzz.e — — pag. 150
94. diffe.e di sistema universale perché consistenti in se stesse tutti i nervi rispettivi inseparabilmente congiunti, necessariamte dedotte nel modo suddetto. pag. 151

95. Differ.ze dedotte nel modo più alto non sono che la risoluz.ne delle vazioni e proposiz.i del genere aggiacicolare, e aggiacente nelle vazioni del genere molteplice. Vedi con attenz.e — pag. 151.

96. Prova delle differ.ze in figura p. 152 1·1·1·1; 2·1·1·2; 3·1·1·3; 4·1·1·4; 5·1·1·5. V. pag. 54. 56. Trattato p. 153

97. Luogo preciso del passaggio della scienza comune alla scienza del cerchio — — — pag. 153

98. La comune scienza delle proposiz.i è una pura scienza di particolari. Manca la universale, in cui sia impossibile scoprire una terza proporz.le V base. pag. 154.

99. Disordine dell'opera pag. 154. m. 623. Taluno maestro, li favà volontariamente scolare di uno 7 bis. 624.

100. Principio del 3°. suono in ½. nel Trattato di Musica p. 154

III Terzo suono = ½ il quadrato circoscritto al cerchio; ma questo mezzo quadrato ha a mezzo il cerchio la stessa ragione che tutto il quadrato a tutto il cerchio. L'aver preso ½ il cerchio ha fatto dire alla Bussone nel Trattato d'intitolato essere il 3°. suono = ½; quando in fatti è = 1. cioè a tutto il mezzo quadrato circoscritto

101. Si ritrova alla autentica base differ.

10 · 100 · 100 · 10
1 · 10 · 10 · 1 pag. 157

10c. Dal quadrante ciascun mezzo aritm.co è trasportato al mezzo armonico. p. 157

103. La serie de' quadrati dedotti è determinata dalla seguente altera p. 158

104. Conversione del centro mezzo contrar.o 50. si cambia nell'aritm.ca nasce 25 p. 159

105. Gruppo — — — — p. 160

106. D'onde nasca il 6 gio. 75. p. 161

107. Frazioni — — — — — p. 167

108. Diam.o = 5 ½. come foss.e? p. 167

109. Conversione di 5 ½ inizio ivi

110. Diam.o 9. non dipende nè da 7. nè da 10. — — ivi p. 16

111. Il 9 gio 10. ha varie relazioni che non si può capire quale sia che Co determini in priorità di natura fondam.to principale di tutta scienza — — — — ivi pag. 167

112. Non si può paragonare il cerchio senza ad una delle figure inscritte — — — p. 167

113. Il quadrato vagion duplo radicale ha punti sui al quadrato ed al cerchio. Il cerchio circoscritto a quadrato inscritto. p. 167

114. Fuori del cerchio, ch'è il tutto, nell'aritm.ca scienza non può esservi altra figura circoscritta. Universo di figura Circolare sfera nata dal cerchio. Nulla può esservi fuori dell'universo. p. 168

115. Termini di comparaz.e, non diam. 5 ½ . 11.; ma di quadrato inscritto 7. 11. Non vi son frazioni p. 168

116. Il diam.o ma 5 ½ . non formando figura, non può esservi nè circo p. 168

117. Vera figura della scienza del cerchio è il quadrante ◺ poichè 673cd . 673d :: 73cd - 673 :: 11. 7 p. 168

118. Ragioni sono anteriori ai termini che le esprimono — p. 168

119. Non si dà mai nell'universo un termine senza il suo correlativo; forza, e resistenza; grave e leggiero; solido e fluido; attrazione e repulsione 7 — p. 168

120. Ragioni, cause, idee, forme platoniche p. 168

121. Quello dico · 7 · 10 ; 10 · 7 · non si cambia nel · 10, ma di quello prende una parte che va al tutto :: ma si cambia aspetto di forma p. 169

122. Centro di vagione in due termini; inseparabili come centro. Il centro racchiude in se stesso tutti i mezzi p. 169

123. Nei centri, passando da un mezzo ad un altro non si cambia nata del centro p. 169 si cambia solo l'aspetto del mezzo e si troverà dominante più un mezzo che l'altro

124. Se passando da diam.o 7. a diam.o 10. si trovi centro · 6 · 7 · 8 | 42 · 46 · 49 · 50 · 56 7 = 49. mezzo aritm.co; ma 50 = 5 x 10, contrario 169

4c·4&·4g·5o·5&

Indice

1c3. 5·7·10 / c5ᵗ·5o·4g·7o· / centro 4g&o

g°·4g·5o· han doppio aspetto p·17o

1c6·c3ª. Il termine g1 = 7x13 ; 7 = 3+4 centro

triplo ; 13 = 6+7. Altri da forma duplo

radicale 5·6·7 · da cui·3o·a5·36·37·4c·

e altri da 6·7·6 sesquiterza, da cui

4c·46·4g·5o·56. 171

1c7· 11·12·13 / 12c·14c3·144·145·156·

circonfa. di Ceulen = 157e9

13x137 = 10881 ; 144x145 = 10440. 171

1c8· 14500000 : 15707963 :: 1c·13·171

g1·145 :: 7·11 - - - - - p·171

1c9· origine del quadrato inscritto da 9·10·11

del cerchio circoscritto da 11·12·13 p. 171

1c0· Tratta qua scienza di scoprire due altri

incogniti, non assegnabili da altra

scienza, i quali manifestino nelle sue

proporzioni, nate da 9·10·11, 11·12·13·

il primo originale della vazione, in

cui dalla Geom. con i poligoni

si trova il quadrato al cerchio

in figura·, il diametro alla

circonfa. in linea — pag·171

assegnando la cazione·

1c1· Duplo vazione potenziale p·17a

sesquialtera vazione astrale

dell'armonico sistema· ivi

1c5· In g1·145. la portione si è ri-

dotta ai termini primi radicali· ivi

1c3· La duplo è in potenza qdo è

assegnata nelle sue radici 5·7

la sesquialtera è in atto qdo è

assegnata nella sua forma· a·3ia

1c4· Bisogna deve assegnarsi la duplo

in 11·13· radici di 5·7 ; e la sesqui-

altera in 9·11· radici di a·3

poco 11·12·13 ; 9·10·11 - - - ivi

1c5· 91+145 = 236 · Ecco in a·3·4

la forma della duplo 6·8·9·10·12a

1c6· $\frac{a34}{9} = \frac{a34}{10}\left|\frac{13}{18}\right.$

1c7· Se prendi 9·13· sono assenti

di 9·10·11

11·12·13·.

e sono tornabili 9+13 = aa · p·17e

1c8· Se prendi 13·18· aggiunti

a questi due termini a piacere

i quali porta insieme la cir-

confa. dimidiata di Ceulen 1570g

e comparate le dette differe

a·11·13· si trova la minima

vazione differenziale 3535 / 3534 p·17a

1c9· Prendi· 15707963 · 8 e quanto

così 1·57·0·79·63a ·

E' la unità di primo p°. 5·7. radici

duple del p°. quadro · Prendi·0· con

la p°. unità ·10·, onde 5·7·10·

Prendi 7·9· come radici di 12a·no

finalm^te 6·13·a· triplo arm^co

1c9· 4ª. et ult^a di 91·145 · si è di-

mostrato primo il sist^a co·in 9·10·11·

da cui·90·99·100·101·110 ; di cui·co·

è il mezzo arit^m^co - pag·173

1c0· Tutte le portioni si risolvono

in·co· così 39·41 e9 - ivi

1c1· 65 deve scoprire la inscritta

nato del termine·50· fra

50·65 :: 10·13 - - - p·17e

1a· 51 · e di vera natura della

sesquialtera ——— pag·174·

1a3· Radici duple 5 = a+3 ; 7 = 3+4 ; 17 = 4+13

si congiungono nel centro 49·50·51

30·35·36·37·4a· nate da 5·6·7· 7ª 3410 p. 217

Vedi ——— ——— — pag·175·

a4+a5 = 49

a4+a6 = 50

a5+a6 = 51

144. adunq. unite le portioni e flg:
del nº. co . son ridotte a g. 10. 11. p. 175
145. 49 + 50 = 99 ; 99 + 51 = 100 ; 50 + 51 = 101
Ecco 99. 100. 101. [redacted] 99. 99. 100. 101. 110
la di cui forma 99. 10. 11 — pg. 175
146. 49. 51 ; 49 diviso in 7.7 = 600
e 7.7.6 = 650 ; 600. 650 :: 1. 1 1/13
147. 49 + 50 = 99 ; 50 + 51 = 101 radici
di 49. 51 ; [redacted] 99. 101 radici
di 99. 101. serie di radici p. 176
148. 9. 10. 11 radici A moltiplica q p. 177
149. ticolto sempre più in
99. 100. 101 &c — pag 160

Circolo

150. In. 1. 3. 4. 5. 6. sia 3. il
diametro ; si ottocerà la cirlla
in 9. e la circonfa sarà
diretta fra 9. 10. Dupla — Foglio.
151. sia 4. il diamº. il suo triplo
è 12. mezzo aritmº. da sesquialtero
10. 14. 15. 16. 30 ; dividendo
il metà i mezzi di nº pari
e la circonfa sarà fra 12. 13 f. 11
152. sia 5. il diamº. , il suo triplo
è 15 mezzo aritmº. di 11. 15. 16. 17. 20
e la circofa sarà fra 15. 16 f. 11
153. Cerchio armonicamte diviso
1 . 1/2 . 1/3 . 1/4 . 1/5 . 1/6 - Figure regolari f. x
154. Posizioni di Archimede — f. x
155. Donis. di Metio — — f. 9
156. La ragione fra il quadrato
circoscritto ed il cerchio inscritto
è 7 4/11 ; ed è < 5/4 . — — f. ae
157. Terzo piano ——— f. af
Non è un effetto de' due
piani , poichè da 1/2 . 1/3 si ha 1/6 ae
ed il 3º piano è = 6
158. 1 . 1/2 . 1/3 — — — — — f. ae
159. Principio primo, Legge aritm.
universale ——— f. ae
160. 1 . 1. ∞ . reciproco 1 : 1 :: 1 1/1 .
1 . 1/2 . 1/3 &c — — — f. af
161. 1 . 1. non ha 3º. nè [redacted] f. df
162. Dalla dupla si cava
scienza in genere, e però
indeterminata del cerchio.
Dalla sesquialtera si cava
scienza determinata f. df
163. Radici ——— f. dh
164. forma di estremi e mezzi
nelle serie aritmetiche f. ai
165. forme della proposz. F. al
166. Cavallieri di fisica attua-
lità nella sesquialtera f. am
167. mag. scienza si contiene
in 7. 11. d' Archim. che in
qualunque altra posizione f. af
168. deve ritrovarsi la circonfa
fra 15. 16. — — — — f. bd. be
169. deve risolversi in 35. 36 f. be
170. Centro duplo posizionale,
sesquialtero attuale, ed
triangoli diagonici ritro-
vano inseparabilmte con-
giunti in un centro comune
di una regolare indefinita
serie di proposz. con i mezzi
determinabi, la quale ha
unicamte applicabile alla
dottrina [redacted] misura del cerchio f. bc-bf
171. Centro formale di
ragione, centro materiale
di quantità — — — f. bf
172. Quel centro comune
è ne' tre dove termini 49.
50. 51. relativi al centro
35. 36 degli estremi
30. 40 :: 5. 7 — — — — f. bf
173. 35 = 5 x 7 ; 5. 7. dipendono
da 2. 3 ; 3. 4. adunque
35 dipende puramte dalla
ragione coi detti i mezzi aritm. f. bf
174. 36. dipende unicamte
dalla proposz. Terza
5. 6. 7. proposz. 30. 35. 36 &c.
Non può aversi 36 senza
il mezzo aritmº. o della forma f. bf
175. Indi si distinguono le radici dupla
di ragione. 5. 7 ; alla dupla di
proposz. 12. 17. dedotta da dupla f. bg
6. 8. 9. 12 — —

176. 35. 49:50 . 70 ; il qre 51 è relativo di radice duplo agli estremi 36. 72. poichè
36 . 51 . 72
12 . 17 . 24 — — — — — f. 6g.

177. 50×30 . 35×36 :: 900 . 1260
:: 5 . 7 — — — — f. 6g.

178. 35. 36. come unità di ragione, e non di seconde è l'unico, e vero capo di scienza a rilevare la circolare naturale in genere, ed in specie la ragione fra il quadrato ed il cerchio, o sia fra il diam°. e la circonf.a f. 6k.

179. 10 . 12 . 15 . 18 ascendente a
20 . 24 . 30 . 36 . 50 — — — — f. 6k

180. 9 . 11 p.te radici seguibili di ragione — — — — f 6k

181. dalla forma 9 . 10 . 11 . si ha
90 . 99 . 100 . 101 . 110 . f. 6k
49+50=99 . 49+51=100 ; 50+51=101

---

183. Due mezzi, o ove mezzi di proporz.e . . . . . pag. 183 184 183

184. Triangoli Pitagorici nati dai ove seconde del centro di una proporz.e precedente pag. 183

185. riflesso di questi triangoli riferiti al cerchio — — pag. 184.

186. esempio 1 . 3 . 4 . 5 . 6 ; 3 . 4 . 5 triangolo Pitagorico . si fanno 3+4=7 ; 4+5=9 ; 7 . 9 trova la sua forma . $\overline{DC}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{AD}^2$ = 36 onde $\overline{AD}^2 = 16$; $\overline{BD}^2 + \overline{DC}^2 = \overline{BC}^2$
49 + 36 = 85 p. 184

187. Triangoli Pitagorici pag. 77. 78. pag. 84 pag. 183. 184. 185

188. si vega la ricapitolaz.e pag. 186

189. Gruppo pag. 186

190. difficoltà della scienza pag. 187

191. Qui si fermerà a due sere di lezione chi legge, finchè [illegible] — pag. 187

192. Inerzi avv.ci crescendo, ed i convav.ci scemando, sempre più si accostano al mezzo aritm.co pag. 184

193. In un quadrante solo — pag. 191

194. Si cangia il lato del quadrato mezzo aritmetico in mezzo armonico quando diviene raggio di cerchio pag. 200
= Credat judeus Appella, non ego.
= che una stessa cosa, il solo
= cangiar di rispetto cambi di
= quantità, e al modo di
= parlare dell'Autore, cambi
= natura.

194. dipende la precisa dimostraz.e dell'Autore dall'applicazione de' triangoli Pitagorici al cerchio. ma che necessità v'è di applicarveli.?

195. Risponde perchè dipendono dai centri delle proporz.i g . d . cioè mezzi determinabili da cui come da principio dipende il cerchio . pag. 201.

196. le forme delle cose altro non sono che le ragioni armoniche reali, la serie delle quali deve contenersi dentro di un tutto armonico che sia il loro principio, e la di cui forma sia il cerchio — pag. 202 203

197. Non si ha scienza manifesta de' seni senonchè in grazia del diametro, supposto di parti uguali, cioè di aritmetica natura, e diviso dal seno in due determini razionali — pag. 203

198. Ritmetica natura manifesta nel diam.o, armonica natura occulta nella circonf.a — — — pag. 204

199. ora l'Autore chiama il diametro aritm.co, ora contravm.co, ora medio; ora armon.co in fig.a di geometrico proporz.

100. Non deve dirsi come 7 : 11, ma :: $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11}$ :: 11 : 7, sicché quel 99. avvi $\frac{1}{99}$ appartiene alla ragione non al raggio. — — — — pag. 105

Si vi penti seriamente

101. Nel principio armco è forza di considerare ove ~~cadono~~ facoltà reali, di cadegonia, di numero, e di figura p. 106

102. Tagliasi il diamo in $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}$ e le radici delle ragioni formate nel diametro, si trovano nelle corde relative del cerchio. Adunq; essendo le radici prima del prodotto, sarà il cerchio pò del diamo — pag. 107.

103. Come il 3o. suono, in cui formolo è comune al cerchio né quadrabi de' seni, corde, e tossese; il 3o. suono, dico, è la cagione formale de' due dabi suoni, i quali albro non operano, che somministrare la loro formal cagione da cui procedono, ed in cui si risolvono — pag. 108.

104. Non si darà mai che $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, ovvero $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ siano radici della pò. entità dell'armonica serie, di cui sono frazioni. pag. 108.

105. Tale è dimostrativamte il cerchio rispetto ai seni, corde, tossese, e rispetto al diametro retto, quale è fisicamte il 3o. suono rispetto ai due dati suoni, cioè il termine del principio de' detti suoni; ed il cerchio il termine del principio de' seni, corde e tossese, e del diamo retto p. 106.

106. Idee Platoniche hanno il principio la entità metafisica reale di ragione; essendo impoth che si dia retta ragionevole senonché a norma della idea universale di tale entità, la quale necessariamte in se rinchiude le idee particolari della serie p. 107

107. L'armonico marco è forma impressa da un principio agente di ragione affatto estrinseco, ed indipendente di natura, e di categoria dal soggetto, in cui è impressa.

108. Il pò fulvo impresso impresso di forma di ragione, determina fisicamte certi gli albori fulvi del vestibulo della corda, e li determina a disporre uguali p. 109

109. Evvi divario fra il pò fulvo e gli albori. pò armco; gli albori aritmetici. il pò astratto; gli albori concavi. il pò di ragione formale; gli albori di fisica materialità; il pò attivo gli altri p. 109

110. Linea retta non è un genere assoluto di quantità, capace di ogni specificazione — — p. 109

111. Tra i fenomeni fisico-armci il più significante, e decisivo è quello del 3o. suono — p. 109.

112. Dopo questo il fenomeno della terza corda sonora; i $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$ p. 109. = vedi pag. 109. m. pag. 430

113. La corda tesa è una fisica retta linea. Dove suoni sono in armca proporz. riuscirà forse l'arbitrio umano in tutta armonica legge impressa? La corda tesa cambia forse natura e la elasticità? E poiché non sonora verifica il fatto pag. 110

114. Grave ascendente, e discendente p. 110

115. Qui si cerca la quantità formale — — — p. 111.

116. Il cerchio deve esser denominato da un termine di armonica quantità, anzi da quel solo, che determina l'armonica natura di quantità; altrimti non sarebbe il vero pò. tipo del cerchio — — — p. 112

117. La sola terza quinta deve costituire l'armca proporz. cioè $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{3}$ pò. di tutte le possibili armoniche proporz. fra

Indice.

n.14. Il vero p.o termine del cerchio deve essere sesquialbo di principio — — — p. n.11.

n.15. Dunque sesquialbero in radice. Dunque il proposto di q×11, radici sesquialbere, mezzo arm.co della ragione formato dalle radici.ioi

n.16. qq. è il vero nome, che spiega la essenza della cosa

n.17. In q.11. v'è il principio p.o delle radici di quella sesquialbero che nel cono cilindro, e sfera si spiega in q.6.4. tanto di solidità, quanto di superf.e — — p. n.13

n.18. In 1/2 · 1/3 · 1/4. sta la diversità che corre fra le figure cono, cilindro sfera, cosa non avvertita — — — p. n.13.

n.19. Il triangolo al quadrato circoscritto allo stesso cerchio sta come n.12. n.9. ragion minore di sesquis.a, magg.re di sesquiq.ta. Quadrato a circolo :: 14.11 — minore di sesquis.a, magg.re di sesquiq.ta. Cono, cilindro, sfera :: q.6.4. Il solidità è di superf.e — p. n.15

n.20. Nel passare da triangolo, quadrato, ~~e cerchio~~, a cono, cilindro, ~~e sfera~~ passano da quantità irrazionale a quantità razionale. Il cerchio conserva la forma della sfera = — — — prog. n.15

n.15. delle tre figure, cono, cilindro, e sfera la forma è nel solo cerchio. La partecipazione di questa forma ha il suo proprio p.o nell'arm.a divisione del cerchio, dalla quale originalm.te derivano le due p.te rettilinee figure triang.o equilatero, e quadrato in 1/2 · 1/4 della circonf.a p. n.15.

n.16. ma questa forma 1/2 · 1/3 · 1/4 è potenza di duplo in arm.a proporz.e a triang.o equilatero, e quadrato, nelle due figure cono, e cilindro si spiega in sesquialtera p. n.15

n.17. La divis.e d.a circonf.e in comincia, e finisce nella duplo in armonica proporz.e e sarà 1/3 · 1/4 · 1/5 · 1/6, ai denominatori corrispondono i n.i 2.i dati della 4. figure 3.4.5.6. p. n.16.

n.16. diam.o proprio di figura, come la unità proprio di n.o p. n.16.

n.17. Unità di natura, e di categoria nell'arm.a proporz.e e serie prog. n.16

n.20. Tutto è compreso dalla ragion duplo. diam.o e lato dell'esagono, o sia raggio :: 1.1. Se si riguardano le figg.re triang.o ad esagono :: 1.1. si avrà, che il n.o de' lati. In 1/2 · 1/3 · 1/4 · 1/5 · 1/6; il centro 1/4 · quadrato di 1/2 · costituisce quella unità che è proprio p. n.16.

131. Inconvo de' punti comuni di cerchio fra il cerchio, ed il quadrato - - - - p. 117
Tanto è nel cerchio la corda ab = alla sottesa bc, quanto nel quadrato il lato ab = alla corda bc - - - - - ivi
Nei punti comuni si costituisce unità di centro fra le due figure di data diversa originale, cerchio, e quadrato . - - - - ivi
132. Il diametro al lato dell'esagono :: 1 . 2 ; Il lato del quadrato. ab. è medio proporzionale ÷ ca : ab . ad .
In cerchio delle cinque rette linee vi sono nel cerchio le cinque frazioni $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ i di cui esponenti sono in serie e fra i quali non v'è, nè può esservi mezzo geometrico vi è bensì il mezzo di proporz. g. d. , perchè $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}$ quindi l'impossibilità della inseparabilità delle proporz.i g. d. dal cerchio, e la diversità che corre fra queste, e le continue, come proprie del diametro pag. 117
133. Di più ancor ciò dà senso, ivi sono mezzo g. fra continuo fra i pesi del diam.o, qual mezzo diverso poi rispetto alla doppia proporz.e applicata al cerchio vi
134. Passano i ricercatori la trovata p. 120
135. Ritornando al cono, cilindro, e sfera . dalle ragioni sesquialtera 2 . 3, e sesquiterza . 3 . 4 . risulta la raddoppia di 6 . Quadrati ignoti de due ragioni 4 . 9 ; 9 . 16 ; fra 4 . 9 sarà mezzo prop.le fra 9 . 16 . lo sarà 12 . - - - - - - - - - pag. 120
136. I quadrati 4 . 9 : eccedono la raddoppia 4 . 8 . della ragione 8 . 9 - cioè sesquiottava - ivi I quadrati 9 . 16 eccedono dello doppio 9 . 18 della sesquiottava perchè il doppio di 9 . è 18, non 16. e 16 . 18 :: 8 . 9 . - - - - - pag. 120
137. E' adunque noto l'eccesso, e il difetto de' ragioni de' quadrati e gli accordandosi negli esponenti raddoppiati 4 . 16 ; come esponenti di duplo continuo 4 . 8 . 16 ; non si accordano poi nel mezzo che dovrebbe essere 8. pag.
138. La scienza insegna che si non da 9 . la sesquiottava, e si ripovvi nel mezzo G. V. ivi . - pag. 120
139. ciò che è di sostanza nell'armonico musicale sistema, è similmente di sostanza nell'armonia del sistema universale verità fondato nel cerchio, il di cui progresso e regresso è confinato nella settupla che costituisce il confine del musicale sistema . - - - - - p. 120
140. Le proporz.i continue formando le ~~sostanze~~ dissonanze musicali, è forza ridurle a la loro risoluz.e in consonanza a proporzioni g. d. - - - - p. 120
141. Così succede nella scienza dell'armonia universale dicui trovasi chiara indicaz.e nel Timeo, ed in altri luoghi di Platone . . . . . pag. 120
142. Dalla unità fino al 4 vi sono due mezzi g. differenti onde non si dee dire 1 . 2 . 4 ; ma 1 . 2 . 3 . 4 . poichè il numero non ripete mai i gradi immediati la stessa ragione in
143. Non si dà ragione che non sia in due n.i Non si dan quadrati che non siano in duplicata de' n.i retti . Non si dà n.o quadrato senza il mezzo armonico assenione di grado, in cui si risolve quella duplicata ragione continua, la cui è contro la natura delle ragioni, e la conseguenza del n.o - - pag. 120
144. Così non si dà la continua 1 . 2 . 4 ; senza che il quadrato si risolva in 3. mezzo ovvero da forma 1 . 2 . 3 . 4 la formola $\frac{2 \times 3 \cdot 3 \times 4}{6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12}$ pag. 120
4 . 6 . 9 ; 4 . 6 . 8 ; 2 . 3 . 4 /

circosc. cono. cil. sfera

n45. 4·6·9
9·12·16

inscritto cono. cil. sfera — — pag. non

n46. bovanpo n45. n56. da 4·6·8·9·12
è lo stesso nei
togliendo da 16, lo stesso quivero 12·16
verso ultimo 12; e ripor 3·4
bandola nel mezzo in 6 fra 6·9 6·8
viene 9·6·8·9·12 — — pag. non

n47. così le disordinate proposizioni vidimono ad ordine, la legge a legame le fuori di serie a serie del p°. ripovabo nel mezzo è un mezzo armo. perché è 1-d'unquadrato pag.

n48. l'armca. nabuva impone la forma e la legge all'armca. nao specificata nè n° quadrati — — pag. non

n49. due ogg: no 4·6·9·12·16 p°. in 4·6·9; in 4·3 1/3·6·8 f 6·8·9·12. rda 4·6·9·12·16. in 4·6·8·9 f 4·16 fuori di ordine vi vidimono bala a 4·12. nell'ordine — pag. non

n50. Sfera, Cilindro Cono circoscritti 4·6·9 — — — p. non

n51. 1/2 · 1/3 · 1/4 · diam°, cabo del Δ equilatero, cabo del quadrato; 1/2 · 1/3 · 1/4 è dupla in armca. pro= prova. — — — p. non

Veggasi attentam.te tutto pag. non. non.

n52. I denominatori di 1/2 · 1/3 · 1/4 sono 2·3·4; qsti formano la dupla armca. 2×3. 2×4. 3×4. 3×4; i quadrati la dupla armca. — — — p. non

n53. Triplo da dupla in 1/2 · 1/3 · 1/4; e 2·3·4. — — — — pag. non

n54. Nelle corde e sobese si trovano le radici irrazionali della ragione razionale, in cui si è diviso il diametro Vedi ivi mihi 853. 854.

n55. le ragioni sono anteriori ai n°. p. non

n56. come il 3°. nono si corde un prodotto proporzione de' due dati noni, così esso 3°. nono è il tutto armonico necessariamente anteriore ai due dati noni che sono di esso parti, e frazioni così l'armonica p°. proporz.e è deducibile dal 3°. nono ne' suoi noni 2·3·6. 1·1/2·1/3; così rispetto alla sesquialtera deve succedere nel cerchio — — — p. 14.

n57. Nel cerchio è in radice; nel 3°. nono in prodotto — — — ivi

n58. Quindi la formola del 3°. nono deve esser la stessa de' quadrati de' seni, corde, e sobese come si è dimostrato a pag. no. — — pag. non

n59. Ragioni enbibà vedali, indipendenti da umana ditcognazione anzi principj p°. positivi dell'umano vaticinio.

n60. Pentagono, ed esagono han origine dall'armonico sienza non

n61. Bisogna risolvere le operazi. da Geometria già cominciate in un principio di scienza necessariamente anteriore, che incomincia le sue operazi. ove finisce la Geometria. Vero la Geom.a sa la quantità materiale, l'armonica sa la formale dello stesso dato soggetto, della stessa data proporzi. — — — — pag. non.

la Geom.a dimostra il fatto, l'armonica la ragione del fatto — — — — p. non

ragione da 1/2 · 1/3 · 1/4 · 1/5 · 1/6
il diam° cabo Δ · cabo quad. · cabo pent. cabo esag.

la serie nda. nasce dall'armca serie da. divisione del cerchio in 1/2 · 1/3 · 1/4 · 1/5 · 1/6 · questa è il cabo il vero, ed unico principio delle rettilinee regolari figure inscritte — — — p. non

n64. cerchio è prima del diam°. come vero di armonica unità — — — — — pag. non

n65. Retta linea principio di quantità, ma non mai principio p°. di ragione di quantità — — p. non.

n66. ove non v'è ragione, non può esservi scienza — ivi

n67. Nella linea circolare proporzionabile vi è ragione di quantità adunq. vi è il principio p°. della ragione di quantità p. non

n68. è reale la esistenza di due reali enbibà, l'una delle quali essendo di ragione di nabuva formale, e però attiva e d'altra di nabuva materiale di cosa, e però passiva della p°. è segno formale il cerchio, della nda è segno materiale la retta linea indefinita pag. non

n69. Triplo p°. delle rettilinee fig.e inscritte è nelle 3 linee angi in 1/2 · 1/3 · 1/4 · 1/5 · 1/6 pag. non

170. nascendo nelle cinque linee
formale del Δ in $\frac{1}{2}$ del cerchio
ed il denominatore 2. è la
forma della figa. di 3 lati
171. li cerchi la indole e natura
delle 3. rette linee nella loro
semplicità p.a avanzi che possino
allo, cottiener. delle 4. regolari
figure; non potendo costi-
tuire figa., se p.a non esistono
se le rette, indipendentem.te
da figura — — — p. 126.
dipendevano tensi dalle
fiar.i del cerchio — pag. 126.
172. Dio si divide armonicam.te i diam.o
in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$. le corrispon-
denti corde del cerchio sono
$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}$ e rimane il cerchio
nella sua originale natura
di proprio p.o delle irrazionali
radici delle razionali ragion
delle di 1 è divisa il diam.o pari
la radice è proprio primo del quad.to
174. Ma dividendo armonicam.te il
cerchio in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ e rispettano
le irrazionali radici nelle 3.
rette linee, ma cambiano cate-
goria, e specie poiché ove gli
estremi $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ si trovano in
triplo. gli estremi delle 3 linee
(diam.o e lato dell'esagono) si
trovano in duplo. Nel cerchio
si conserva l'armonica ratio,
nelle 4 linee (escluso il lato
del pentagono) si trova l'arm.a
natura — — — p. 124.
175. del cerchio si ha scienza, ed in
quanto del cerchio si ha scienza
della vera linea — pag. 124.
176. s' interpongo il lato del
pentagono. 4 3. 2. 1. non ha
più luogo — — — p. 124.
177. i quadrati del diam.o e del
lato del triang.o, quad.o, esagono
sono 4. 3. 2. 1. — — — p. 124.
178. la differ.a de' quadrati de
lati del pentagono, e dell'
esagono è. 2. 1. rag. inc.a p. 130.
179. questa figura assegna il proprio
delle 4. regolari figure — p. 130
176. della vera origine del lato del
pentagono — — — p. 130.

177. i dati sono 2. 3. 4. 5. 6. | $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$
30. 20. 15. 12. 10., arit.co
arit.co armonico is; ma non
il contrario. in 124 — pag. 126
178. Lato il proprio p.o del lato
del pentagono è scorta la vera
scienza delle ragioni, e proporzi
= li esamini. — — — rag. 123
2. 3. 4. 5. 6. proporz.e completa
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ armonica propor
30. 20. 15. 12. 10. arit.co in
179. Diversità di $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ deduce
le linee delle figure regolari.
diam.o e lato dell'esagono
sono in ragion duplo; deter-
minano il confine delle dimo-
strabili rettilinea figure inscritte
e circoscritte al cerchio — 124. 123
180. 2. 2. 3. 4. 5. 6 | 6. 8. 9. 10. 12.;
merce contrario 5. 10; 10 = 126.
proprietà di sole due sole prop.
da conversione di 2. 3. 4. 5. 6 in
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$
dà precisam.te la tripla $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$
gli estremi delle 5. rette sono
in ~~tripla~~ duplo diam.o e lato dell'esag.o
6. 5. 9. 10. 12. pag. 124
181. Lato dell'esagono dipende
da $\frac{1}{5}$. che si converte in 5. 10
nelle due proporz.; l'estremo
$\frac{1}{6}$ si trova negli estremi 6. 12
5. 6 :: 10. 12. 1. — — — 123
182. Ragione duplo nell'arm.o
sistema non abbia mai la
natura delle ragioni e prop. 123
fatto nobo alla musica proposizione
183. In altre 6. 8. 10. 12 | 2. 3. 4. 5. 6
identità di termini, e di ragioni p. 123
Vedi ivi. 696.
184. Armonia del modo magg.e e del minore
esclusione necessaria del mezzo 124
arit.co 9 della duplo, delle vere
2. 3. 4. 4½. 5. 6. dissonanza di 4.
185. Se v'è scienza del cerchio; se v'è
delle rettilinee regolari figure,
v'è scienza musicale; ne dipende
la musica dal solo sentimento p. 124
Keplero ha veduto questo — — p. 124
186. Termine 2. unicam.te proprio
della tripla, non della duplo p. 124
2. 3. 4. 5. 6.
187. diam.o 6. 8. 10. 12
proprietà di figura, non fig. p. 124
Vedi 90 2. 90 3. 904. 905. 906

c486. Niun uso del mezzo conservato nella scienza comune. — p. 236

489. Lato del pentagono dipende dalla formale cognizione del mezzo conservato. 5. di 2. 3. 4. 5. 6.

490. da $\frac{1}{5}$ delle frazi. circolari dipende il lato del pentagono. $\frac{1}{5}$ è mezzo arm.co fra $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$. — — p. 236.

491. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ / linea 4. 3. 2; 3 mezzo aritm.co in qsto / $\frac{1}{3}$ mezzo arm.co inflazzato.

492. ho $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ delle frazi. circolari non corrispondono il lato del quadrato, del pentag.o, dell'esagono lato del quadrato, e dell'esag.o :: $\sqrt{2} \cdot 1$; i quadrati :: 2. 1. mentre le due frazi. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ sono in sesquialtera - p. 236

493. $\frac{1}{5}$ è mezzo arm.co fra $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$ ma il quadrato del lato del pentagono non è determinatamte mezzo di specie alcuna - p. 236.

494. Non manca a qsta scienza la nozione del mezzo formato dal quadrato del lato del pentagono fra i quadrati del lato dell'esagono, e del quadrato. ha in se forma un capo di scienza ecc — p. 237

495. data la tripla 1. 3. 4. 6. si ha
$1 \times 3 = 6$; $3 \times 4 = 12$; $4 \times 6 = 24$
6. 12. 24 / 1. 2. 4
data la tripla 6. 8. 9. 12;
$6 \times 8 = 48$; $8 \times 9 = 72$, $9 \times 12 = 108$
48. 72. 108 / 4. 6. 9. 108 ecc 237

496. di cinque termini delle cinque ordinate deve aggiungersene un altro in sesquialtera col 3.o cioè delle medie onde il quarto termine del lato del pentagono sia chiuso dalla sesquialtera $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$. Così corrisponde la formale ricerca del lato del pentagono al suo vero principio primo — — — — — pag. 238.

497. di $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ corrispondono la 1.a linea diam.o e la 3.a lato del quadrato poi che i quadrati di queste linee sono :: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$. — — — — pag. 238.

499. Può dirsi una retta linea lato del triangolo equilatero, mezzana fra la 1.a e la 3.a si ha scienza poi che come $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ così armonicamte divisa da $\frac{1}{3}$. così la duplo de' quadrati 4. 2. è aritmeticamte divisa dal quadrato del lato del triang. equilatero. — p. 238.
vedi ivi 500. 501. 502. 503. 504 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517

500. Genere universale di tutte le specie originali, e primitive delle proposizioni, che in qual caso non possono essere disgiunte dalle specie originali, e primitive delle cognizioni
Dell'aritmetico numero comune p. 245.

501. Questa scienza contenuta nel no. è quella che pubblica quii l'universo, il di cui soggetto formale è il cerchio, non solo come arm.co di sua originale natura, e costituz.e, ma in oltre come principio 1.o necessariamente anteriore nel senso preciso di arm.co formale principio delle rettilinee figure inscritte, e circoscritte; il soggetto materiale sia il diametro, non solo come aritm.co il recapito di sua relazione al cerchio, dalla qle procede, dal che procede che i tre suoi mezzi arm.ci (V. 239.) ma in oltre come necessariamte posteriore nel senso preciso di principio materiale delle rettilinee regolari figure inscritte e circoscritte al cerchio — — — p. 247.

502. l'arm.ca unità è prima dell'aritmetica unità — — p. 247

503. c'indicano il lato del pentagono da $\sqrt{1\frac{1}{2}} \cdot 4\frac{1}{2}$ — — pag. 249

504. dalle radici 5. 7. si ha cognizione della natura del mezzo 1175570. — pag. 249.
dedotta da 5. 7. la 5. 6. 7., e quindi 30. 35. 36. 37. 42.

505. di confronto de' 6 termini $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ non vi sono che 3. linee 2. determinato da $\frac{1}{2}$ pp. 250

306. ove gli estremi de' frat.i $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{6}$ sono in ragione tripla; i quadrati degli estremi delle due date linee sono in quadruplа — — pag. 250.

307. Cerchio è p.a Figura piana pag. 251.

308. $\frac{5}{3}$ corrisponde ad $\frac{1}{3}$; e contrario armonico de' estremi in ragione tripla 2.4.5.6; ed è mezzo aritmetico della sesquialtera è caratterizzato da ove diverse nature, ed è un terzo di 15 = 2+3+4+6 = 3×5 = 15; 15.5.3 p. 251.

Forma tripla 1.2.3. privilegiata

309. Raddoppiato 5 in 10., questo è contrario.co de' estremi in ragione tripla e chiuso da 9.11.; 9. somma di 4+5; 11 somma di 5+6. Della 4.5.6. in cui 5. è il mezzo aritm.co p. 251

310. 9.10.11. fondam.to de' dimostraz.e dell' armonica scienza

311. Impossibile dunq.; scienza del cerchio che non sia fondata su i triangoli Pitagorici, o ne' due mezzi specificati — — — pag. 252.

312. deve esser fondata nel triangolo che compete ai numeri 9.10.11. dai quali si ha 99.100.101

313. Triangolo nei due numeri 399.400.401 — — pag. 252.

314. Perchè non possa contemplarsi la differ.a in un solo n.o p. 252.

315. E qual ragione la differ.a si determina in 400 quadrato della radice 20.a — — — 252

316. Perchè cercando l'altezza delle radici in 399.401. si ripetono finalm.te in 2.20.; da cui si ha il bisangolo Pitagorico. 5.12.13.a p. 256

317. Che non si mostra la irrazionalità del diametro.i p. 257.

318. Non è possibile aggiungere un 3.o numero armonico alle ragioni della serie semplice 1.2; 1.3; 1.4. il 3.o numero è p. 260

319. Non è adunque divisibile la ragione 1.2 — — — p. 260

320. Conviene il calcolo di questa scienza, non delle altezze col genere fisico. l'ordine de' ragioni è essenzialm.te immobile che conviene col genere fisico di cui si vale il dimostrare la varietà dell' ord.e e luogo de' rag.i pag. 261

321. La comun scienza de' ragioni è scienza d'un Mondo immaginario; l'armonica è scienza d'un Mondo reale. — — — — p. 261

322. Gli accrescimenti che non cambiano le ragioni devono valutarsi come le dissomiglianze che corrono fra gl' individui d'una specie; che pur son segni simili della specie — — p. 261

323. La specie sempre inalterabile (vedi Locke) è lo stesso che la forma delle ragioni p. 261

324. Principio di calcolo in q. 10.11 p. 263

325. Quadratura del circolo tanto impossibile, quanto lo è che un mezzo armonico sia mezzo aritm.co dei stessi estremi. — — — p. 263

326. Quindi la differ.a della unità accresciuta da Euler nell' ultima di 36 cifre p. 263

327. La quadratura non può mai essere d'un numero ma è, e dev' essere di ragione che importa due numeri p. 263 devi esprimersi nel diam.o. ivi

328. Nel solo mezzo armonico 6. della ragione 2.4. v'è unita l'energia de' rag.i p. 264 non nel mezzo aritm.co q. che dipende dal solo 3. e non costituisce ragione. ivi

329. Mezzo arm.co della ragione dello stesso; aritm.co della natura del diverso p. 264

330. Data la forma composta 2.8 | 6.16 | 6.11.16 | 66.96.121.176. si moltiplici 3×8 = 24; si raddoppi in 48 sommati i due termini della forma 2+6 = 11 | 3×11 = 33 | 6×11 = 66. Tra 33. 66; farà mezzo arm.co 46, e duplicato tutto 33.4.46.66. 66.96.176 — p. 264

331. L'armonica natura è indicata ed integravile dalla forma (6) è l'azione e reazione di due termini moltiplicati fra loro p. 264

n.r. n.4; 3°. nono. n4 — p. n63.
n.r.r. Che foraj volgono l'ordine, e storbano ogni cosa. Il vero modo vestituire l'ord. p. n65
n.r4. I segni devon essere con l'ordine, e legame delle forme di cui son segni — — — p. n65
n.r5. le forme sono indivisibili (Co prova il 3°. nono) adem: fra un cavo segno, e l'albo non può cader divisione p. n65
n.r6. con le foraj: si confonde una forma con l'albo di luogo, d'ordine, di natura di significaz: — — — p. n65
esempj. ivi
n.r7. da pag. n50 fino n66. vi sono tutte le prove, i canni, e la dottrina necessarie alla intelligenza intrinseca di questa scienza. — — — p. n66.
n.r8. Frazioni — — — p. n66
n.r9. Hanno principio comune quelle ragioni, in cui ai termini di quantità non arriva il quadrato del magg. termine della forma p. n66
v. ivi la ragione
n40. Modo di consumare gli avanzi p. n66.

Del cubo — p. n71

Supplemento

1. 54 + n7 + 16 = 99. circonf.a del quadrante; Raggio = 63. pag. 1
2. 63 = 31 + 32. | 31. 32. 33
31. 32 | 62. 64 | 62. 63. 64
62×63. 62×64. 63×63. 63×64
3906. 3966. 3969. 3970. 4032
esempj — — — pag. 1
3. 63 diviso in 31. 32, conduce a 32. 33; radice di quel principio, in cui si spiega il cerchio nella ragione de' semidiametri da $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{3}$ pag. 2
32. 96; 33. 99.
4. 63. 99 :: 7. 11 — — — — pag. 3
5. 20 + 21 + 22 = 63.
6. somme di serie di 5, di 7, di 9 termini 4 — — — pag. 4.
7. nuova proprietà della proporz.e tripla — — pag. 5
8. posto diam.o 5. la circonf.a deve essere fra 15. 16 — pag. 8
9. Ir. la ragione del diam.o alla circonf.a è nei due canoni, 3. 4. 5; e 15. 16. 17 Come si assume, e fondam.o p.o di questa scienza la ragione 9. 10. 11.° — — pag. 9
10. IIa ragione è pa. del n.o. Già mai no. solitario il termine 5. che pure assoluto deve intendersi o somma 1+4, o di 2+3. se l'intende di 1+4; questa ragione deve intendersi di radice cuba 2. 4. 8; e 2. 8 :: 1. 4. Ond'è la p.a di cuba le ragioni è 1. 2. ma la ragione 1. 4 si risolve negli estremi 1. 2 ed in 2. 3. 4. 5. 6. di cui averitam.te mezzo arm.co 5. Onde la quadrupla è in potenza; la tripla in atto pag. 9
11. 1. V'200. adunque l'attualità rimane alla sesquialtera 2. 3 in cui si è convertita la dupla 2. 4. — — — pag. 9
11. ova il mezzo aritm.co 4 è sebquadruplo di 16 mezzo aritm.co del cubo corrispondente. ed il corrispettivo 5. è sebtriplo del mezzo arm.co 15. la proprietà da sebquadrupla è tutta cubi i canoni fra le corrispondenti. ma la sebtripla è affatto unica e singolare de' due termini 5. 15. del cubo tripla, e del cubo corrispondente pag. 9

13. Ed però in questi due centri si verifica la subquadrupla 1.2.4 ridotta alla subtripla 1.2.3; il che significa che la geometrica proporz. 1.2.4 è convertita nell'arithm. 1.2.3 — sup. 9.

14. dal centro 3.4.5 che diventa forma si ha 12.15.16.17.20 l'azione producente il quadrato 16 è di 4×4 — — — sup. 9

15. l'azione produttrice il mezzo arm. 15 è di 3×5, ragione formale degli estremi del centro 3.4.5. come ogni mezzo arm. è un estratto della ragione, di cui è mezzo arm., e di conseguenza è il centro essenziale della ragione sup. 9

16. Vediamo se la proporzione 9.10.11. mezzana fra i due centri 3.4.5, e 15.16.17 corrisponda alle addotte dottrine

3+4+5 = 12 — a ÷ 2.3.6
9+10+11 = 30 — 2 3 — 12.15.18.24.30.40
15+16+17 = 46 — 6 5 — 27.20

17. La ragione essenzialissima fondata ne' due centri 3.4.5; e 15.16.17. è quella del diam. alla circonf. Le adunque la somma di 9+10+11 mezzana fra i due centri determina in 2.3.6. una forma, in questa sarà determinata quella ragione che è fondata nei due centri, che formano gli estremi di questa proporz. che diventa mezzo sup. 10

18. La proporz. dedotta sarà 10.16.25.34.40

10+16+40 = 66 — 22 — ragione di Archim.
10+25+40 = 75 — 25 — 11.14 :: 22.25
10+34+40 = 84 — 26 — convertito il diam. 7 in quadr. 14
v. ivi 11 19. 11 20 — sup. 10

19. 4.5. costituisce armonicamente armonico il sistema, che ridotto ad $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}$ divide armonicamente la sesquialtera $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}$ indivisa, e non specificata nella forma 2.3 — — — sup. 11.

20. come 2.3. è armonicamente divisa in 4.5.6. così l'armonico sistema musicale del modo minore, come $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$ è armonicamente divisa in $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}$ così l'armonico sistema musicale del modo maggiore — — — — sup. 11

21. l'armonica del minore dipende da 5.6; l'armonica da $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}$ — — — sup. 11

22. Principio fondamentale cerchio indivisibile O. divisione armonica di esso è la inscrizione, e circoscrizione delle regolari figure circonferenziali razionale poiché la serie delle frazioni non è convertibile sup. 11

23. Il cerchio adunque non è che un risultato di mezzi armonici infiniti — — — sup. 11

24. 2do principio triangoli Pitagorici V. 11 27 — — sup. 12

25. 3°. principio è nella origine della terra il mezzo contrarmonico; poiché non adoperato da Archim. — — — sup. 12

26. 2.3.4.6. è comune a questa scienza, ed alla Geometria: non è però mezzo contrarmonico — sup. 12

27. dall'aggiunta del mezzo contrarmonico 5. nasce questa scienza — ivi

28. Non ha luogo presso i Geometri nelle proporzioni qualunque ogget. di comparazione, di rapporto, di proporzione, di mezzi determinabili a specifica natura ed sup. 12

29. In una prop. di 5. termini la Geometria non ha luogo ivi

30. Le non necessarie ove mezzi di necessità di principio, vi sarà con scienza di altro principio, diverso dalla Geometria nella intelligenza ed uso de' predetti mezzi sup. 12 questa di magnitudini, facoltà poiché i due mezzi sono comuni a questa ha di più il detto mezzo — — ivi indi altre leggi, altri usi, altri principj

Indice

31. Ida ragione. In questa ricerca non è possibile assegnare un numero assoluto, che non abbia relazione ad un altro nº, con uniforme ragione - - - - - - - - sup. 12

32. È impossibile un nº. che non sia relativo o a ragione, o a radice o a centro, o a proporz. sup. 12

33. Anzi ogni nº. è relativo in se stesso, poiché è somma di due termini - - - - - sup. 13

34. Della triplo q.d. 2.3.4.5.6; 5. è in se stesso relativo ed a 1+4; ed ad 2+3. - sup. 13

35. Fuori di se stesso, come somma di 2.3. ha la principale di sue relazioni, è di radice di triplo, col termine 7. come somma di 3.4. Nell' intiero centro triplo 3.4.5 come vi è la proprietà singolare del merro avm^co. 3 alla somma di 4+5=9, corrispondente la triplo; così vi è la proprietà singolare del merro convarmonico 5. alla somma 3+4 sup. 13.

36. Trasportando adunque il diam^o. 3/2 in 5. diam^o. cioè 7.10, si cambia bensì il segno p^o. nel segno rdo della stessa ragione, ma non si cambia né forma, né ragione, né proporz.; si opera essenzialm^te su lo stesso principio, e su lo stesso dato, ch'è la prima ragion tripla radicale di ragione.

37. Terza singolarità del centro 3.4.5 poiché 2.3.5. sono radice di ragione degli estremi 2.6 — sup. 13

38. La vera idea della scienza del cerchio diventa dimostrabile nella triplo q.d. 2.3.4.5.6 sup 13

39. Poiché 2+3=5; 3+4=7; 4+5=9; 5+6=11; 5.7. sono le radici della tripla fatta dal merro con. avm^co. 5. con la somma de' due merri 3+4 - - - - - sup. 13

40. 5. somma di 2+3; non di 1+4 poiché le due ragioni costituenti le radici della triplo, sono la sesquialtera 2.3; e la sesquiterza 3.4; 2×3=6; 3×4=12. 1.11

41. I due ultimi termini 9.11. sono le radici de. sesquialtera 4×5. 5×6 :: 20.30; o come 4.6. In ogni caso 5 è la somma di 1+4. Poiché 5 convarm^co. è somma di due quadrati 1+4. come il suo duplo co. convarm^co. (in uni: non banchia nostra) della duplo è la somma de' due quadrati 1+9.

42. Adunque in 9.10.11, si conserva la nabura convarmonica originale - - - - - - sup. 13

43. Due termini merrani 7.9. sono le radici degli estremi del centro triplo 3.5; 3×4. 4×5 :: 3.5. fra le due radici 5.7 de. duplo ch'è la ragione potenziale, e le radici 9.11. della sesquialtera, ch'è la ragione attuale - - sup. 13.

44. Vediamo l'influsso del merro avm^co 3. come multiplo della somma de' merri 4+5=9 - - - - sup. 14

45. Tripla p^a proporz^e. Nel centro corrisponde la estensa de. copa. Nel centro si trova la tripla. Cioè la tripla capo de. scienza del cerchio. sup 14

46. Principio triplo anteriore alla tripla proposta. — — — pag. 14

47. Le 3. medie arm.co triplo fra 2.6 è proprio di radice tripla rispetto ai due medii 4.5 : rispetto al centro non altro che mostra: ve che l'armonica unisce in triplo potenza di forma e non l'aritmetica forma ideale 1.2.3. — — — pag. 14

48. È chiaro segno il 9. dell'inflesso di ove in 5.7.9.11 poiché 9 cubo è somma di 4+5 quando è il quadrato di 3

49. Risulta facoltà affatto distinta nei due medii 4.5 in sesquia.a, trovata fra le differenze di Cauchy. cubo. co. pag. — pag. 14

50. 3 medio arm.co fra gli estremi tripli è radice quadrata di 9 = 4+5 ; fondam.to essenziale del triangolo pitagorico 3.4.5; poiché dipende da 9 diviso in 4.5. — — — — — — pag. 14.

51. 4.5 è radice di ragione di 20, ch'è la somma de' 5. termini della tripla 9.d. 2+3+4+5+6 proprietà sola e singolare di questo centro 3.4.5. — — pag. 14.

52. La ragione 4.5. ha ne' suoi termini due rispetti, uno passivo di somma in 9., l'altro attivo di molteplica in 20. v. ivi. 1140.

53. In quadrato di 2×6, ovvero di 3×4 è medio la somma dei tre termini 3.4.5. pag. 15

54. La facoltà della molteplica 4×5 rispetto alla somma de' 5. ogni è eguale alla facoltà d.a molteplica de' due medii rispetto alla somma dei due termini del centro. pag. 15.

55. La somma 7. di 3.4 ha relaz.e ad 11. somma de' ogni da tripla armonica 6+3+2; è forza che la somma 9. de' due arm.ci 4.5 del centro abbia relaz.e allo stesso termine 11. nello stesso rispetto di somma de' termini della tripla arm.ca. — — — — — pag. 15.

56. ~~2+3+4~~ 3+4+5 . 2+6 :: 12.6

57. 9.11. radici originali della sesquialtera ; 3+5 . 2+4+6 :: 8.12 Nascosa circolare — pag. 15

58. ~~2+3+4~~ 6+3+2 . 4+5 :: 11.9
4+5 . 5+6 :: 9.11
ed è la somma de' termini della forma originale sesquialtera. 4.5.6.

59. È singolare di questa scienza il centro formato dai due medii arithm.co e armonico è in certo albo rispetto de' di uguaglianza di ragioni, e di quantità di quadrato ; ma specifica la forma della proporzioni di cinque termini, divisi 4 proprietà universale della sesquialtera 2.3. pag. 15

60. È questo pure è centro di sistema di proporz.e pag. 15

61. Questa è la legittima conclusione su la ragione 4.5 e v. ivi

62. Si trova facoltà maggiore nella sesquiquarta, propria di questa scienza, che nella sesquia.a ch'è comune

63. Poiché alla ragione del cerchio inscritto al quadrato circoscritto è molto più prossima la sesquia.a nel meno, che nel più la sesquia.a. Questa eccede di $\frac{1}{12}$; quella manca di $\frac{1}{14}$ pag. 16
v. 1146. 1149. 1150.

64. Dalla forma n.3.4 si ha
6.8.9.10.12 ; i quadrati pari risolvono
in 3.4 5.6 - questa è proporz.
ma non di eguaglianza di ragioni
e di prodotto, ma di eguaglianza
di differenza 3;4;6 / 3;5;6 sup. 17.

65. In tal sorte di proporz.
non può aver luogo il mezzo
aritm.co g. - - - - - sup. 17

66. Dunque priorità di origine
e di natura de' mezzi arm.co,
~~[illegible]~~ contrarm.co, rispetto
al mezzo aritm.co. — sup. 17.
V. 1154. 1155.

67. 4.5. uno mezzo armonico,
e l'altro contrarm.co de' due
estremi 3.6. - - - sup. 18

68. La somma de' due mezzi, e
de' due estremi è sempre un.o
quadrato 3.4.5.6 — sup. 18.
e la somma delle differenze
è sempre la radice 1+2=3. ivi
oppure 1+(1+1)=3=√9
10.12.13.15 / 15+10=25
2+1+2=5=√25 sup. 18

69. 7 n.o divino sotto Pitagora
V. 1158. 1159. 1160. 1161. 1162
1163. 1164. 1165. 1166. 1167. 1168
1169. 1170. 1171. 1172. 1173. 1174

70. Non 483.484 ; ma 484.485 sup. 22
i mezzi son 3, cioè 460.464.485
degli estremi 462.506. proporz.
nata da 21.22.23. sup. 22.
V. p. 1176

71. Degli avanzi della ragione
4.5. - - - - sup. 22.

72. 483.483. si risolvono
in 60.61. si facciano doppi
120.121.122. / 121 = 60+61
Triangolo Pitagorico 11.60.61.
72.60. stesso arm.co
73. Lemi da 1/2 . 1/3 :: √9.√8 &
da 1/2 . 1/4 :: √4.√3 V. 1180

73. Avanzi - - - sup. 22
74. Relazione dipendente
della sesquialtera alla
sesquiplo. Ed una proprietà
affatto singolare della
sesquiplo - - - sup. 27
28
29
30

Secondo supplemento
Dimostrazioni che non han
risposta.

75. Nella serie delle radici
duple si vede che sempre più
si approssimano alla vera quantità:
sorsero o scovrasi la ragione
9.10 con queste radici, o sco-
vrabala dalle med.e, si va
approssimandosi si scova alla
~~una~~ ragione di quadrato circo-
scritto a cerchio inscritto.
si torna alla ragione di cerchio
circoscritto a quadrato inscritto
sup. 30
76. Dipende ciò dalla ragione
9.10 - - - - - sup. 30

77. 17/41 . 41. è ogni radice dupla
con 29. è il mezzo contrarmo
di 7.12.60.81.82.90, nata da
8.9.10 estremi dupla
il ogni 13. è il mezzo sesqui-
altero 26. come pari divisa
in 13 - - - sup. 31

78. Triplicato 13 in 39 ; 31.41
radici di 29.21 che son radici
di 9.11 che son radici sesqui-
altere, la di cui forma
9.10.11 &c - - - - sup. 30
V. ivi 1218. 1219

79. Triangoli numerici. V. ivi sup. 31

80. I geom.i ha cercato & & via di poligo
ma non & questo si ha ricerca, non
essendosi cercata la ragione onde
si credevano i poligoni alle ragioni

81. Questa scienza pone le ragioni entità reali a priori, ed il suo oggetto è il loro legame reale a priori; ciò la crea in una ragione [illegible] pag. 33

82. Si motiva che alle ragioni duplicate, o triplicate la ragione q.10 C — — — pag. 33

83. Ma Chiusa fra q4.100 :: 49.50 v. ivi. 1.130. 1.131 1.132

84. Centro sodale è di tre termini — — pag. 35.

85. ~~Centro sodale~~ Centro contravm.co relativo ai triangoli Disagonici. ivi.

86. Gli elementi devono avere scevri della unità, ed essere relativi al centro sodale pag. 35

87. ma nei prodotti vi sarà sempre la differenza della unità inseparabile dalla convavm.co natura

88. Spazio — — — pag. 35 v. 1.143. 1.144

89. Mezzo convavm.co Intelligenza ed uso particolare delle differenze Necessità della ragione formalmente indeterminata non di un determinato Proporz.i di questa scienza Triangoli Disagonici inseparabili dal centro sodale Ragioni indeterminate nella loro forma a priori, e così delle proporzioni Necessario il legame di rag.e e prop.

90. La 99 avm.co corrisponde alla circonf.a, come mai 63 pure avm.co può corrispondere al diam.o pag. 36

91. I limiti Tartiniani si aggiungono alla Geom.a. ma niente avanzano la scienza del cerchio pag. 37

92. Non v'è ragione di pretendere di far una scienza particolare di

Indice dell'estratto

1. origine d.a quantità irrazionale p. 2
2. diametro di anim.ca natura p. 11
3. de' nervi de prop. g. d. — p. 12
4. la geom.a costituisce niente
5. da se e per se indipendente p. 15
5 Corda sonora — — p. 17
6. serie anim.ca nasce dall'anim.a p. 20
7. dell'uno armonico — p. 23.
8. da dipendenza co' pesi — p. 24
9. determinare del seno dipende da una ragione centrale p. 28
10. Tutte le scienze di quantità devono risolversi nella scienza unic. de ragioni — p. 31
11. mezzo anim.co 2. fra 1. e p 31
12. l'uno anim.co nasce da ½ anim. p. 32
13. Geom.ca quella nasce dall'anim.ca e dall'anim.ca — — p. 32
14. Proporz.e 3.5.7 — — p. 37
15. Quadrato del seno mezzo anim.co p. 43
16. b deriva i tre mezzi — p. 53
17. Non è esclusa la unità dal legame de proporz.i p. 63
18. Proporz.i col p.o 5re n.o quadro p. 66
19. Proporz.i di doppio centro p. 69
20. ba del M. 4.6.8.9.12. p. 70
21. cerchio nel settangolo conte p. 100
22. lo stesso, il diverso, la sua p. 112
23. analogia con punto, linea, superficie — p. 119
24. Tr.o triang.o Disagonico p. 120
25. Triangoli Disagonici p. 135
26. Modo comporto p. diagonale — — p. 137

Supplemento

~~Copia [illegible]~~

Questo suppl. è completo estr.
estratto dalla pagina autografa
della Critica del Colombo

~~Ms. Bart.~~

Supplemento necessario che diventa Epilogo della Scienza

A pag. 99. si è dimostrato, che l'unico, e vero termine della circolare del quadrato BCB deve essere 99, somma di $54+27+18 = 99$

$6+3+2 = 11$

è però il raggio BC deve ritrovarsi uguale (a bichimede) a 63. Ivi non si è consumata l'analisi di questo termine, in cui cade la irrazionalità, ed incommensurabilità, quando debba intendersi razionale, ed innubile il termine 99, che qui si assegna alla linea circolare.

Che 63 sia somma de' termini della ragione 31+32=63. è assioma degl'impari, ed in tal rispetto non si considera come mezzo armonico degli estremi 36. 72.

Che la ragione 31. 32. debba intendersi, e ridursi a forma di proporzione con l'aggiunta del termine 63; questo è un assioma della vera scienza delle ragioni, e proporzioni, fondato in genere

11. 7 :: 99 / 63 3 / 11 / 63

62	63	63	64
63	62	63	63
186	184	189	192
372	368	378	384
3906	3968	3969	4032

1631. 32. 33

31. 32

62. 63. 64

61×63. 61×64. 63×63. 63×64

3906. 3968. 3969. 4032

3970

su le proprietà del numero, in ispecie sulle proprietà dei mezzi determinati delle proporzioni dai quali si torna a procede alle loro radici, e da queste alle divisione ai loro prodotti.

Sia l'esempio in .3.4.5., mezzi determinati degli estremi multipli .a.b. sonati 3+4=7; 3+5=8; 4+5=9. sonati nuovamte 7+8=15; 7+9=16; 8+9=17; si avranno .15.16.17. i ove mezzi determinati degli estremi .aa.cc :: 3.5. radici di ragione degli estremi a.b. Proseguendo la somà 15+16=31; 15+17=32; 16+17=33. sonati nuovamente 31+32=63; 31+33=64; 32+33=65. si avranno 63.64.65. i ove mezzi determinati degli estremi 56.7a :: 7.9. radici di ragione di 3.5. si in progressione indefinita.

7.9
3×4=12
4×5=20 12.20 :: 3.5

Succederà adunque lo stesso si divisione de' termini in.63. diviso in.31.32; in 65. diviso in.32.33. Così diviso .31. in.15.16.; a 33. in .16.17.
Così diviso .15. in.7.8; 17. in 8.9.
Così finalmte in.7. diviso in 3.4 in.9. diviso in.4.5. principio po.

3 5
1.2 2.3

Questa

Questa è dottrina universale di tali proposizioni, fondata nella proprietà generale del numero, la quale in queste proposizioni procede per progressione indefinita di radici nei tre termini, arm.°, aritm.°, contrarm.° Per esempio sia la serie naturale 1.2.3.4.5. ecc. Sommabili 1+2=3; 2+3=5; 3+4=7; 4+5=9; 5+6=11; 6+7=13; 7+8=15; 8+9=17; 9+10=19; 10+11=21; 11+12=23; 12+13=25; 13+14=27; 14+15=29; 15+16=31; 16+17=33; 17+18=35; 18+19=37; 19+20=39; 20+21=41; 21+22=43; 22+23=45; 23+24=47; 24+25=49; 25+26=51; 26+27=53; 27+28=55; 28+29=57; 29+30=59; 30+31=61; 31+32=63; 32+33=65; 33+34=67; 34+35=69; 35+36=71; 36+37=73; 37+38=75; 38+39=77; 39+40=79; 40+41=81;

1061

alla radice; l'analisi diventa sintesi, poichè si procede dalla radice al prodotto.

La osservazione è necessaria, ed importante, acciò si capisca sempre più, che ciò che appare, non è; ma è ciò che non appare.

Tutta questa dottrina era necessaria alla scienza in genere, al caso in specie dei due termini 65. 99.

Supposta adunque la necessaria posizione dei due termini 31. 32. 33., in due modi può considerarsi questa posizione.

Primo, come forma di proposizione g. d. la quale, e la solita formola sarà $999 \cdot 10a3 \cdot 10a4 \cdot 10a5 \cdot 1036$

Secondo come radici, poichè 31. 33. sono impari, e però necessariamte sono radici della ragione 15. 17

Terzo. come somma; ed in tal caso la somma è $\cdot 31+32+33 = 96.$

Da questo ultimo modo incominciando l'esame $\cdot 96. 99.$ si trova $:: 32. 33$; i di cui termini sommati $32+33 = 65.$ costituiscono il medio con trovm^o. 65. della stessa proporz^e, di cui 65. è il medio armonico, e qui bisogna memorare che i prodotti

$$\begin{array}{cccc} 32 & 33 & 32 & 33 \\ 31 & 31 & 32 & 32 \\ \hline 32 & 33 & 64 & 65 \\ 96 & 99 & 96 & 99 \\ 99a & 10a3 & 10a4 & 105 \end{array}$$

$31 \cdot 32 \cdot 33$

$31 \times 32 \cdot 31 \times 33 \cdot 32 \times 32 \cdot 32 \times 33$

$$\begin{array}{cc} 31 & 33 \\ 15 \cdot 16 & 16 \cdot 17 \end{array}$$

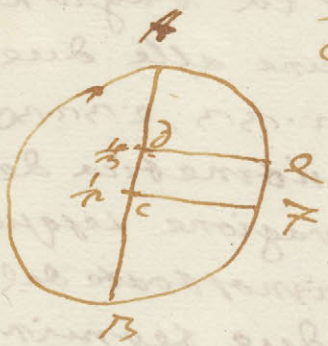
5 Luglio. 1770.

che i producenti 65. sono i due mezzi conovarm.ª 5 x 13 = 65., da vadoppiati in co. no. co. mezzo conovarm.co della dupla, e no. della sesquial.ª teva, ridotte a proporz.ª g.d. Nella dottrina approbata a pag. 111., si è accennato di passaggio il pr.º poligono inscritto da Archimede di lati 96; da cui è nata necessariam.te in 7.11. la prima di tutte le vagioni possibili a dimostrarsi fra il quadrato inscritto, ed il cerchio circoscritto a questa è verità di fatto.

Seconda verità si è, che, diviso il diametro 2 l'armonica serie delle frazioni in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c il primo della serie de' seni è necessariam.te il semidiametro in piano, FC, del quadrante a pag. 199., il quale si ha da $\frac{1}{2}$ 1 e corrisponde la vagion dupla fra il diametro, e la sua metà.

Da questo principio necessariamente procede, che il 3.o seno dedotto da $\frac{1}{3}$. al seno dedotto da una metà sia in radice sesquiottava, talchè i due quadrati de' seni di $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ siano g.li: questa è verità dimostrativa.

Terza verità si è, che a vagueglio



AB = 6
AC = 3
AD = 2

$\overline{c7}^2 = AC \times CB$
$= 3 \times 3 = 9$

$\overline{2c}^2 = AD \times DB$
$= 2 \times 4 = 8$ da

1064
Lup. c.

fig. pag. 199.

di $\overline{BC}$=99., meno 1. di $\overline{BD}$=100 benche $\overline{BC}$=$\overline{BD}$, è forza intendere la potizione $\overline{B1}\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B3}$ meno 1. della potizione $\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B3}\cdot\overline{B4}$; e benche resti escluso dalla forma $\overline{B1}\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B3}$ il termine $\cdot\overline{B4}$, ciò nonostante debbano intendersi comuni i termini $\cdot\overline{BC}\cdot\overline{B3}\cdot$ alle due forme $\overline{B1}\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B3}$; e $\overline{B2}\cdot\overline{B3}$ [illegible]

Ciò tanto è vero quanto che come dalla forma dei due termini $\overline{B1}+\overline{B2}+\overline{B3}=96$; così dalla somà di $\overline{B2}+\overline{B3}+\overline{B4}$ si ha 99. In oltre $\cdot\overline{B1}\cdot\overline{B3}\cdot$ essendo le radici della vagione $\cdot15\cdot16\cdot$ questa non può darti, che in essenti concreti, e positivi, nè possono assegnarsi che in $\cdot\overline{B0}\cdot\overline{B4}::15.17.$ e collocare dimostrativamente le radici $\cdot\overline{B1}\cdot\overline{B3}\cdot$ divise dal merco aritm.co $\cdot\overline{B2}\cdot$ comune alle radici $\cdot\overline{B1}\cdot\overline{B3}\cdot$ ed agli esponenti $\cdot\overline{B0}\cdot\overline{B4}$

Ciò stabilito, che la vagione $\overline{B2}\cdot\overline{B3}\cdot$ comune alle due forme $\overline{B1}\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B3}$; e $\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B0}\cdot\overline{B4}\cdot$ sia radice aritmetica delle radici della vagione sesquiottava, e sia dimostrato dal no. Quadrati i due termini $\overline{B2}^2=1024$; $\overline{33}^2=1089$, e comparabili a 16.17; risulta la differenza della unità in 1088.1089.

Ma data la forma $\cdot\overline{B2}\cdot\overline{B3}\cdot\overline{B4}\cdot$ della propos.e 9. diceva.

$\overline{B2}$	$\overline{B3}$	
$\overline{B2}$	$\overline{33}$	
64	99	
96	99	
1024	1089	
17	16	
1088	6534	
1089		
1024	17424	
17408	17408	
1700	16	
000		

16
1064
1089

3a · 3β · 34

31×33 · 31×34 · 33×33 · 33×34
1056 · 1088 · 1089 · 1090 · 11aa ·

30 / 33 / 90	34 / 32 / 64	33 / 33 / 99	34 / 33 / 102
96 / 1056	102 / 1088	99 / 1089	102 / 11aa

1056 · 1088 · 1089 · 1090 · 11aa ·, la differenza · 1088 · 1089 · corrisponde il cerchio degli esterni (32 · 34 :: 16 · 17 ·, è la metà della forma 16 · 17 · 18 ·, i di cui esterni · 16 · 18 :: 8 · 9 · adunque &

Ma è venità dimostrata che i due primi seni sono radici della ragion sesquiottava; è venità qui dimostrata, che 31 · 32 · è indivisibile porzione della forma · 31 · 32 · 33 ·, la di cui porzione · 32 · 33 · qui si è dimostrata radice delle radici sesquiottave · è venità di fatto che il pr. poligono si è incontrato da Archim. in · 96 · che sta a · 99 :: 32 · 33 · del qual · 96 · è multiplo · 32 · mezzo aritm.co della forma 31 · 32 · 33 · adunque la riflessione del termine impari · 33 · in · 31 · 32 · conducendo dimostrativam.te a · 32 · 33 ·, conduce alla radice di quel principio assolutam.te primo, in cui si spiega il cerchio nell'assolutam.te prima ragione dei due seni di $\frac{1}{32}$ e di $\frac{1}{33}$ del diametro, armonicam.te divisa nella duplo, e nella sesquialtera: Ragioni fondamentali della scienza del cerchio, e costituendo di forma quella ragione tripla, che si trova fra · 32 · 96 ; e fra · 33 · 99 ·

3a · 3β
16×16 · 16×17
16. 17
16.8 16.9
8. 9

1 · 2
2 · 4
4 · 8 :: 1 · 2

1086

Nè può negarsi la verità, e la sicurezza della dimostrativa indicazione di questo principio, perchè ti verifica in qualunque rispetto di somma. la somma di 5a+13b è =65, mezzo convarm.o, prodotto da 5×13=65. la somma di 9b+4g è =195, il quale diviso per 13 e per 5. numeri originali della sua aliquota divisione, è chiaro che si risolve nelle radici triple di ragione 3.5; e però 5×13=39; 5×39=195 fra i quali come estremi, si trovano mezzi di proporz.e g.d. 13.15. radici della sesquis.a 12.16 :: 3.4. la quale forma il cembro della tripla già dissera 2.3.4.6.

195/3 / 65

195/5 / 4 / 39

65.39.15.39 — 13/45 — 5/195 — 15/195

È forza adunque concedere tutto a riba di tale precisione; giacchè convien concedere che il 2do seno è dedotto dalla sesquialtera 1/3 relativam.te al 1.o seno, dedotto da 1/2; e convien concedere a forza che 13. è indicazione dimostrativa della sesquialtera in.16. nello convarm.o fra.30.20.

Che se mai ti opponesse la trasportizione di.13.in.16., come fuori della sua original positione, tanto è insussistente la opposizione, quanto il convario il suo vero luogo a positione originale si è in.10.12.13.15., di cui 12. è il mezzo arm.co 13 il conv.o

5 Luglio 1770

13. il conovarm.co, nè vi è luogo
il mezzo aritm.co 15. fuorchè
le frazioni totalm.te escluse dalla
scienza; Il che fa vedere a lume
di meriggio l'anteriorità dei
due mezzi, arm.co, e conovarm.co
a confronto del mezzo aritm.co,
necessariam.te posteriore, e
composto dalla dupla.
Così 3. 4. 5. 6. è dupla negli
estremi, capace del mezzo arm.co
4, conovarm.co 5. ma incapace
del mezzo aritm.co fuorchè
raddoppiando tutti i termini
in 6. 8. 9. 10. 12. , in cui il
mezzo aritm.co 9. necessariam.te
è fuori dei due mezzi, arm.co
4, conovarm.co 5.
Così 11. 14. 15. 18. è sesquiq.ta
negli estremi, capace del mezzo
arm.co 14, del conovarm.co 15.
ma incapace del mezzo aritm.co,
fuorchè raddoppiando tutti
i termini in 44. 48. 49. 50. 56.
in cui il mezzo aritm.co 49.
necessariam.te è fuori dei due
mezzi, arm.co 14, conovarm.co
15. & indefinitamente.
Questa dottrina si noti con
distinzione particolare, perchè
troppo importa nella metafisica
di questa scienza, e si osservi
che appartiene immediatam.te
alle semplici forme 1. 2, 2. 3,
3. 4. & come indivisibili, e come
assolutam.te prime.

Se poi si chiegga

Se poi si chiegga come dalla forma 1.ca. si abbia la duepla 3.4.5.6; dalla forma ca.3. la sesquialtera 10.12.13.15. &c., la costruzione la somà dei termini della forma 1+ca=3; indi la somà 1+3=4 di ca+3=5; e di 1+ca+3=6. Indi 3.4.5.6. Così la costruz.e della sesquialtera 10.12.13.15. si è la somà ca+3=5. radoppiato in ca. indi la somà di ca+10=12; di 3+10=13; e di ca+3+10=15. Così la costruz.e della sesquiterza 11.14.15.18. si è la somà dei termini della forma 3+4=7. triplicato in ca. Indi la somà di 3+ca=14; di 4+ca=15; e di 3+4+ca=18.

Qui è palente la totale esclusione del mezzo aritmetico; e palente la formazione dei quadrati rispettivi nella somà 3+4+5+6=18, diviso per ca=9; 10+12+13+15=50, diviso per ca=25; 11+14+15+18=98, diviso per ca=49. &c.

E più di tutto è palente che in minimis (nella somà) latet maxima arcana; ovvero

3+6=9; 4+5=9

10+15=25; 12+13=25

11+18=49; 14+35=49 &c.

Osservando sempre che la stessa radice 3. di 9. è la somà dei termini della forma 1+ca. la radice 5. di 25. è la somà d. forma ca+3. la radice 7. di 49. è la somà d. forma 3+4, Nè può essere 3.5.7. ni. impari,

la legge è diversa nei n.i pari 4.6.8.ecc. è la stessa. La radice 4. di 16. è la somma dei termini della forma 1+3 la radice 6. di 36, è la somma di 1+4 la radice 8. di 64. è la somma di 3+5. gl'impari ϕ differ.a 1., e gl'impari e pari ϕ differ.a 2.

Intanto si noti che il pari 2. non può esser somma che di 1+1; non di 1+1. il che è dimostrato dalla serie ϕ differ.a 2; ed ugualm.te si noti, che il termine 8. radice di 64., mercè anom.co fra l'avm.co 63, ed il contravm.co 65. è somma dei termini 3+5.

0+2=2
1+3=4
2+4=6
3.5=8
4.6=10

Ritornando alla sesquialtera 10.12.15.18., in questa posizione vi è quella base scienza dei veri principj del cerchio, che magg.te non può desiderarsi. La scienza si è, che necessariam.te deve trovarsi la origine del termine circolare 99. nella sesquialtera 24.25.26., mentre nella forma originale de' due mezzi, avm.co e contravm.co della sesquialtera 10.12.15.18 si trova ϕ sono la ragione di Archimede, costituita dal cerchio inscritto 11., e dal quadrato circoscritto 14., dimostrativamente dedotta dal poligono 96., che ha la sua radice producente nella sesquialtera 2.3. termini originali dell'aliquota sua produc-

1090

~~12+13=25~~

12+10=22 11

13+13=26 14

a divizione. Ecco il fatto.
Si vede benchiara la massima
ricerca che proviene dal merso
aritm.co 25. comune agli estremi
22. 26. della somma, ed agli
estremi 20. 30. della sesquialtera
g.do 20. 24. 25. 26. 30.
Indi è che dal centro dei merdi
sesquialteri. 24. 25. 26. moltiplicati
per 4. in 96. 100. 104. si abbiano
le radici del centro in. 97. 99. 101.
103; che in 99. 101. corrispondenti
la mezzana vagione s'incontrino
i precisi due merdi aritm.co; e con-
trarm.co degli estremi. 90. 110 :: 9. 11
radici sesquialtere di vagione.
che in 99. s'incontri il merso
arm.co de' suddetti estremi. 90. 110;
e s'incontri come conviene
del triangolo Pitagorico. 20. 99. 101
Tutto ciò si è dimostrato altrove,
ma qui si è di dimostrare molto
di più in rispetto di precisione.
Ecciò adunque la precisione sia
ridotta all'estremo possibile:
sia prima la precisione del
centro sesquialtero. 24. 25. degli
estremi 20. 30

25
24
100
50
600

deve necessariamente distinguersi
come centro di unità di quan-
tità in 24 × 25 = 600, come
20 × 30 = 600; il che non si ha,
nè deve avversi dalla congiun-
zione de' merdi. 25. 20.
È dimostrativamente certo che le
radici di vagione di 24. 25. sono
97. 99; il che divito l'impari. 97. in

Genaio 1770

46. 49

49
48
392
196
2352

2450
4

11760 9800
4704 490
56400 | 58800

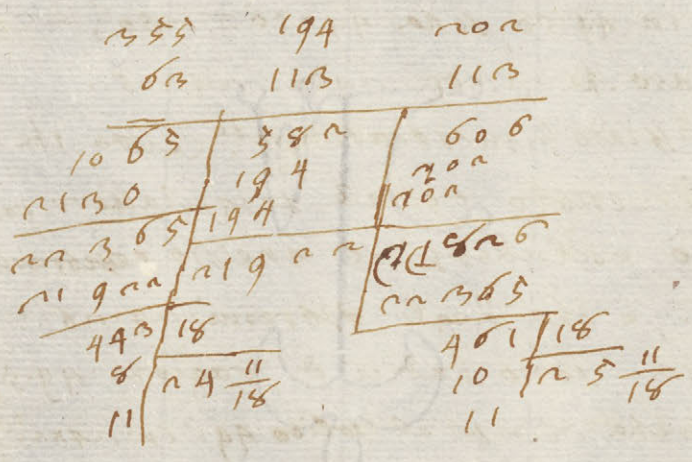
n5
n6
150
50
650

600 650
13 10
7800 13000
650
20400

si ha 48×49 = 2352; divito l'impari 99. in 49.50; si ha 49×50 = 2450; è chiaro che 2352. 2450 :: 24. 25. Ma essendo dimostrativamte certo, che dal centro boreale sesquialtero non può escludersi il mezzo contrario 26., e che degli estremi 24. 26. :: 12. 13. sono radici di ragione 49. 51. perche diviso al solito 49. in 24×25 = 600, diviso l'impari 51. in 25×26 = 650, e 600. 650 :: 12. 13., adunq; le radici 49. 51. abbracciando gli estremi del centro 24. 26., del qual centro è una parte 24. 25., si duplichino 49. 50. in 98. 102. e assegnate le loro radici in 99. 101., e congiungere le parti radicali in un tutto in 97. 99. 101. in cui vi siano le radici possibili, in precisione, del centro 24. 25. ch'è il proprio della quantità, e le radici universali delle radici degli estremi del centro boreale 24. 26., ch'è il proprio della ragione. Maggre precisione di questa non può darsi, nè imaginarsi.

Essendosi dimostrato il termine 653. relativo a 99mo (653. 99 :: 7. 11) di Archimede: si assuma 653. p diametro, e duplicati i due termini 97. 101. in 194. non (come sopra si è, lasciandoli come sono rispetto alla ragione 7. 11.) s'intenda la circonf.a determinata fra i confini degli estremi 194. non.

Indi



355 . 113 :: 194 . 60
355 . 113 :: 100 . 60

355	113	113
60	113	113
10 60	388	606
1130	194	700
3 65	194	100
19		6
19		365
443 | 18		461 | 18
8 | 24 11/18		10 | 25 11/18
11		11

$\frac{11}{18} = \frac{11}{19}$

pag. 4.

10 . 14 . 15 . 16 . 30
10 . 14 . 13 . 15

Indi col metodo delle differenze si assuma la posizione di Mersio si trovano le differ.e 443 . 461. Indi si cerchi in qual ragione stiano fra loro queste differ.e 443 . 461. si dividano per 18, e si trova 24 11/18 . 25 11/18. Ecco adunque il centro sesquialtero . 24 . 25 . nella ragione ripetuta dalle due differenze, e nelle frazi.i 11/18, convertendo la metà il divisore . 18 . in . 9 ., ecco le radici sesquialtere in . 9 . 11 .

Si fatta precipione, ch'è la massima corrisponde la dottrina. Si sa che nella posizione di Archimede 7 . 22 ., la circonfa eccede il triplo del diametro . 7 . della ragione . 22 . 22 . Qui sopra si è dimostrato, che la sesquialtera con i mezzi originali 10 . 14 . 13 . 15 . somata nei suoi termini . 10 + 14 = 24 ; 14 + 13 = 25 ; 13 + 15 = 28 . costituisce negli estremi . 24 . 28 :: 11 . 14 . la ragione del cerchio inscritto al quadrato circoscritto, di Archimede ., e che è chiusa dagli estremi sesquialtri . 20 . 30 ., fra i quali è mezzo comune aritm.co 25 .

È adunque certo che i due estremi . 20 . 22 . ammettono il mezzo aritm.co 21 . (Si vedrà fra poco la realità di questo termine) e che dati i tre termini . 20 . 21 . 22 . questi costituiscono la somma 20 + 21 + 22 = 63 ,

e come forma

Sup. 4

$\square 0 \cdot \square 1 \cdot \square 2$

$\square 0 \times \square 1 \cdot \square 0 \times \square 2 \cdot \square 1 \times \square 1 \cdot \square 1 \times \square 2$

$4\square 0 \cdot \quad 44 0 \cdot \quad 44 1 \cdot 44 \square 2 \cdot 46 \square 2$

è come forma di propor.e g.d. corrispondono la proporzione $\square 0 \cdot 440 \cdot 441 \cdot 44 \square 2 \cdot 46 \square 2$.

È adunque un fatto che le due risultabili differ.e $44 \square 3 \cdot 46 \square 1$. si trovano in $\cdot 1 \cdot$ di più del mezzo conservan.te $44 \square 2$; ed in $\cdot 1 \cdot$ di meno dell'estremo $46 \square 2$.

È un fatto che hanno la somma $46 \square 1 + 44 \square 3 = 904$ - quanto $\cdot 46 \square 2 + 44 \square 2 = 904$. divisa la metà in $\cdot 45 \square 2 \cdot$ è = al diametro di Mezzo $11 \square 3 \times 4$.

È adunque un fatto che nella sesquialtera vi è il principio universale delle comuni posizioni dedotte da poligoni dalla Geometria, perchè tutte si risolvono in questo principio.

Dove non basta al fatto non si assegni quella ragione a priori che dia tutto il lume necessario ad un tal fatto, che di troppo decide.

Date le serie le propor.i g.d. di questa scienza, confinate alla sesquipla, e sommati i loro termini, stanno come qui accanto

Indi dai quadrati si deducano i cubi con le loro radici, e si sommino i termini, come qui accanto

In pr.o luogo da queste tre somme si dimostra reale il $\pm 1 \cdot$ degli estremi delle propor.i g.d. di questa scienza, cioè in $7 = 6 + 1$, in $\cdot 13 = 12 + 1$; in $\cdot 21 = 20 + 1$ q; ed in altre si ha la dimostraz.e del principio

triplа	dupla	sesquialtera	sesquiterza	sesquipar.e 5.a
2	6	12	20	30
3	8	18	24	35
4	9	16	25	36
5	10	17	26	37
6	12	20	30	42
$\square 0 \cdot$	$45 \cdot$	$80 \cdot$	$125 \cdot$	180
4	9	16	25	36
$\square 2$	3	4	5	6
4	9	16	25	36
8	27	64	125	216
$14 \cdot$	$39 \cdot$	$84 \cdot$	$155 \cdot$	258
$\square 2 \cdot$	$7 \cdot$	$\square 3 \cdot 13 \cdot$	$14 \cdot 21 \cdot$	$31 \cdot \quad 43 \cdot 43$
7	$13 \cdot$	$21 \cdot$	$31 \cdot$	43

memoria $\cdot \square 0 + \square 1 + 22 = 63$

1094

Sup. 4.

1. 3. 7. 13. 21. 31. 43

diffe. 2. 4. 6. 8. 10. 12

di questa serie inp. 1. 3. giacchè le differenze dimostrano ad evidenza.

In 2do luogo si osservi se nella deduzione de' quadrati dalle somme dei termini delle proporzioni s'incontri qualche quadrato, che non ne dipenda, e provenga da radice cuba

Qui si è finalmente al famoso punto di vista, quanto inaspettato, altrettanto luminoso in sua stessa

Ci è benissimo il quadrato dipendente, e procedente da radice cuba, ed è 5. 25. 125; ed è l'unico ed il preciso della sesquialtera a cagion dell'esclusione di tutti i possibili nella indefinita serie delle proporzioni g. d. di questa specie

Non è più adunque da maravigliarsi se i termini di queste proporz. devono essere necessariamente 5., due estremi, e tre mezzi, sicchè nella natura de' termini stessi si trovi la forma sesquialtera il ragguaglio al n°. che la necessità della propria natura, corrisponde con le somme alle forme applicate ai mezzi ed agli estremi della sua serie: Prova invincibile della verità più volte accennata dall'Autore, che i numeri sono segni reali delle forme reali

Se data p. es. la forma 3. 4. dei cui termini la somma è = 7. sia applicata a sette numeri qualunque

6. Luglio 1776

qualunque in aritmetica serie il mezzo de' quali sia costituito dal 3. in ove termini, e dal 4 siano costituiti i due estremi di due termini; ciascuno; la somma de' mezzi alla somma degli estremi, è necessariamente come 3. 4., così di tutte le forme, applicate ai n.i in aritmetica serie: Non sa imaginar l'Autore prova più evidente di questa della verità della detta proposizione.

Che se si dica che le forme sono i numeri stessi e che però l'argom.o è idem per idem: Si dice uno proposito, perche la ragione del doppio, del triplo, del quadruplo &c non è il numero; così esprima col numero, ed ugualm.te con linea, con superficie, e con i solidi, o sia corpi; ed è tutt'altra cosa, che fra i segni della quantità il solo numero sia il vero segno reale della forma, approvate delle ragioni. La presente dottrina su questo punto, quanto è chiara, ed evidente, altrettanto era necessaria. Su questa base è fondato il n.o dei cinque termini necessarj alla costituz.e di tali proporz.i e però i tre mezzi ed i due estremi di tre proporz.i le di cui somme sono necessariamente

pag. 4

3. 4

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7
estremi mezzi estremi

1+2+6+7 . 3+4+5
16 12 :: 4. 3

2. 3 = 6

1. 2. 3. 4. 5
1+5=6 ; 2+3+4=9
6. 9 :: 2. 3

2 3

3. 4. 5. 6. 7
3+7 . 4+5+6
10 . 15 :: 2. 3

. 3. 4 .
3. 4. 5. 6. 7. 8. 9
mezzi
3+4+6+9 . 5+6+7
24 18 :: 4. 3

il dispari della forma indica il n.o de' mezzi; il pari degli estremi

1096

Sup. 5.

6 . 8 . 9 . 10 . 12
6+12 . 8+9+10
18 . 27 :: 2 . 3

12 . 15 . 16 . 17 . 20
12+20 . 15+16+17
32 . 48 :: 2 . 3

2 . 5 7 . 9 12
2+12 . 5+7+9
14 21 :: 2 . 3

nello forma sequialtera, o si vogliano intendere semplice proprietà del n°. comune, o s'intendano (e s'intenderà il vero) dipendenti dal sequialtero principio universale debbiamo intendere: In ogni modo è certo di fatto, che la pianta comune di due merci, e due estremi costituendo la propos.ne g.d. non corrisponde alla pianta di questa scienza, la quale assegna, non 4. ma 5. determini in due estremi e tre merci, come affatto necessarij alla costituzione di quella tale propos.ne g.d., che sia di genere universale.

Perciò è forza concludere che la pianta comune non è genere, ma specie; e che generalmente alla scienza comune delle ragioni, e proporzioni ha sempre mancato, e manca attualmente la nozione, e l'uso di uno di que' merci (ed è il contrassegnio) che a vagheggio della propria naturale forma è il capo di scienza.

Così è forza concludere in grazia della stessa della natura cosa intrinseca, ed unica nella sequialtera proporz.ne: stessa essenzialmente dipendente dalla notizione, non dei due soli merci, nè determinati a natura veruna, ma dei tre inseparabili

sup. 5

fra loro, e nellefanamente determinabi alle ove nabueve di quantità, avm.ca, aiom.ca e contravm.ca
Indi ri deduce la fondamentale verità dell'Buoore nell'attegnazione dei due principj primi dell'avm.ca scienza; nella dupla come principio potenziale; e nella sesquialtera come principio attuale. L'attualità magr. della nabueva cuba non può darsi; e questa si trova unicam.te, e realm.te nella sesquialtera. Questo essendo un fatto, non ammette rijpotta
Dopo una tale scoperta diventa veram.te inutile qualunque ogginta di prova, e di lume. Tuttavia non si vuole ommettere una osservaz.e su la tripla g.d. n. 3.4.5.6; relativa alle somme dei suoi termini.

Nuova proprietà della proposiz.e tripla

Come che la principale dimostraz.e della vera nabueva, e del vero numero circolare è fondata su questa proposiz., ed altrove in più luoghi si sono esposte dall'Buoore altre proprietà singolari di questa proposiz., così non può meno giovare la scoperta di un'altra nuova proprietà, relativa, e coerente a quanto si è qui sopra esposto.
Fra tutte le proposiz.i g.d. non vi è che questa unica e sola

1098

Supp. 5

di cui sonabi ad avvisare, ma con ordine, due a poi ove termini in due somme, queste ~~queste~~ in ogni modo corrispondano nella ragione che fra loro risulta, alla natura della sua proposiz. ed ai principj primi della scienza.

Quindi apparisce che nel N°. in genere nelle proposiz. g.d. in specie non si trova in modo veruno la sopra esposta proprietà, unica, e sola della tripla g.d.

Ma vi è di più. ciascuno dei due mezzi di questa proposiz. costituiscono con le sorte le precise ragioni de' principj primi di questa scienza, precisione ch'anno unica della tripla g.d., altrettanto piena di scienza.

Sia da se il solo mezzo contrarmonico 5. a confronto della somma de' termini rimanenti $r+3+4+6=15$. Ecco la tripla 15. ::: 3. 1.

Sia dal se il solo mezzo aritm.co 4. a confronto della somma de' termini rimanenti $r+3+5+6=16$; ecco la quadrupla 16. 4 :: 4. 1. che deve convertirsi in tripla 3. 1. con la scorta della sesquiterza da ripetersi nel mezzo 4 la formale costituzione della proposiz. g.d. di questa scienza, di che si è data altrove la consumata dottrina.

Ma più troppo vi è di più. Questa proprietà

$r+3 \cdot 4+5+6$

5 15 ragione degli estremi

$r+3+4$ $5+6$

9 11 radici sesquialtere

la cui è fondata la massima dimostr. di questa scienza nella forma q. 10. 11

$r+4+6$. $3+5$

12. 8 } sesquialtera comune tra il N°. in 5 termini aritm.ci ordinabili, si a cui le proprie g.d. 6

e $3+4+5$ $r+6$

12

$5 \cdot r+3+4+6=15$

$4 \cdot r+3+5+6=16$

6. Luglio - 1770

Sup. 5

Questa proprietà della quadrupla fondata nel mezzo aritmetico, è comune in genere, sì al n°. che a queste proposizioni, e così deve essere necessariamte, poichè i termini sono cinque, ed al mezzo aritm.co da se, ed ai quattro termini sommati si è applicata la forma 1.4. È adunque un fatto che costituisce assioma, che, rispetto al mezzo aritmetico, la ragione universale si rileva nella nebquadrupla 1.4., de' di cui termini la somà è 5.

È ugualmente un fatto, che costituisce assioma, che la somà dei due mezzi di queste proporz.i con la somà dei due estremi, costituisce universale la ragione sesquialtera, e non la nebquadrupla;

ed è parim.te un fatto, che costituisce assioma, che queste due proprietà sono fondate nella natura del numero aritmetico in genere, prima che dal numero piano dedotte le sud.te proporz.i in specie.

Ma è un fatto che se il mezzo aritm.co è comune in nebquadrupla sì al n°. in genere che a queste proposizioni in specie, non lo è altrim.ti il mezzo contrarm.co nè in nebquadrupla, nè in veruna determinata ragione che riferisca sempre

Sup. 6.

$$\begin{array}{l} 1 \cdot a \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ 3 \cdot 1+a+4+5 = 1a \\ \qquad 3 \cdot 1a :: 1 \cdot 4 \\ \hline 1+5 \cdot a+3+4 \\ 6 \qquad 9 :: a \cdot 3 \end{array}$$

1100
sup. 6

incostante, e sempre diversa dalle
innumerabili vagioni del semplice
sistema delle semplici forme.
Adunque la proprietà di ovvero vi
una somma di quattro termini or-
dinati tripla d'un mezzo contrarm.o
rimane unica, e sola della tripla
g.d. n. 3. 4. 5. 6., ad esclusione di
tutti i numeri in genere e di
tutte le proporzioni in specie
Adunque (A covollario) della
tripla g.d. si verifica in fatto
la convertione della quadrupla
in tripla; principio proposto
dall'Autore come capo di veri-
sienza delle vagioni, e propor-
zioni applicate al cerchio
Il fatto è chiaro, e palpabile; ch
dal mezzo aritm.co 4. si ha la
quadrupla nella somma 16.,
principio primo di questa pro-
prietà universale del mezzo
aritm.co; dal mezzo contrarm.o
5. si ha la tripla nella somma
15; proprietà unica, e singolare
della tripla g.d., ugualmte
principio primo universale
della costituzione de' centri
di queste proporzioni g.d.,
determinati dai due mezzi
arm.co, aritm.co: verità manife-
sta; che se il fatto del mezzo
contrarm.co 5. si ha la tripla
nella somma 15., questo termine
15. si ha la dimostrazione
dalla moltiplica di 3×5=15, che
vuol dire dalla moltiplica fra loro

Sup. 5.

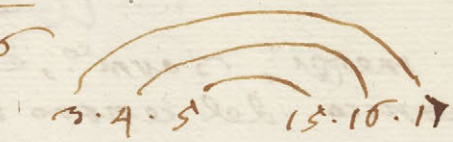
dei due mezzi, 3. arm.co, e 5. con-
trarmonico del centro triplo
3. 4. 5.; dal di cui mezzo arit-
metico si ha 12. 16. la quadrupla
come prodotto di radice qua-
drata, la qual quadrupla sie-
guba ugualm.te dalla somma
dei quattro termini 1+3+5+6=16
che le due somme si trovino nella
stessa ragione 15. 16., ch'è il
centro della propor.e 12. 15. 16.
di cui è somma 3. 4. 5, centro
dei tre mezzi della tripla 1. 8.
Ancor questa è una proprietà
affatto sola della tripla q. d.
Ja somma non si finirebbe mai, se
si volessero esporre tutte le
proprietà, e facoltà singolari
di questa propor.e, e la dottrina
che in se contengono.

Dove si conchiudeva questo supplem.to,
si osservi un'altra proprietà,
e la dottrina che ne deriva

Si è esaminata la relazione dei
due mezzi, contrarmonico 5.
alla somma 15., antiarmonico 4.
alla somma 16.; ma non si
è esaminata la relazione del
del mezzo arm.co 3. alla somma
17. dei quattro termini 1+4+5+6=17
Che 17. sia il mezzo contrarm.co della
stessa propor.e, di cui è mezzo
antiarm.co il 16., armonico il 15., è
chiaro nella propor.e q. d. 12. 15. 16. 17.
e ciò è chiaro che i tre mezzi
della tripla ai tre mezzi della

1102

pup. 6



reciproche 3ª corrispondono nel modo seguente

Questa è proprietà universale di tali proporzioni, le quali si corrispondono fra loro in prodotto, e radice di ragione. Si spiega. Della tripla sono radici di ragione 3.5., e dalla forma 3.4.5. si ha la propor.ne g.d. 12.15.16.17.20. Il centro di questa al centro della tripla sarà nella sopra espressa relazione, e la somma di 15+16+17 = 48. alla somma 3+4+5=12. sarà in quadrupla

Così della dupla sono radici di ragione 5.7; e dalla forma 5.6.7 si ha la propor.ne g.d. 30.35.36.37.42. Il centro di questa che è 35.36.37. al centro della dupla g.d. che è 6.9.10 sarà nella sopra esposta relazione; e la somma di 35+36+37=108. alla somma di 6+9+10=27. sarà in quadrupla



È adunque proprietà universale di queste proporzioni la sopra esposta relazione dei centri, e la loro somma in quadrupla proprietà, che ha origine dalle forme poiché se dalla forma 1.2.3. della tripla g.d. si ha reciprocamente mezzo aritm.co il quadrato 4. di cui è meno 1. il mezzo arm.co 3., più 1 - il mezzo contrarm.co 5., così dalla somma dei termini della forma

6. Luglio 1770

della forma $1+n=\square$; $n+\square=\square$
si ha la forma delle radici triple
in 3.4.5; è chiaro che il mezzo
aritm.co della 1ª forma, che è da
deve ovoparti duplicato in 4;
mezzo aritm.co della 2da forma,
2D conseguenza i due quadrati
rispettivi in quadrupla.
Indi a vaglio in quadrupla
la somma dei ore mezzi vela-
tivi, de' quali l'aritm.co è
sempre quadruplo; e l'arm.co
essendo -1; il contrarm.co +1. dell'
aritmetico: è forza che nella
loro somma poreggino il doppio
del 1º. quadrato &
La dottrina generale, risultante
di necessità di principio da queste
due proprietà universali, cioè
la necessità dei ore mezzi, arm.co
aritm.co, e contrarm.co, e per
corollario, la verità di fatto,
che la scienza comune delle
ragioni, e proporzioni, è sempre
stata, ed è all'oggetto di questo
principio essenziale della
vera scienza delle ragioni
e proporzioni.
La dottrina particolare cioè, che
rispetto alla relazione, ed appli-
cazione di queste proporzioni
al diametro, ed al cerchio, si
ha in queste due proprietà
la più evidente dimostrazione
dimostrazioni possano mai ag-
giungersi dell'unico, ed essenziale
fondamento

Sup. 7.

1104

sup. 7

fondamento che vi è nella tripla
g.d. ff avere vero scienza del
principio circolare
Nè qui si vuol proporre & dimos-
trar.ne la natura circolare che si
vede, che si vede con l'occhio,
se non bassa con la mente nelle
relazioni segnate col segno X.
di Platone, Perchè siano posi-
tive e reali, e la unità delle
somme indichi nella perpendicolare,
che cade sopra i mezzi armonici
4.16. il preciso viaggio, misura
comune della circonf.a; sì come
diametro che dipende dalla dupla
radice della quadrupla; sì come
corda del cerchio che dipende
dalla divisione del diametro,
nella vagior quadrupla 1.4::4.16
Nè si vuol proporre & dimos-
trar.ne la somma totale delle
tre relazioni 3+17=20; 4+16=20;
5+15=20, che è: 60: Numero
necessario del tutto armonico,
quando il septuplo ripiena delle
four.i si voglia esprimere col
n°. comune, unico, e vero
linguaggio di questa scienza,
Benchè la unità in.no; la
totalità in.60. costituisca
necessariam.te la forma tripla.
N°. Nulla di questo si vuole,
benchè ogni più savia
legittima dimostrazione. Qui
si vuole la unica precisione
in qualunque rispetto.
La prima si è che il mezzo arm.co

3 · 4 · 5

15 · 16 · 17

3+17=20 = 5+15+4+16.

1 · $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{3}$ · $\frac{1}{4}$ · $\frac{1}{5}$ · $\frac{1}{6}$

60 · 30 · 20 · 15 · 12 · 10

sup. 7

3 | 1+2+3+4+5+6 = 16
3 | 4+5 = 9

3. è mipeva, e vadice dipla, non già della somò esbinseca dei dermini vedidui della dipla g.d. 2.4.5.6; ma della somò inbrinseca dei due mezzi 4+5=9; e si dice inbrinseca perchè è mipeva, e vadice di cenbro, e non di pedficie da cdo si è la impossibilità di quesba proprietà, non solamte in qualunque albro cenbro di propovte, ma in qualunque combinazione di bre numeri per diffeva 1. fuorchè nei bre puenti - 3.4.5. - E qui si rimarchi se i briangoli Rbagonici siano necessarj di necessità di principio primo in qsta scienza, giacchè 3.4.5. è il po da cenbro si è l'azione predominante del mezzo avmco 3. su gli albri due mezzi, ainbmco 4. conbroavmco 5; fanbo podivi nella cbro somma 9., quando adivo il mezzo avmco 3; vadice di 9.

Quesbe sono le bre inbrinseche proprietà del mezzo avmco 3. rifledbo in se desso dentro la sua propovte di dipla.

Esaminando poi le sue proprietà relative ai bre mezzi del cenbro corrispondente 15.16.17. Prima di bubi, pchè univerpale si è la somò de' mezzi

3.4.5
15.16.17
15.20.22 :: 9.10.11 - in prezicione

1106
Sup. 7

di corrispondente natura, i di cui numeri primi sono 9. 10. 11
Ecco la posizione fondamentale di questa scienza della vera natura, e della vera misura della linea circolare: posizione, in cui ommiamente si racchiude la essenza del sistema, e che la somma diminutiva si risolve nella tripla armonica. 6. 3. 2.; perchè la cabalità (come si è veduto sopra) è 60; la unità è 120. e formando i suoi termini primi 9+10+11 = 30, risulta il medio arm.co 120. fra 60. 120 :: 6. 3. 2, di cui termini la somma è = 11. la seconda proprietà è particolare del medio arm.co 3., relativamente alla somma 17. che necessariamente l'ingenera col mezzo concorrente 17. degli estremi 12. 22. Terminando i due estremi 5. 17. come impari, e però assumendoli come radici, nella divisione di 3. nella sovraduplа 1. 2. ch'è a priori, e nella divisione di 17. in 8. 9. forma sesquiottava, e sendo della duplа 9. 8. 8. 9. 12.; da esse due radici di ragione si hanno in prodotto 1×2=2.; 8×9=72.; 2. 72 :: 1. 36. Questi sono in precisione i due quadrati estremi del sestuplo sistema, cioè 1. 2. 3. 4. 5. 6
1. 4. 9. 16. 25. 36

7. Luglio. 1770

Ecco adesso

Ecco adunque l'altro spettacolo della terzuplo estensione locale dell'armonico sistema, dimostrato dal duplo principio affatto primo di ragione di 1. a, che di proporzione 6. 6. 9. 12.

Quì si osservi, che il termine 1. come quadrato, non ha luogo nelle cinque proporzioni, che della p.a, ch'è la triplo, il quadrato è = 4. E ciò separando il quadrato 36. che si è avuto dalla radice 6. 9. e ch'entra nell'ultima proporzione, dal quadrato 1., che si è avuto pure dalla radice 1. a. ma non entra in veruno proporz.i il quadrato 36. alla somma dei quattro residui 4+9+16+25 = 54. si trova nella forma sesquialtera. 36. 54:: 2. 3.

Ecco un 3.o spettacolo che dimostra come dai termini materialm.te formanti nella loro numeraz.i la triquadruplo, cioè trentasei e un termine, e 4. 9. 16. 25. son quattro termini; si abbia formalmente la forma la sesquialtera.

La terza proprietà che nello stesso tempo è universale, e particolare, e che però spiega, e conchiude anche più del bisogno, si è il fatto stesso della relaz.i di questi due centri fra loro. Qualunque centro di ragione

Sup. 8

1108
Sup. 6.

ridotta a proporz.ne g.d. è necessariamente relativo in quadrupla ad esempio della radice della vagione, come di sopra esposto e spiegato. Ma non è poi vero che nella infinita progressione, a relazione di qualsi esempi si dia, o possa darvi il vago proprio di diametro a circonf.a, contenuto nei esempi, seno che pel solo esempio .3.4.5. degli esempi tripli .12.16., ed il solo esempio .15.16.17. degli esempi 12.20 :: 3.5., radici di vagione della tripla. Questo è un fatto che decide anche troppo chiaramente.

La circonf.a prossimamente è = 22 eccedendo il triplo del diametro, ~~per~~ 3x7=21. della vagione prossima a .21.22., la vagione 7.22. fra luogo fra il mezzo convavum.co 5. degli esempi .12.16, e fra i due mezzi .15. avum.co, ed avom.co degli esempi 12.20. perchè 5.15. essendo in tripla; se si assegni .5. al diametro che dalla circonf.a è più del triplo eccedente della vagione .21.22. incirca, s'accerta necessariamente si trova fra 15.16. vagione magg.e della vagione .21.22.

Ma la vagione .7.22 non avendo più luogo fra il mezzo avom.co 4. degli esempi .12.16., e l'avum.co 15. perchè il triplo di 4. è 12; e molto meno fra il mezzo avum.co 3.

Lep. 6

26 1109

de' raggi estremi a. o. e lo stesso avm°. 15. benchè siano meggi de' stessi cenori; c'è sempre più impossibile che la ragione 7. aa. abbia luogo fra gli altri cenori, fra loro corrispondenti, quando che, più innanzi che procede la serie di questi cenori, sempre più si allontanano i cenori fra se corrispondenti, dalla ragion tripla nel rapporto dei meggi fra loro. Non si dimostra, perchè è un fatto

Dunque nella indefinita serie di queste proporz.i, è impossibile di fatto, che fra due cenori corrispondenti, si possa trovar inclusa la ragione fra diam°. e circonf.a, fuorchè nel p.o e 3.o cenoro in genere, p.o della tripla g.d. a. 2. 4. 5. 6; terzo della pubblicata g.d. 3.a. g. diceva 12. 15. 16. 17. 20; In individuo precisione fra .3. del p.o cenoro, e. 15. 16. del 2do.

Nè si sbagli nel cenoro. 8. g. 10. della dupla g.d. 6. 8. g. 10. 12., perchè il meggo avm°. 3. del cenoro triplo ha luogo, come diam°. a costituire la ragione 7. aa. fra i due meggi. g. 10. del cenoro duplo.

Non è questa la proporzione della suddove, perchè non è questa la proprietà de' cenori corrispondenti fra loro in ragione, ed in radice

di ragion

1110

Imp. 6

vagione. Imparo si allegrano i due cenni della tripla, e della pubblica V.a, in quanto gli estremi di questa 12.20 :: 5.5. sono le radici di vagione degli estremi di quella 12.6 :: 1.3. e però, a vagueaglio, le somme dei cenni si corrispondono in quadrupla.

3+4+5 = 12

15.16.17 = 48

Nulla adunque ha che fare in questa proposizione, anzi in questo fatto l'allegazione di alcuni cenni fuori dei soli fora corrispondenti negli estremi in radice, e prodotto, e nella somma fra le corrispondenti in quadruplo; e però qualunque difficoltà, o opposizione è affatto nulla.

Il fatto è adunque ridotto a quella tale precisione che o conviene negare la verità manifesta, o conviene concedere, che questa è la unica, e vera scienza del cerchio.

Verità manifesta di fatto, e di scienza si è che la ragione di 7.22. (in circa) non vi è, nè può esservi che in precisione, fra 5. medio convariato del cenno triplo, e fra 15.16. medii l'uno avviato l'altro aviato del cenno degli estremi 12.20.

Verità manifesta di fatto, e della Geometria comune n'è, che la massima più perfetta di tutte le ragioni allegate, ed allegabili fra il

7. Luglio. 1770

fra il diametro, e la circonferenza è quella di Ceulen condotta fino alle cifre 36.

Verità manifesta di fatto, e comune à questa scienza, che alla Geometria gli è che la posizione del diametro di Ceulen di principio assolutamte gli dà nº è nel termine 5. di questa scienza ch'è l'unica assegnabile fra due cenori corrispondenti, come s'è dimostrato; e che concedute necessariamte il diametro = 5. necessariamte la circonfa di Ceulen deve trovarsi rinchiusa fra i due termini. 15. 16.

Verità manifesta di fatto positivo, e reale gli è che appunto fra 15-16 (aggiunti i zeri a voglia) è chiusa la metà (5707) della circonfa di Ceulen. 3 14[illegible]5 &c, come la posizione del diametro = (10000) necessariamte si risolve nella sua metà 50000, di cui è principio di nuovo assolutamte primo il termine 5.

Se tutto ciò è verità manifesta di fatto, e di scienza: è deciso troppo, e di troppo. È deciso troppo, perchè già era deciso abbastanza nel corpo della scienza: ma il supplemto decidendo anche più del corpo, decide oltre il bisogno. È deciso di troppo, già rispetto ai veri principj delle scienze dimostrative, conviene tornar da capo

III.a
Sup.9

ed ove.s A quell'Aritmetico que-
sto comune, che non ci è mai
conosciuto, qual è, vero dono
divino, e che anzi n'è imputato
finora all'errore a biasimo
d'ignoranza, sche prico di Geom.a
si è fondato sul numero.

Qui naturalmente deve tornar in campo
la opposizione più volte
sentata, ed è: se la dimostraz.e
dell'unico luogo, in cui deve
trovarsi la ragione del diam.o
e della circonf.a, è il postulato
nei due centri. 3.4.5.; e
15.16.17., come poi la scienza
presente assume il fondam.o
primo, e principale la posi-
zione. 9.10.11.?

La risposta decide anche più della
dimostrazione. Questa scien-
za non ammette numero soli-
tario, fuorchè il segno dell'u-
no, a indicare il tutto ord.co;
nè mai la unità aritmetica;
ed intanto non lo ammette,
in quanto il suo fondam.o
è nella ragione, come prima
del numero.

Perciò è impossibile in questa
scienza l'assegnazione di un
numero assoluto, che non
costituisca, nè più costitu-
ive ragione. Il termine s.
che appare assoluto, s'intende
e deve intendersi o somma
dei termini della ragione. 1.9.

o somma dei termini della ragione · r · 3 · / se s'intenda somma della ragione · 1 · 4 · ella ragione deve intendersi divisa in · r · 4 · 8 · , i di cui esponenti · r · 8 :: 1 · 4 ; Nè può intendersi altrimenti se la ps. di tutte le ragioni è · 1 · r ; che deve supporsi di necessità di principio assolutamte primo · Indi necessariamte deve avervi la ragione quadrupla continua · 1 · r · 4 · in prima origine, da cui ha la radice intera in · r · 4 · 8 · Ma si è dimostrato, che ogni ragione · 1 · 4 · si risolve negli esponenti · 1 · 3 · con la riduzione di · 8 · in · 6 · , ch'è di · 4 · in · 3 · con la costituzione della tripla g · d · r · 3 · 4 · 5 · 6 ; di cui è precisamte mezzo conveniente il termine · 5 · / dunque rispetto al mezzo geom.co 4 · fra · r · 8 · , la riduzione di 8 · 6 · ha convertito il mezzo geom.co 4 · ch'era triduplo di · 6 · , in sesquialtero di 6 , e però se r · 4 · 8 · si risolveva in numeri primi in · 1 · r · 4 · , è forza che r · 4 · 5 · in numeri primi, si risolva in · 1 · r · 3 · , il che vuol dire che in via di proporz.e la quadrupla è in potenza · , la tripla è in atto

1114

Sup. 9

Ma il termine 1. eva ed è comune in ciascuna, che nell'altra proporz. Adunque l'attualità in via di ragione rimane alla sola subsequialtera 2. 3. in cui si è convertita la suddupla 2. 4;

& questa è la vera scienza delle ragioni, e proporz; più volte spiegata, e qui riportata al bisogno.

Così essendo, è certo che ridotta la subquadrupla geometrica 1. 2. 4. alla subtripla aritm.co 1. 2. 3; si è ridotta alla prima di tutte le forme delle proporz. g. d. di questa scienza; e di fatto dalla forma 1. 2. 3. si ha la prima di tutte le proporzioni suddette nella tripla g. d. 2. 3. 4. 5. 6.

Spiegata la dottrina, si riporti al caso, in cui il mezzo aritm.co 4. del centro triplo, è subquadruplo di 16., mezzo aritm.co del centro corrispondente 15. 16. 17. ed il mezzo corrispondente 5. è subtriplo del mezzo aritm.co 15.

La proprietà della subquadrupla è comune, come si è dedotto, a tutti i centri fra le corrispondenti; la proprietà della subtripla fra 5. 15. è affatto unica, e singolare de' soli due termini, 5. del centro triplo

7. Luglio. 1770.

triplo, e 15. del centro corrispondente
è adunque un fatto, che fra questi
due centri si verifica la proprie-
tà universale della subquadrupla
ridotta alla proprietà singolare
della subtripla, e però le due
proprietà nel loro principio pri-
mi risolvono in 1. 2. 4., ridotto
ad 1. 2. 3.; Il che precisamte
significa, che la geometrica pro-
porzione 1. 2. 4., è convertibile
nell'aritm.ca proporz.e 1. 2. 3.

Per cogliere poi ogni difficoltà,
non si creda che si opponga
alla scienza il trovarsi nel
suo principio primo le due
proporz.i in rispetto di unità
comune fra 1. 2. 4, ed 1. 2. 3.,
e poi nelli due centri, fra
due rispetti di unità; La
subquadrupla fra 4. 16., e
la subtripla fra 5. 15.
Anzi la difficoltà si converte in
capo di scienza; Poichè altra
non sarebbe altrimenti la
scienza armonica, se i dati
materiali, e superficiali di
aritm.ca natura, non si ridu-
cessero all'arm.ca sua natura
in cui unicamte consiste la
forma, ed il centro dei dati.
Quanto si sa, e si opera nelle
comuni scienze dimostrative,
tutto è superficie; Quanto si
sa, e si opera in questa sub-
tutto è centro. Il fatto è chiaro

1116
Supl. 9

in questo caso, in cui la formola comune dal centro . 3.4.5. che diventa forma, si ha la proporz.ne 12.15.16.17.20. La azione producente il quadrato 16., che è il mezzo aritm.co, è di 4×4=16. termine solitario, che non costituisce vagione

La azione producente il mezzo arm.co. 15., è di 3×5=15. vagione formale degli estremi del centro 3.4.5; nè può mai dirsi mezzo arm.co che non sia un ritrovato della vagione di cui è mezzo arm.co; ed in conseguenza sia necessariam.te il centro essenziale della data vagione:

Veniva questo che manifesta è piena di quelle impossibili conseguenze, delle quali è piena questa scienza, allorchè non avvertita mai dai più sublimi Professori delle comuni scienze diventa possibile

3.4.5 9.10.11 15.16.17

Benchè nell'aritm.co pr. comune abbiano avuto sotto gli occhj migliaja d'anni la forma e la formola del mezzo arm.co

Lasciando i riflessi: c'è da vedere se la posizione 9.10.11, mezzano fra i due centri 3.4.5; e 15.16.17. corrisponda alle addotte dottrine. Sia il primo esame l'aritm.co delle somme

Sup. 9

3+4+5 = 12 r
9+10+11 = 30 5
15+16+17 = 48 8

delle somme · 3+4+5 = 12 ;
9+10+11 = 30 ; 15+16+17 = 48 · Offerta
le ove somme 12 · 30 · 48 , in ri
primi · r · 5 · 8 , è un fatto
che la somma mezzana che
corrisponde a · 5 · è il mezzo
aritm.co degli estremi · r · 8 ·
e che cambiando il mezzo
geometrico · 4 · nel mezzo
aritm.co 5 · , la sua azione
consiste nella costituzione di
una forma di proporz.e che
o sia semplice, o sia composta,
necessariamente deve essere di
ove termini in aritm.ca pro-
porzione ·

Questo è un fatto, che non ha bisogno
di prova, e che è piano,
e palente, perchè dipende
dall' aritmetica materialità
delle somme ·

Sia il rdo esame l'armonico
della ragione, ch'è l'esame
della essenza della cosa
poichè è fondato su i centri ·
La ragione essenzialissima
fondata nei due centri
3 · 4 · 5 ; e · 15 · 16 · 17 · si è la
ragione del diam.o alla cir-
conferenza ; e questo si
è dimostrato su i due
centri predetti, tutto è ordi-
nato a quest'unico oggetto,
ch'è il principale della scienza
del cerchio ·

Sup. 10.

Se adunque la somma di 9 · 10 · 11 ·

1114

sup. 10.

$\sqrt{\cdot 5 \cdot 6}$

$10 \cdot 16 \cdot \overline{\sqrt{25 \cdot 40}}$

$10 \cdot 16 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} \cdot 40$

$10+16+40 = 66$ $\sqrt{\ }$

$10+\sqrt{3}+40 = 73$ $\sqrt{5}$

$10+\sqrt{64}+40 = 64$ $\sqrt{8}$

proporzione mercata fra i due cerchi determina in $\sqrt{\cdot 5 \cdot 8}$ una forma di proporzione, dove necessariamte seguire che nella proporz.e dedotta da questa forma, si ovvi essenzialmte dominante quella ragione ch'è fondata nei due cerchi, i quali nel caso presente formano gli estremi di questa proporzione, che diventa molto. Nè può trovarsi alcuna difficoltà senon che la sola, ch'è insuperabile dai cerchi, i quali, o riducono alla radice la ragione degli estremi, quando è semplice, o la risburgono ai minimi termini, quando è composta di che non vi è bisogno di dottrina, perchè basta il fatto. Dedotta adunque dalla forma $\sqrt{\cdot 5 \cdot 8}$ la proporz.e g.d., sarà $10 \cdot 16 \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64} \cdot 40$. Ecco il fatto, e la dimostraz.e risulta dalle sue somme, diversificate dai suoi mezzi, arm.co, arion.co, contrarm.co, formando i detti estremi con ciascun mezzo separato; in termini primi $\sqrt{\ } \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{64}$; e si vuol dire la ragione di circonferenza fra il cerchio inscritto, ed il quadrato circoscritto ch'è $\cdot 11 \cdot 14 \cdot$ in $\sqrt{\ } \cdot \sqrt{64}$; col mezzo arion.co $\sqrt{25}$. q.e.d.

La differenza adunque delle due ragioni

6. Luglio. 1770

ragioni · 7. rr. ; e rr. 65. ~~del~~ ~~mezzo~~ ~~circolo~~ ~~e cas~~ risulterà
da questa proposiz.e consiste
nel termine · 7. come diametro
che non corrisponde figura,
ma è potenza di figura, con-
verrebbe il quadrupla in. 28.
come quadrato, che corrisponde
attualmente figura, e la p.a
azione è della dupla con-
tinua, che come ragione è
la potenziale dell'avv.o sistema
la 2da azione è delle radici
della sesquialtera, che come
ragione, è l'o attuale del sistema
Finisce poi qui la faccenda? No: vi
è di più preciso.
Sia la posizione di Eulero negli
esoremi quadrupli. Tra il pr.o
ed il 2do termine
vi sarà la ragione
del diam.o alla
circonf.a, ch'è la
ragione dei due centri
e fra il 2do ed il 3.o vi sarà
la ragione del cerchio inscritto
al quadrato circoscritto, ch'è
la ragione proveniente in
origine dalla mezzana posizione
9 · 10 · 11 · 2

1 · r · 4

100000000000 ∫. 3141592653589	400000000000 ·	ed il 2do termine
100000000000 ·	3141592653589	vi sarà la ragione
3141592653589 ·	6584076346410	del diam.o alla
r	r	circonf.a, ch'è la
differ.e 41865185307178	1716861469685	ragione dei due centri

Tolte dai dati dati termini
le differe. saranno come qui accanto
siano comparate alla ragione
4 · 5, formata dai due mezzi
del centro triplo · 3 · 4 · 5 · de' qli
4 · è in quadrupla con · 16. 5 · in triplacon.ne 15.
del 2do centro · 15 · 16 · 17 ·

11ro
sup. 10

ꝛ14 ꝛ59 ꝛ65 ꝛ3589 · 171641469 a4ro

A	S.
8566ꝛ570614ꝛ356	8544075464200
1445ꝛ5071167	8566ꝛ570614ꝛ356
6900ꝛ7537ꝛ3	
1549914460004	1770ꝛ49744

accanto de' vepri (463, 464, 465)

Qui primieramte si osservi qual sia la vagione differenziale 463 · 464 · che risulta da qsta operazione. Si sa che rispetto alla dimostraz.e d' Archime- de, diamebro 7, circonscri- o sia decchio inscritto ra, qua- drato circoscritto cb., accade ra. il punto della vera quantità il qual eccesso è [illegible] albro ina- pace di alcevare essenzialmte le due vagioni, Reniche le più prossime di cube in pochi numeri, e primi. È poi un fatto che 7 subqua- druplo di cb. è submiplo di ꝛ1 ., n.o dell' aritmetica seme inseparabilmte prossimo a ra. perchè è in diffeva di unità ma data l'aritm.a fovra ꝛ1 · ra · ꝛ3 e dedotta la dibia fovmola la proporz.e g.d. 461 · 463 · 464 · 465 · 506 ., Adunque dalla proporz.e dedotta dalla predetta fovma, si panno in precipione i due merzi arit.co 463 ., arit.co 464. Adunque la origine dell' eccesso in ꝛ1ce del diamebro 7 come submiplo di ꝛ1 è palesemte dimostrata in qsta operazione in cui essendo impossibile l'al tevaz.e da vagione differenziale 463 · 464 · sebbene si assumano

ꝛ1 · ra · ꝛ3

ꝛ1 × ꝛ1 · ꝛ1 × ꝛ3 · ꝛ1 × ra · ꝛ1 × ꝛ3

461 · 463 · 464 · 465 · 506

sup. 10

32 11.21

tutte le cifre 30 di Ludolf le quali altereranno bensì gli avanzi, ma non mai la ragione, quando la potizione della ragione 4:5 dipendeva a priori da un principio assolutamte primo, e necessario; Gli avanzi della risultata ragione differenziale 466 : 464 conducono dimostrativamte a posteriori alla ordinata, armonica divisione attuale del diametro, dipendente a priori dall'armonia naturale del cerchio.

Quando tutto ciò si verifichi, è troppo chiara la conseguenza che ne deriva, senza che l'Autore la esponga. Si venga adunque alle prove dimostrative di ciascuna parte.

sup. 9.

Che la potizione 4:5 sia necessaria a priori di necessità di principio attuale, assolutamte ed individualmte primo, tanto è vero, quanto che la dimostrazione di tale verità dipende dal principio assolutamte primo delle semplici ragioni e differenze, come prime forme a priori.

La individua semplice forma che costituisce attualmte armonico il sistema delle ragioni, si è la forma sesquiquarta 4:5, la quale in $\frac{1}{4}$. 1 . $\frac{1}{5}$ divide armonicamte la sesquiquarta $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$

indivisa, e non specificabo-
nella forma. a. b.
Come nel n.° la sussueialeva
indivisa in. a. b. è arithmeticam.te
divisa in. 4. 5. 6, indi l'Arithmetico
fisema musicale del modo minore:
così nelle frazioni la sesquial.-
tera indivisa in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$, è armonicam.te
divisa in $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$, indi l'armo-
nico fisema musicale del modo
magre;
E come l'arithm.ca determinazione
dipende nel numero dalla indivi-
duale ragione. 5. 6., così l'armo.ca
determinazione dipende nelle
frazioni dalla individuale ragione
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$.
Questo è il principio assolutam.te
primo dei due generi di magre,
e minore inuguaglità, indipenden-
te da qualunque applicazione
particolare a linea, e figure;
e però è da sapere, 2 primo luogo
è vera la natura dei due
generi predetti, la quale ha
il suo fondamento nei due
rispetti, dell'uno in se stesso,
e dell'uno fuori di se stesso
Da questo principio si rileva la
verità del detto di Platone,
che asserisce necessaria la musica
per prevenire alla scienza dell'
intelligibile primo, e vera. ed
a questa verità si applichi
l'allegoria del detto di Pitagora
che diceva di sentir l'armonia
musicale delle sfere. Lo poteva

dire

6. Luglio. 1770.

Dire se ha soputo con altrettanta
verità conoscere che le mezzane
distanze de' pianeti sono fra loro
in aritmetica proporzione.

Stabilito questo principio assoluto, ed
universale, si direnda ai principj sub-
altenni relativi alla precisa
scienza del cerchio, ed enunciati
in questa opera come prossimi
principj primi.

Primo di questi si è il fatto del
cerchio indiviso nella sua figura
O, esposto a pag. 12. principio
quanto necessariamte primo delle
Delle inscritte, e circoscritte
rettilinee regolari figure, tanto
necessariamte divisibile in aritmetica
serie razionale delle frazioni;
Cosicchè sia manifesta falsità di
fatto il dire irrazionale la linea
circolare, rispetto al principio delle
rettilinee regolari figure inscritte
e circoscritte, quanto è mani-
festa falsità di ragione il dire
che la serie aritmetica delle fraz.ni
sia irrazionale

Ne serve opporre che questa serie
è applicata ad una linea, e
irrazionale, qual'è la linea cir-
colare, perchè chiede in primo luogo
l'autore, che gli si assegni la
intrinseca irrazionalità di una
data linea, la quale non abbia
confine, e la sua estensione
e non sia specificata a qualche
natura di quantità, e la sua misura

1164
pag. 11.

sarà forse assegnabile. Il credito è parzio. sono adunque alla stessa condizione la due linea retta e circolare, intese in questo senso, che è certo assolutamte primo di quiddità, e se vi è differenza è in vantaggio della circolare, la quale tornando necessariamte in se stessa, porta seco un intrinseco principio di necessaria determinazione. Che poi dalle scienze comuni di quantità siasi trovata più facile la razional divisione della linea retta, che della circolare, questa non è ragione di principio primo, anzi può imputarsi alla mancanza di cognizione dei veri principij di quantità, di cui sono realmte prive le scienze comuni

In rdo luogo, per fare con fondamto sale opposizione, conviene prima disvuggere la dimostrazione dell'autore pubblicata in anni sono nel principio del rdo Capitolo del suo trattato di Musica, ove più dimostrato il cerchio armonicamte costituito, che la di cui figura non è altro in sostanza, che un ripieno, ed un complesso di merzi armonici infiniti

Conviene in oltre disvuggere la dimostrazione assegnata in quest'opera a pag. 41. della conversione del cerchio in se stesso denovo

(. adunq. l'autore scriveva queste cose nel 1766, ove anni prima di morire

(. Pare un complesso di merzi geometrici, non armonici poiché i semplici merzi geometrici si corpredavati con merzi armci ma che han che far qui questi dvati. nel costituire il cerchio

il sestuplo periodo, e confine
delle vagioni, e proporzioni
Senza queste due condizioni le vi
è chi prestimo di opporre irrazio-
nalità in vna linea, ed in vna
figura fondata, e dedotta da un
armonico principio primo di
determinate vagioni, e proporzi-
non può essere che un passo.
Ciò premesso, a pag. 141, e 145.
si è dimostrata la insuffici-
enza della Geometria di assegnare
la vera origine del caso del
pentagono, il qle cade precisa-
mente in $\frac{1}{5}$ fra $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ della
divisione armca circolare, ed
ivi si è dimostrata a prova
la facoltà di questa scienza
nella scoperta della sua armca
origine, fondata nella divisio-
ne della sesquialtera $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$.
il che vuol dire fondata
nella vagione sesquiquarta
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ :: 5. 4
Ivi si riveggi la esposizione, e
la dottrina; e qui si riporti
al caso delle differenze sopra
dedotte le quali si trovano
fra loro nella vagione 4. 5.
Congiunga la dottrina ivi espo-
sta con la dottrina qui sopra
proposta, e spiegata della
natura della forma 4. 5. che
è la individualmente determi-
nante armonica la sesquialtera
indivisa nella forma 2. 3. La

1126

sup. 11.

ovvero che il principio fondamentale della ripulsata vagione delle differe. in. 4.5. è lo stesso, ch'è nella deduzione dei lati delle rettilinee regolari figure, che nella qui sopra assegnata deduzione delle differenze, il che fra poco sarà manifesto in precisione, purchè si avverta, che ivi l'aggiunto termine sesquialtero al lato del quadrato in. $94\frac{8}{13}$ è in radice sesquiottava co'l termine 100000. dell'ultimo lato dell'esagono

Il rdo dei principj rebalterà relativi alla precisa scienza del vechio, ed enunciabi fondamentali, consiste nei triangoli Diagonici, la di cui esposizione, dottrina, ed influsso li è incominciato a proporre a pag. 73., e ci è a lungo proseguito. Qui si rivegga, e ben capito il tutto, si applichi alla vagione ripulsata in 4.5. dalle qui sopra dedotte differenze. Si rileverà tale, e tanta scienza, tale, e tanta precisione, che la magre non può imaginarsi.

Sup. in

Se poi vi si congiunga la individua proprietà del cenovo triplo. 3.4.5., il di cui mezzo arm^{co}. 3. è radice tripla della forma. g. de' due mezzi, 4 arit^{co}. 5. corrispondente: la scienza, e la precisione

6. luglio. 1770

precisione avviva a sorpresa, e
Salvadivendo

Basta riflettere che la detta ragione
4.5., la quale è grande integrale
del pr. triangolo Pitagorico 3.4.5.
è la producente ro. p. molti=
plica della propria forma
4×5=20., e che come 3. è al
triangolo Pitagorico 3.4.5. così
ro. è al triangolo Pitagorico
ro. gg. 101. dedotto dalla forma
g.10.11., che è la posizione
fondamentale di questa scienza
e da cui si hanno i due termini
della circonf.a cir. gg., e del
diametro in. 613., diviso in.
31. 32.

Il riassumere qui la fatica di
esporre nuovamte e congiun=
gere le posizioni, e le dottrine
indicate, non conviene all'
Autore; Conviene a chi vuole
imparare la scienza, e però,
indicate le cose totalmente
essenziali, ed intieramte
spiegate, lascio Basta all'
Autore.

L'ultimo di questi principj fonda=
mentali, ch'è l'individuo della
scienza del cerchio, gli è
l'assegnato il pr. di Archi=
mede pag. 14. nella tripla g.d. senza
senza il mezzo conoscm.to
5. Qui conviene alquanto
fermarsi, non basta il bisogno
della scienza, quanto il bisogno
d'intenderla

1168
sup. 1r

d'intendeva a dovere.

Si nobi adunque, con dibinzione, che niun uso essendovi del mezzo conboarm.co nella Geometria, di cui si è valuto Archimede p dimostrare col mezzo de' poligoni la vagione del diametro alla circonfa, risultoata in 7. cir. in circo, se bal fondamto era indispensabile all'autore la ommissione del mezzo conboarm.co per più vagioni

La 1a. si è il debito, che aveva l'autore di dimostrare la neddetta vagione con un dato comune alla propria scienza ed alla Geometria; ed è certo che la tripla g.d. r.c.s. 4.6. con i due mezzi determinati, 3. arm.co, 4. arim.co è di proporzione comune a questa scienza, ed alla Geometria; non è altrimenti comune con l'aggiunta del mezzo conboarm.co, come necessario, di cui ha bensì nella Geometria la definizione, ma non si ha nè la necessità, nè l'uso.

Di fatto chi è de' Geometri, anco più profondi, che possa pensare, non che credere, che la sola aggiunta di questo mezzo cambj realmte faccia allo subito dimostrativo? Che in forza di questa sola aggiunta, debba nascere necessariamte

hyp. 10

30 11 ag

una scienza, affatto diversa dalla Geometria? Tale è il fatto, ed è bene spiegarlo minutamente. La Geometria considera le proporz.i g.d. nel loro rapporto della quantità, provenienze dalle ragioni eguali, e però in tale considerazione non ha bisogno, che di quattro termini, il p.o de' quali sta al 2.do nella ragione del 3.o al 4.o, o il p.o al 3.o nella ragione del 2.do al 4.o. Ora ciò è il fatto della Geometria, rispetto alle proporz.i g.d., non avendo ivi luogo qualunque altra operazione di somma, di sottrazione, di mezzi determinati a specifica natura &.

Dato adunque un nuovo esplore di proporz.i g.d. di cinque termini, necessarj di necessità di principio, in tre mezzi, e due estremi, è chiaro che la geometria non ha luogo in questa proporzione, perchè non ha scienza, nè uso che di due soli mezzi, diretti ad un solo fine. Adunque è forza, che se i tre mezzi sono necessarj di necessità di principio, vi sia necessariamte la scienza di questo principio, da cui provengono, come necessarj; sia necessariamte diversa dalla Geometria nella intelligenza ed uso dei medii; ed sia necessariamte di maggior

1130

Sup-10

facoltà, perchè nei due mezzi comuni a questa scienza, ed alla Geometria, le geometriche facoltà sono comuni.

Ma aggiunto il 3°. mezzo, e ciascun mezzo essendo di se un capo di scienza, e chiaro che nei tre mezzi questa scienza ha di più le facoltà singolari del terzo mezzo e le universali provenienti dalla inseparabilità dei tre mezzi, affatto nuove alla Geometria.

Indi necessariamente altri usi, altre leggi, altri principj, altre conseguenze &.

Questo è il vero piano della cosa; e però questa scienza avendo comuni le materiali minori facoltà con la Geometria, altre le maggiori formali, ne proprie, con le quali arriva a dimostrar lo stesso in molti modi affatto ignoti alla Geom.ª (Ne è piena quest'opera) era necessario l'allegare nel principio di questa scienza quella sol portione che bastasse per sì ad una legitima, e fondabilissima dimostrazione, ma che fosse comune a ogni Geometra, perchè nel sol principio non si trovasse confuso dalla introduzione di un nuovo capo di scienza, qual'è il mezzo combinato, di cui nulla ha in potenza la Geometria.

Questa.

6. Luglio. 1770.

Questa prima ragione riguarda più l'ordine, che la sostanza benchè riguardi anco questa; Ma la 2da ragione riguarda intieramente la sostanza, ed è la seguente

Seconda ragione. In questo sistema non è possibile l'assegnazione di un n°. assoluto, ~~che non abbia~~ che non abbia relazione ad un altro numero, con cui formi ragione.

Se le ragioni sono forme a priori ed i numeri nell'abaco sono, che segni reali delle forme, troppo è chiaro, che il segno della cosa essendo necessariamente posteriore alla cosa: è impossibile l'assegnazione di un n°. solo A segno di una forma, che di propria essenza importa due termini, e però due n°., non uno.

La stessa unità aritmetica 1., come più è dimostrato a suo luogo, è necessariamente relativa al zero 0. segno reale di un comune principio primo; e se ciò è vero nel n°. in una relazione a priori, altrettanto deve esser vero nelle relazioni a posteriori. E però è impossibile che un ~~dato~~ numero qualunque non sia relativo, o a ragione o a radice, o a centro, o a proporzione &

113a

supr. 113.

bri vi è di più: ffchè non può
dirsi numero, che non sia rela
tivo in se stesso; non dandosi
numero, che non sia somma
di due addendi (la cosa è chiara
di fatto nel genere semplice) fuorchè la sola unità
come relativa ad un termine
infinito, e però in relazione
capace del merito armonico.
co. che vuol dire di un armo
nico principio assolutamente
primo; Nel qual caso il merito
armco. co. diventando il subito
armco., e però necessariamente
mancato col segno della
unità, come subito; è forza
che la data unità si converta
in $\frac{1}{2}$, divenga parte rela
tiva al subito come sua
metà, e relativa al suo
avversario, come uguale.
Ciò premesso, e rinnovato alla
memoria, ffchè altrove spie
gato; è certo che la tripla
o.d. con tutti i suoi merti
in. a. 3. 4. 5. 6., il merito
contrarmco. 5. è in se stesso
ugualmente somma di 1+4.
che di. a+3., e però rela
tivo alle due forme, qua
druplo, e sesquialtera, come
qui sopra si è più che a
sufficienza esposto, e spiegato.
Fuori di se stesso, la prima, e
principale delle sue relazioni

come somò di 2.3., e divadice
duplo di ragione col sevmine
7., come somò di 3.4. (è dimo=
svaba la dobbina di quelle
vadici a pag. 133. ivi si legga)
Essendo adunque il sevmine 5.
insepavabile in velazione di
vadice duplo dal sevmine 7.,
il quale nella tiplo assegnato
senza il mezzo convavmonico
5., si è avvivo dalla somò
dei sevmini del cenbvo 3.4.
e nella sua mebà $3\frac{1}{2}$. come
diamebvo, si è bvovabo ad
11., somò della triplo avm.co
6.3.2., come 7.22.; E' dimo=
svabivamb.e cevbo che vimane
la velazione delle vadici duple
5.7., subito che si assegnail
mezzo convavm.co 5., e che
nell'intievo cenbvo triplo 3.4.5
come vi è la pvopviebà
singolave del mezzo avm.co 3.
alla somò di 4+5=9. cosvi=
buendo la triplo; così vi è la
pvopviebà singolave del mezzo
convavm.co 5. alla somò
di 3+4=7., cosvibuendo le
vadici duple originali di
vagione.

e giacchè nò di 4.
alla somò 3+5 | 4.6::1.a

Cevbo è di fatto, che, a vogliaglio,
nè l'una, nè l'albva pvopvi=
ebà si vileva nella indefinita
seve di questi cenbvi; e ciò
se è veva la pvopviebà del mezzo
3. subtvipla della somò di 4+5=9
a vecessaria

1134
Sup. 13

è necessariamte vera la proprietà
del numero 5. duplo radicale della
primà di 3+4=7. ma la prima è
patentemte vera adunque ancor
la 2da

Trasportando adunque il diametro
3½ in cinque diametri, o sia
7.10., si cambia bensì il segno
primo nel segno 2do della
stessa ragione, ma non si cambia
nè forma, nè ragione, nè pro-
porzione; si opera essenzialmte
su lo stesso principio, e su lo
stesso dato, che è la prima
ragion duplo radicale di ragione.
Le due singolarità sopra esposte
del centro duplo. 3.4.5. si
congiungano con la terza
ugualmte singolare de' suoi
esteremi 3.5. radice di ragione
degli esteremi 2.6 :: 1.3., con-
fermandosi nuovamte che nella
indefinita serie di questi
centri l'unico di queste tre
proprietà è il centro triplo.
In tale aspetto la vera idea
della scienza del cerchio
diventa dimostrabile nella
tripla q.d. 2.3.4.5.6.
Questa idea è più chiaramente evidente
nella ordinata somma dei
cinque termini corrispondenti
la proporzione; 2+3 = 5;
3+4 = 7; 5+4 = 9. 6+5 = 11.
I due primi termini 5.7.
sono le radici della duplo;
e questa

2.3.4.5.6
2+3.3+4.4+5.5+6
5.7.9.11

9 Luglio 1770

e questo è la proprietà del mezzo conservm.o 5. che con la somma dei due mezzi 3.4. costituisce le radici duple 5.7.

In questo aspetto il termine 5. è necessariamte somma di 2.3., e non di 1.4. perche le due ragioni costituenti la somma de' loro termini le radici duple, sono la sesquialtera 2.3., la sesquiterza 3.4., e non mai la quadrupla che è il doppio della dupla.

I due ultimi termini 9.11. sono le radici della sesquialtera.

In questo aspetto il termine 5. è necessariamte somma di 1.4; e non di 2.3., perche sottratto dalla somma del 5. col 4. rispetto 9. e di 5 to 6. risulta 11., ciò nonostante rispettando dal suo duplo il termine 10. ch'è il mezzo conservm.o della dupla 9.8., e 5. essendo il suo mezzo conservm.o non cambiando natura nel suo duplo 10., è forza che 5. sia a priori la somma di 1+4., e 10. sia a priori la somma di due quadrati 1+9.

1. 4

Indi nel termine 10. ch'è il mezzo armonico della forma 9.10.11. fondamto principale della stima del cerchio, si conserva ineccepibilmte la natura conservm.a originale, in forza di cui tende, e farà sempre resa

11.36
Sup. 13

C. Sphe. 10. è contvam.co
come ne nasce da ciò
la impossibilità della
quadratura del circolo?

impossibile la precisa quadratura del cerchio; come si vuole con mano nel diam.o di Eulero, il di cui principio è in.co, e prosigue il vero aggiunti fino alle cifre. 36. Basta convertire i dati in frazioni. $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{3141592}$. $\frac{1}{3141592}$ con l'ultima cifra diversa, e la impossibilità si fa evidente.

I dati termini mezzani. 7.9. sono le radici degli estremi. 3.5. del centro triplo, e questa è la proprietà del centro triplo di aver i suoi estremi. 3.5. radici degli estremi della proporz.e di cui è centro, e di aver nella somma le proprie radici mezzane in. 7.9. fra le due radici. 5.7. della dupla, ch'è la vagione potenziale, e le radici. 9.11. della sesquialtera ch'è la vagione attuale dell'armonico ritorna circolare

3.5
in.c:a::c:b::a.b

Fin quì nella suddetta somma si è veduto l'influsso delle due proprietà del centro; di. 5.7. radici dupla, e di. 7.9. radici degli estremi. 3.5. del centro; ma non si è veduto ancora influsso alcuno della proprietà del mezzo arm.co 6. come sottriplo della somma de' mezzi $4+5=9$.

Sup. 14

Se si considera la tripla g.d., come è in fatto, il principio primo

40 11 37

del sistema delle cinque proposiz., ed in tal rispetto si considera la proprietà di 3. mezzo armonico, che è radice tripla dello stesso centro della propoz., non v'è bisogno di rilevare influsso alcuno nella ordinata somà dei termini della propoz.

Se nel centro consiste la essenza della cosa, qualunque sia, e nel centro si rileva la tripla principio primo delle proposiz., bando basta a cotal riuscita del fondamto essenziale dimostrato da questa proprietà come primo assolutamte primo, assolutamte necessario, assolutamte capo della serie del cerchio, la quale in attualità è contenuta nelle cinque propoz.

Se di queste è capo la tripla g.d., di questa è centro 3.4.5., e di questo centro il mezzo arm.co 3. è radice tripla della somà degli altri due mezzi che formano il centro: è chiaro che questa proprietà dimostra un principio triplo a priori, affatto indipendente dalle somè e posteriori dei termini della tripla g.d., e certamte anteriore alla propoz.

Altrettanto è chiaro, che se 3. nella tripla fra gli estremi 2.6. è primo

11350
pag. 14

di vadice tripla, rispetto ai due
merri. 4. 5. del proprio centro, ed
in niun modo può cambiar l'ar-
monica propria natura, è forza
che rispetto al centro non altro
posta dimostrare che l'armonica
venità in tripla potenza di forma,
e non l'aritmetica forma attuale
della tripla. 1. 2. 3. ma di ciò
dovrà trattarsi a lungo nella
metafisica di questa scienza,
e però qui basti la indicazione.
Ma non può bastare rimane ozioso
il merro arm.co 3. nell'influs-
sa potenzioni delle somme
5. 7. 9. 11. e' basti più occulto
perché è più remoto, come
esser deve, se il proprio
natura riguarda l'arm.co primo
primo, ed è chiaro che quanto
è più vicino al primo primo,
tanto è più costante delle
suddette somme.

Ciò nonostante avendo potuto
e reale il segno del suo
influsso nel benmine. 9.
delle somme, perché. 9. basta è
la somma di. 4+5. quanto è
il prodotto di vadice. 3., nè
ciò succedendo il moltiplica
nè potendo succedere negli
altri due merri. 4. 5., nè
individualmte. di se stessi, nè
congiunti fra loro, e molto
meno in qualunque altro
centro della indefinita serie

(che vuol mai dir questo? //

9. Luglio. 1770

perché

sicchè ancor questa è realmte una proprietà sola e singolare del mezzo arm.co del centro della tripla: Questo segno reale, e questa proprietà singolare basta a scoprire l'influsso, benchè remoto, del mezzo arm.co ♃. nelle somme 5.7.9.11., e la facoltà che affatto disforma, e singolare risplende nei due mezzi 4.5., costituenti la forma sesquiquarta che è l'oggetto principale di tutte queste prove, e dottrine, a cagione di esservi trovata in risplendato questa ragione fra le differenze dedotte dalla posizione di Euler, assegnata a Saggio. di questo supplemto

S'incominci adunque dalla certezza dei fatti. È certo che ♃. mezzo arm.co degli estremi tripli, è radice quadrata di 9., somma dei termini 4+5., ed è certo che questo è il fondamento essenziale del triang.o Pitagorico 3.4.5 perchè dipende dal n.o quadrato 9. diviso in 4.5.

È ugualmte certo, che 4.5. è radice di ragione di 20. e che 20. è la somma dei cinque termini della tripla 9.8.12.15.4.5.6., e che questa proprietà dei mezzi 4.5. dei centri ♃.4.5. è ugualmte

4×5=20

12+15+4+5+6=20

1140
pag. 14.

sola, e singolare di questo centro, ricchè sia ommiamente inseparabile dalle altre proprietà di questo centro, ugualmente sole e singolari in tutta la indefinita serie dei centri di tali proposiz.i

Ciò stabilito di fatto, la conseg.a si è che la vagione .4.5. altri nei suoi termini, due rispett.i l'uno passivo di somma ing.g, l'altro attivo di moltiplica in co.; e che siccome il mezzo arm.co .3. dimostrando la forma della propos.a, dimostra il principio a priori ch'è il potenziale, e nella propria moltiplica dimostra passivo il prodotto .9. Così la vagione innovale .4.5., passiva nella somma .9. de' suoi termini, ed uguale al prodotto .9., nell'attività della propria moltiplica di .4×5=co., dimostra il principio a posteriori, ch'è l'attuale nella propos.a formata .1.3.4.5.6. de' di cui termini la somma è=co.

Questo stato discorso apparisce fisico, e fuor di dubbio, che la cosa, su cui si discorre è positiva, e reale di fatto. È un fatto che il mezzo arm.co .3. è radice quadrata dig.a somma dei due mezzi .4+5. È un fatto che il mezzo conarm.co .5.

con la somma .7. de' merri
3.4. coffibuisce le vadici
duple .5.7. le quali ni hanno
ugualm.te ed in primo luogo
nella ordinata somma dei
nomini della propor.e
in .5.7.9.11., nei quali ni ha
ugualm.te il nomine .9. dal
merro arm.o .3. come radice qua-
drata.

È un fatto di nozione comune,
che i due merri .3. arm.o, 4.
arm.o moltiplicati fra
loro producono quello
gli esponenti .12. facoltà
ed azione comune in genere
a tutte le proporzioni q.d.
coffibuisce in .4. nomini.
Ma ugualm.te è un fatto che in
questa propor.e di cinque
nomini, stante il cenno
coffibuito, non da due, ma
da tre merri, ni è una facoltà,
ed azione affatto incognita
alla scienza comune delle
ragioni, e proporzioni, e benchè
nota a questa scienza, ciò
nonostante è solo, e singolare
al cenno triplo .3.4.5.

Questa è che il nomine .12. pro-
dotto dalla moltiplica fra
loro dei due merri, e de due
esponenti, è ugualm.te il riflesso
della somma dei tre merri (3+4+5
Se a matematico rigore si vaglia
a questa proprietà de' due merri .3.4.

1142
sup. 15

la proprietà de' due mezzi 4.5.
il di cui prodotto 20. s'incontra
con la somma 20. de' cinque
termini della proporzione, come
il prodotto 12. di 3×4. s'incontra
con la somma 12. dei tre termini
del cenovo, si troverà che
l'apparente metafisico discorso
è positivo, e reale quanto
il fatto; e che la facoltà, e la
azione della moltiplica dei
due termini 4×5., rispetto alla
somma de' cinque termini della
proporzione, è uguale alla fa-
coltà, ed azione della moltiplica
de' due mezzi 3×4., rispetto
alla somma dei tre termini del
cenovo.
Rimane a dire della ragione 4.5.
risultata dalle differenze sopra
dedotte a cavare in digno replauso
Questa si è che nella tripla g.d.
12.15.4.5.6. separati i termi-
ni corrispondenti la tripla ar-
monica 6.3.2., de' quali la somma
è = 11., rimangono i due ter-
mini 4.5. de' quali la somma
è = 9.
Se adunque la somma 7. dei due
termini 3.4. del cenovo co-
munque di quantità, ha neces-
saria sistematica relazione ad
11., somma dei termini della
tripla armonica, a giusto
voglio è forza che la somma
9. de' due termini 4.5. del
cenovo parimente abbia questa
proporzione

9. Luglio 1770

proporzione, abbia necessaria rispettiva relazione allo stesso termine 11 nello stesso rispetto di somma de' termini della triplo armonica.

Di fatto, se il centro è costituito, non da due, ma da tre termini, e la somma ordinata de' due mezzi 3.4 si trova effettivamente relativa al termine 11: In forza di sistema di centro deve necessariamente trovarsi relativa allo stesso termine anche la somma ordinata degli altri due 4.5, nè può esservi altra differenza, che di rispetto diverso di ragione.

Realmente non vi è bisogno di affaccendarsi molto in tal prova; Perchè se la somma dei tre termini del centro, sesquialtera della somma de' due estremi di tali proporz., è una proprietà universale del n° in genere, di queste proporzioni in specie: è pur cosa evidente che tutto il centro è relativo agli estremi; e se il tutto, adunque, a ragguaglio, anche le parti, e ciò in genere. Ma poi in specie, questa verità è individualmente dimostrata a priori dai due termini 9.11. radici originali della sesquialtera, che è la ragione di proprietà universale di queste proporzioni,

$3+4+5 = 12$
$2+6 = 8$

1144
Fasc. 15

e che patentemte dimostra la sua nabieva circolare nella conversione della forma sesquialtera, la quale nella somā dei due mezzi del cevovo e nella somā dei due estremi della proporzione, si ha in avmto rispetto :: 3.a., e nella somā de' due mezzi avmto, e covbravmto, e nella forma de' tre cevmini vezzidui, che formano sempre un'aritmetica proporzione, si ha in aritmto rispetto :: a.5.

3+5=8
1+4+5=10

Ugualmte questa verità è dimostrata a posteriori nelle somē 5.7.9.11. perchè la vazione, che risulta dalla somā 11. de' tre cevmini della triplo armonica 6.3.a., e dalla somā 9. de' due mezzi 4.5., è la stessa che risulta nelle due somme di 4+5=9, e di 5+6=11., ed è la somā de' cevmini della forma originale sesquialtera 4.5.6.

È forza adunque conchiudere, che se rispetto alla scienza comune delle vazioni, e proporzioni il cevovo di qualunque, costituito dai due mezzi della proporzione, specifica la proporzione di 4 cevmini: Nella vera scienza delle vazioni, e proporzioni, essendo comune il cevovo de' due mezzi delle

delle proporzioni di quattro termini, ancor al centro dei due mezzi di questa proporz.ne dei due mezzi, aritm.co, ed armo.co; sia poi singolare di questa scienza, il centro formato dai due mezzi aritm.co e contraim.co sia in ogni altro rispetto, che di uguaglianza di ragioni, e di cambio di prodotto; ma specifichi la forma delle proporzioni di cinque termini, dirigi & proprietà universale nella sequela seq. n. 3;

& come il centro comune alle due scienze, nel suo rispetto è centro di sistema di proporz.ne così il centro particolare di questa scienza, sia eguali.ne nel proprio rispetto, centro di sistema di proporz.ne

Questa è la legittima conclusione, che il fatto, o dimostrazione deve stabilirsi per la ragione 4. 5., risultava dalle diffe.ze dedotte dalla porzione di Ceulen 3141592 porta mezzana fra gli estremi quadrupli. 1000000 & 4000000 &., estremi di principio duplo continuo, che in concreto è il precito principio potenziale 1. c. 4., da doversi attualizzare nella forma 1. a. 3. sottraendo la sequenza dall'estremo 4; e riportandola nel mezzo, relativa a. a. in. $1\frac{1}{n}$; e con ciò costituendo

1140
sup. 15

recettamente la tripla g. d. 1. 1½. a. 2.
in numeri interi. 2. 3. 4. 6
di facia rigorosamente il conto in
tutta l'opera, e si troverà, che
questa è la sostanza, e l'epilogo
di quanto vi si contiene, rispetto
ai principj fondamentali di
questa scienza
se poi si chiegga qual sia la essenziale
distintiva facoltà della sesqui-
quarta. 4. 5. di cui non solamente
meriti di esser parte sostan-
ziale del cerchio tripla. 3. 4. 5.
insieme con la sesquiterza
3. 4. sottratta dall'esatto
quadruplo, ma di essere in altre
disposta, come parte contribuen-
te di nuova scienza di
ragioni, e proporz.ni, a confron-
to della parte 3. 4. del cerchio
che è proprio, ti dirò questa
scienza, che della scienza comune
delle ragioni, e proporzioni,
sicchè sia forza concludere,
che nelle due ragioni contribu-
tive del cerchio, sesquiterza
3. 4; e sesquiquarta. 4. 5., si
trovi facoltà molto maggiore
nella sesquiquarta:
Ecco in ripetta il fatto, la dimos-
trazione, e la dottrina.
sup. 16
Il fatto è chiaro nella comparazione
delle due ragioni sesquiterza,
e sesquiquarta alla ragione
(qualunque) di cerchio inscritto
a quadrato circoscritto. questa ragione

A questa ragione è molto più
prossima nel meno la sesqui=
quarta, che nel più la sesqui=
terza. Questa eccede di $\frac{1}{120}$ in
circa; quella manca di $\frac{1}{54}$
in circa.

Nell'opera si è dimostrato che
nel centro. 15. 16 degli estremi
1a. 2o :: 3. 5. deve necessa=
riamte. ovovarsi chiusa fra
la posizione del quadrato
circoscritto, rispetto a. 1a. cer=
chio inscritto, fra la posizione
di cerchio inscritto, rispetto all
estremo 2o; quadrato circo=
scritto; Perchè il centro. 15. 16.
della proporz. 1a. 15. 16. 2o.
è compreso dalle due
ragioni sesquiterza, e sesqui=
quarta, rispetto agli estremi
1a. 2o.

1a. 16 :: 3. 4
1a. 15 :: 4. 5
15. 2o :: 3. 4
16. 2o :: 4. 5

Di fatto la circonfa. di Cerlen
3,14159 &, divisa 9 nebà in
157079 & si ovova chiusa
nel più, e nel meno fra
15. 16. con i zero aggiunti a
ragguaglio; e questo, ch'è
fatto, basta al bisogno della
prova.

Ma troppo vi è di più. Il rapporto
di cerchio inscritto, che già de=
terminato da. 1a. con l'aggiunta
di quanti zero si richieggono
al bisogno; corrisponde il quadra=
to circoscritto. 1&7847460 &
con la differa. della unità nella

ultima cifra

1146
sup. 16

ultima cifra in cifre-co., e però non è possibile alterazione alcuna sostanziale della ragione

del rapporto di co. quadrato circoscritto (aggiungendo ugualmente i zero a ragguaglio) corrisponde il cerchio inscritto 1570796326 che è la metà della porzione di Ceulen 3141592653

Ciò posta la propos. 15.16.co. con i zero aggiunti, e con due zeri chiusi nel centro 15.16. trovò la seguente

15. co
1co000000000 : 1500000000 :: 1570796326 : 1570796326 : 1600000000. co000000000
+ cerchio inscritto — quadrato circoscritto — cerchio inscritto — quadrato circoscritto

È un fatto che la ragione immediatamente indicata è la ragione 35.36. la quale fornia il centro delle radici duple 5.7. ridotte a proporz. g.d.; e che la molto più prossimamente indicata di è la ragione 71.73., la quale nasce dalla somma dei due mezzi 35.36.37. la prima ragione risulta in differenza prossima di 3548 . 3547 in circa; la seconda di 1co6a . 1co6b in circa

5 . 7
5 . 6 . 7
5x6 . 5x7 . 6x6 . 6x7
30 . 35 . 36 . 42
37

35 + 36 = 71
36 + 37 = 73

Nè all'una, nè all'altra delle due ragioni differenziali arrivando i quadrati delle due suddette ragioni, questo è il segno dimostrativo della loro natura univoca alla natura della ragione, formata dai due zeri chiusi nel centro . 15.16.

La indicazione

Sup: 16.

la indicazione essendo dimostrativa, questa è una evidentissima prova della nouva circolare, che ha il suo principio e fine nella duplà, e nelle sue radici denovo il istesso confine delle ragioni, e proporzioni, come si è dimostrato nell'opera. Ma ancor qui si chiederà cosa abbia a fare questa prova con la ragione .4.5., oggetto principale delle prove.

Si risponde, che tanto appartiene alla proposta prova, quanto gli esempi .35.37. del denovo .35.36.37. sono le radici delle radici della ragione .4.5., e si dimostra. I due numeri .35.37., numeri impari, e però radici, si dividano, cioè 35. in .17.18.; e 37. in .18.19. sono adunque radici della ragione .17.19. Ma ancor questi sono impari, e però radici. Adunque si dividano, 17. in .8.9; e .19. in 9.10. sono adunque radici della ragione 8.10 :: 4.5. Adunque 35.37. sono le radici delle radici di .4.5., il che si doveva dimostrare.

35 . 37
17.18 . 18.19
17.19
8.9 9.10
8.10 :: 4.5

Qui si scuopre il capo di scienza fondato nel mezzo constante, ed il legame fra loro de' cenni rispettivi delle proporzioni, e con ciò si conferma la essenziale

1150
sup. 16

recessità di questo doppio mezzo
e la ineguale costruzione de'
suoni. Il fatto è chiaro.
Il centro formato dai due mezzi
35. 36. ch'è di proporzione conviene
riguarda i tabi estremi 30. 40
nella uguaglianza delle ragioni,
e del prodotto, ma nulla più.
Il centro formato dai due
mezzi. 35. 36. 37. rispetto alla
vera scienza delle ragioni, e pro-
porzioni riguarda ne' suoi
estremi. 35. 37. gli estremi
30. 42. della proporzione, non
già della uguaglianza delle ragioni
e del prodotto, ma unicamte
nella uguaglianza delle differen-
ze inverse.

30. 35. 42
5 7

30. 37. 42
7 5

Questo è il mio principio asso-
lutamte primo, non potendosi
dare mezzo armonico attuale
che non sia il prodotto dei
termini della ragione, di cui
è il mezzo; nè potendo attual-
mente separarsi dal mezzo
armonico il mezzo contrarmo.
nello stesso senso, in cui non
può attualmte separarsi la
sostanza dalla sua forma.
Questo è a priori la essenza dei
due mezzi reddetti, riguardo
alla proporzione, di cui sono
mezzi, e questa è la loro
facoltà originale dentro il
confine della loro proporzione
ma in tutte le proporzioni che
dipendono dagli estremi impari
della forma

9. Luglio - 1770

sup. 16.

47 11 51

delle forme . 1. 2. 3 ; 3. 4. 5 ;
5. 6. 7. e risultano necessaria-
mente impari i due mezzi
armonico, e contrarmo., recipro-
camte conservano la natura
degl' impari, ch'è natura di
radici di ragione : sono recipro-
camte radici della ragione for-
mata dagli estremi pari
prossimi in differa di unità.
Nel centro triplo . 3. 4. 5. gli
estremi . 3. 5. radici della ragio-
ne . 2. 6 :: 1. 3 ; Nel centro
15. 16. 17. della reciproca prima
terza . 12. 20 . gli estremi,
15. 17. radici della ragione
14. 18 :: 7. 9 ., nel centro
35. 36. 37. della reciproca
quinta . 30. 42 . gli estremi;
35. 37. radici della ragione
34. 38 :: 17. 19. &

2. 4. 5	3. 5	radici di 2. 6 :: 1. 3
15. 16. 17	15. 17	14. 18 :: 7. 9
35. 36. 37	35. 37	34. 38 :: 17. 19

Non così nelle forme di n°
pari . 2. 3. 4 ; 4. 5. 6 &, perchè
gli estremi . 2. 4 ; 4. 6. essendo
pari, originalmente sono . 1. 2.
2. 3. , forme semplici, e
prime di ragione a differa
1.

Questo è il fondam°. della mas-
sima delle dimostrazioni, di
far toccar con mano la
priorità di origine, e di natura
dei due mezzi, arm°. e con-
trarm°., rispetto al mezzo
aritmetico, nello stretto senso,
in cui ammetti i due metafisici principj
di forma

sup. 17.

1157
sup. 17

di forma, e di sostanza, è forza intendersi primi di origine, e di natura del fisico principio dé corpi. Ecco la evidenza dimostraz.ne
Data la forma degli stromenti por. 2.3.4. che nel ispecie a priori di tutte le forme, impari, e pari 1.3; 2.4; 3.5; 4.6. &c deve intendersi, ed è astratta, ed il cui mezzo aritm.co si ha, non di se stesso, ma dalla somma dei termini, divisa p la differ.a 2. della forma, il che vuol dire che si ha a posteriori; p che è forza supporre la forma, e la somma dei tre termini: Data, dico, la forma 2.3.4., da questa p la solita formola si ha la dupla g.d. 6.8.9.10.12.
In questi cinque termini non vi essendo altro impari che il mezzo aritm.co 9, è un fatto che i quattro pari. 6.8.10.12 si risolvono no in. 3.4.5.6, numeri affatto primi dell'aritmetico serie p differ.a di unità ch'è il suo principio affatto primo, non ammettendo fra di è un fatto, e dimostraz.e che 3.4.5.6. è proporz.e; p che ammette i due mezzi, aritm.co 4., contr.o aritm.co 5., ma è proporz.e non di uguaglianza di ragioni, e di prodotto, ma di uguaglianza di differenze, che vuol dire della essenziale natura dé mezzi

sup. 17

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{\frac{3 \cdot 4 \cdot 6}{1\,a}} \qquad \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{a\ 1}$$

48 1153

contenuta nella loro definizione
ed le differ.e uguali, ma in-
verse in $3 : 4 :: \frac{6}{a}$; ed in $3 \cdot 5 \cdot 6$
e però la p.a armonica, e la
contrarm.a proporzione
è un fatto e dimostraz.e, che in
tal sorte di propor.e non ha,
nè può aver luogo il mezzo
aritm.co g., perche o converrebbe
dividerlo a metà in $\cdot 4\frac{1}{a}\cdot$, e
questo è assurdo contro il prin-
cipio della scienza, che non
ammette frazioni; o conver-
rebbe raddoppiare i termini $\cdot 3.4.5.6.$
in $\cdot 6.8.10.12$ ed dar luogo
al mezzo aritm.co g. fra $\cdot 8.10.$;
ed in tal caso è chiaro, che
g. è somma de' due mezzi
$4.5.$, che è posteriore ai
due mezzi de' quali è somma.
È adunque dimostrativam.te
certa la priorità di origine
e di natura de' due mezzi
arm.co e contrarm.co, rispetto
al mezzo aritmetico.
Vi è certo l'opposta dimostraz.e
in contrario nella posizione
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot$ i cui estremi in dupla
sono incapaci di altro mezzo
che dell'aritm.co $3.$ ed è certo
di fatto che la posizione $\cdot 2.3.4.$
è anteriore alla posizione
$3.4.5.6.$ in qualunque aritm.
rispetto.
La dimostraz.e in apparenza è vera

1154
pag. 17

ma è falsa in sostanza.
In pr. luogo le forme universali degl' impari, e pari sono per propria intrinseca natura indivisibili a priori; ed è ben facile il capirlo; perchè la prop. 1. cr. deve essere forma impari, come lo sarà, se vi si supponga a priori il merro c. ch' è pari: se n. 4. deve essere forma pari, come lo sarà, se vi s'inserponga il merro cr. impari. La implicanza in termini è chiara e però come serie di ragioni costituite dai numeri impari e pari, è serie di ragioni indivisibili, a priori.
In 2do luogo è certissimo che vi sono le forme reali, composte di tre termini 1. n. cr, n. cr. 4; e le quali sono le vere, e legittime forme delle proposz. g. d. di questa scienza la primieramente conviene riflettere, ch' è forza supporre la forma 1. cr., indivisa a priori, altrimti non può essere forma impari.
Poi la pr. azione essenziale di queste forme impari, e pari come indivisibili a priori si è la costituzione de' due merri avmco e contravarmonico della indefinita serie delle proposz. g. d. di questa scienza, mediamte del merro avmco moltiplicando

10. luglio 1770

moltiplicando fra loro i due
termini della forma; media-
tante il mezzo conbravm.co,
aggiungendo al prodotto la
differ.a n. delle forme.

1×3=3. avm.co; n+3=5. conbravm.co di n.3.4.5.6 tripla
n×4=8. avm.co; 4+n=10. conbravm.co di 6.8.9.10.12 tripla
3×5=15. avm.co; 15+n=17. conbravm.co di 12.15.16.17.20 tripla

Ecco la dimostraz.e più chiara
del sole.

E qui ove in niun modo è
possibile il dedurre dalle sole
forme il mezzo aritm.co (se si
eccetui la sola forma tripla
1.3., i di cui termini sommati
in.4. costituiscono il mezzo
aritm.co 4. della tripla g.d.
n.3.4.5.6., e questa aurea
proprietà sola e singolare
della tripla) vi è luogo a
rispondere contro la decisione
della priorità di origine, e di
natura de' due mezzi avm.co e
conbravm.co, rispetto al mezzo
aritmetico?

Nè vi è, nè vi sarà mai, ch'è
se nelle forme impari si veri-
fica, che dalla somma de' loro
termini si ha il mezzo aritm.co
rispettivo alla proporz.e della
forma; di.4. somma di.1.3.
mezzo aritm.co degli estremi
n.6. della rispettiva proporz.;
di.8. somma di.3.5. ma du-
plicato in.16., mezzo aritm.co
degli estremi.12.20. della
rispettiva proporz.; di.12.
somma di.5.7; ma triplicato in
36., mezzo aritmetico degli estremi

1130
sup. 17

30. 4a. della rispettiva proporz.
Oltrechè questa non è deduzione
del mezzo aritm.co, che bisogna
si abbia dalla semplice forma
impari, fuorchè la prima, ché
bisogna in altre introdurre un
altro principio ch'è la molti-
plica delle somè & c.a aritm.ca
serie 1. 2. 3 &c: Non si verifica
poi nelle forme di n.o pari,
nelle quali non vi è modo
veruno intrinsecamte annesso
alla forma, per dedurre il mezzo
aritmetico.

È forza adunque aggiungere il
mezzo pari 2. fra gl'impari 1. 3;
e l'impari 3. fra i pari 2. 4. &
i quali mezzi si hanno tutti
dalla somma de' due termini
della semplice forma, dividen-
do la somma & la differ.a a.
della forma; e con ciò si co-
stituisce in tre termini la forma
composta 1. 2. 3; 2. 3. 4; 3. 4. 5.
& la deduzione dei tre mezzi
e degli estremi di queste pro-
porzioni g. d., la qual forma
come semplice, ed indivisibile
in due termini ha servito ana-
logamente pel suo principio
primo & la dimostrativa
deduzione dei due mezzi, arm.a
e contrarm.a

la dimostraz.e non può essere più
evidente; la esposizione della
dottrina non può esser più
chiara, la conseguenza non può

essere più significante, ſchè fa
toccar con mano, che ciaſcun
merſo è di ſe capo di ſuerta,
coſicchè ciaſcuna ſi intitola dal
ſuo merſo riſpettivo: la geome-
trica dal merſo geometrico;
l'aritm.ca dal merſo aritmetico.

sup. 14. Intanto ſi raccolga il frutto della
dimoſtraz.e, ed è la origine, e
natura dei due termini 4.3.
C'uno merſo arit.co, l'altro
contrarm.co de' due eſtremi
3.6. Che 3.4.5.6. ſia propor.e
è forza concederlo, ſchè in ſe
rinchiude due merſi dimoſ-
trabi ſecondo la definiz.e comune.
Che l'oggetto di queſta pro-
porzione non ſia la eguaglianza
delle ragioni, e de' prodotti
di moltiplica, come è l'oggetto
delle comuni proporzioni q.d.
ſia la eguaglianza delle
ſomme de' due merſi, e de'
due eſtremi, è un fatto,
ſchè nella propor.e 3.4.5.6
ſi 3+6=4+5. Nella propor.e
10.12.13.15; 10+15=12+13.
il che non ſi verifica, nè
può verificarſi in modo
veruno nelle proporz.i che
hanno di oggetto la eguaglianza
delle ragioni, e del prodotto.
Che queſta proprietà ſia uni-
verſale di quattro numeri
qualunque, purchè diſpoſti
di differ.e ordinate, è un fatto

10.12.15.16.30
10.12. 13.15

1.526

sup. 16

3 · 4 · 5 · 6 ; 3+6=9=4+5

1 1 1

r 1+r=3

di nozione comune

Ma che la somma dei due mezzi, e de' due estremi, oltre di esser uguale, sia sempre un no. quadrato, e la somma delle differe. sia sempre la sua radice: questa è proprietà unica, e singolare di queste proporzioni. Ecco il fatto. di 3.4.5.6. somma de' mezzi e degli estremi = 9; delle differe. somma 1+1+1=3, d'a= bq. della proporz.e 10.15.13.15. somma de' mezzi e degli estremi = 25. somma delle differe. = r+1+r=5=√25

Che da questo verità di fatto, fondata su le due singolari proprietà di tali proporz.i si scopra, e corollario il famoso arcano di Pitagora sul n°. 7. come n°. divino, ecco in fatto lo scoprirà. Si assegnino a serie le differe. dedotte da sei proporz.i di questa specie, corrispondenti al sestuplo esterno delle forme, ed al sestuplo con fine di quelle proporz.i dentro cui si progetto, e ritratto si rivoglie in se stesso il cerchio.

6 · 8 · 9 · 10 · 12
20 · 24 · 25 · 26 · 30
42 · 48 · 49 · 50 · 56
72 · 80 · 81 · 82 · 90
110 · 120 · 121 · 122 · 132
156 · 168 · 169 · 170 · 182

proporz.i in serie	differe. in serie	somma
3 · 4 · 5 · 6	1 · 1 · 1	3
10 · 12 · 13 · 15	2 · 1 · 2	5
21 · 24 · 25 · 28	3 · 1 · 3	7
36 · 40 · 41 · 45	4 · 1 · 4	9
55 · 60 · 61 · 66	5 · 1 · 5	11
78 · 84 · 85 · 91	6 · 1 · 6	13

Qui si osservi che le tre colonne delle differe. incominciano tutte dalla unità, che vuol dire da un principio affatto primo

di numero

10 luglio 1770

di numero effettivo, e che la colonna delle loro somē, la quale procede d gl' impari con la differ.a 2., incominciando dall' impari 3., necessariamte suppone il suo principio p.o nella unità, la qle essendo principio della serie degl' impari, necessariamte deve sovrapporsi al 3., altrimbi non può essere principio. Ma dovendo essere un tutto della somma nella unità sovrapposta, è chiaro che questa unità non può aver luogo nelle tre colonne delle differ.e, che unicamte sopra la colonna delle unità; altrimenti non forma ordine, ma anzi distrugge le due serie delle due colonne laterali, se li sovraponga alle medme, le quali nè ammettono, nè possono ammettere la unità sopra quella unità, ch'è il principio affatto primo della loro serie; Ma è forza l'assegnarla nelle differe che è il necessario principio della serie delle loro somme. Adunque necessariamte deve assegnarsi nella colonna delle unità, come qui accanto. Dedotte le somme de' termini di ciascuna colonna, si trova nelle due laterali la somā 21.

differenze	somme
0. 1. 0	1
1. 1. 1	3
2. 1. 2	5
3. 1. 3	7
4. 1. 4	9
5. 1. 5	11
6. 1. 6	13
21. 7. 21	49

1100
Sup. 18

nella mezzana la somma 7,
nella colonna delle somme la
somma 49.

Se qui si vogliano decifrare tutti
i misterj contenuti nella pianta
di questa figura, la cosa
va all'infinito. Presentemente
si scoprivanno gli arcani
al bisogno attuale; nella
metafisica si scoprivanno i
principali, quanto sovprendenti,
altrettanto positivi, e ben
lontani dal fanatismo inspi-
rato a Pitagora, ed a Platone
su la intelligenza del numero,
come dono divino. Si venga al
fatto.

La serie delle due colonne
laterali essendo la stessa,
le due loro somme, in
rapporto di ragione, non
devono valutarsi, che un
termine solo, e reale.
Con ciò i tre termini 7. 21. 49.
sono specificati a rapporto
di ragione 7. 21 :: 1. 3., e ra-
dice di 49.; C. 21. 49 :: 3. 7
a questa è la materialità
della pianta.

Sup. 19

Ma entrando nella sua sostanza
si scopre il legitimo corollario
della pianta dimostrativam.te
fondata su le differ.e, che
vuol dire, su di un principio
eminentem.te primo, che
oltre le sei unità della colonna

mezzana, relative alle due colonne laterali, vi è, e deve esservi una pª unità, necessariamte sola, necessariamte indipendente dalle sei unità, necessariamte principio anteriore a qual si voglia principio, che di serie incominci dalla unità. Questa non è impostura, o fanatismo, è un fatto sotto gli occhj. ma in dal caso la posizione diventa una ragione fra la unità solitaria, e le sei della stessa colonna, come relative alle colonne laterali, e questa ragione si determina :: 1.6.

Adunque fuori, e sopra quel settuplo sistema delle forme dimostrato dal nº. 6., dal qual sistema si ha la deficienza del cerchio, e dentro cui è confinato il cerchio di prospetto, e ragguaglio, vi è una unità affatto indipendente dal nº. 6., benchè sia il recettacolo, ed unico suo principio.

Ma (dicono Diagora, e Platone) il nº., e molto più le ragioni, le proporzioni, le differenze, delle quali è segno il nº., sono entità positive, e reali, non

1162

sup. 19

umane disegnazioni, ed entità unicamte esistenti nell'umano intelletto, da cui falsamte si credono ideate, e concrete. Adunque (conchiudono) la pa unità, ch'è sola, ch'è indipendente, ch'è principio unico, e necessario delle altre, non può essere che l'ente supremo di tutti gli enti, adunque dio.

Ma (seguono) in questa piana si opera la somma, e la somma delle unità, che include la suprema è = 7. Adunq; (conchiudono) il nº 7. è il nº. divino

che il nº (e il consegg. le vagioni, proporz. e differe) siano entità reali, lo sono tanto, al dir di Platone, quanto lo sono i pochi tre principj universali, lo stesso, il divertio, e la sottrazione. Quando adunq; sia dimostrato, che questi tre principj di Platone sono veri, e positivi principj universali, e che il nº. è una entità positiva, e reale, quanto i nedetti principj, resta ad esaminare il ragionicinio di que' Filosofi.

Si vogliano ora osservare alcune proprietà della serie sovra esposta, quelle cioè che servono a dimostrar, e spiegare la origine la natura, e l'influsso della

vi vuol altro che numeri, e serie di unità, nate da proporz. che non son proporz. E' O audacia!

10. Luglio. 1770

ragione &c.

pag. 69

Della ragione 4. 5. ch'è l'oggetto principale

Prima di tutto si è la somma delle unità della colonna mezzana, ordinatamte sommando ſ linea ſpendicolare le unità, ed a confronto assegnando con l'ordine stesso le some de' termini laterali delle unità sarà adunque la serie delle some delle unità ſ e de' ſpi laterali come qui accanto qui si ha di mostrabilmente e somma la serie degli esponenti delle proporz.li g. d. di questa scienza nella 2da colonna delle some de' termini laterali, e sono . 2. 6. 12. 20 ſ di che con nuova dimostrazione si ha la conferma nella somma de' due termini di riscontro delle due colonne la somma di 2+12=4 . è il quadrato della tripla g.d. 2. 3. 4. 5. 6. La somma di 3+6=9. è il quadrato della duplata g.d. 6. 8. 9. 10. 12 la somma di 4+12=16. è il quadrato della sesquipar.a 3.a g.d. 12. 15. 16. 17. 20. la somma di 5+20=25. è il quadrato della sesquial.a g.d. 20. 24. 25. 26. 30 la somma di 6+30=36 è il quadrato della sesquipar.a 5.a g.d. 30. 35. 36. 37. 42 la somma di 7+42=49 è il quadrato della sesquia.a g.d. 42. 48. 49. 50. 56

Nè più regolarsi la operazione

delle unità somme	de' termini laterali	somma
1 . 1	0 . 0	0
1 . 2	1 . 1	2
1 . 3	2 . 2	6
1 . 4	3 . 3	12
1 . 5	4 . 4	20
1 . 6	5 . 5	30
1 . 7	6 . 6	42

generazione semplice

1 . 0
2 . 2 :: 1 . 1
3 . 6 :: 1 . 2
4 . 12 :: 1 . 3
5 . 20 :: 1 . 4
6 . 30 :: 1 . 5
7 . 42 :: 1 . 6

1 0
2 + 2 = 4 | 2 . 3 . 4 . 5 . 6
3 + 6 = 9 | 6 . 8 . 9 . 10 . 12
4 + 12 = 16 | 12 . 15 . 16 . 17 . 20
5 + 20 = 25 | 20 . 24 . 25 . 26 . 30
6 + 30 = 36 | 30 . 35 . 36 . 37 . 42
7 + 42 = 49 | 42 . 48 . 49 . 50 . 56

1164

sup. 19

	delle unità	de' cost. ni	genere primo multiplic.
0 . 1 . 0			
1 . 1 . 1	1 . 1	::	1 . 1
2 . 1 . 2	2 . 6	::	1 . 3
3 . 1 . 3	3 . 12	::	1 . 4
4 . 1 . 4	4 . 20	::	1 . 5
5 . 1 . 5	5 . 30	::	1 . 6
6 . 1 . 6	6 . 42	::	1 . 7

1+2 = 3
2+6 = 8
3+12 = 15
4+20 = 20
5+30 = 35
6+42 = 48

Delle somme, come dimostrativa; Perchè ommettendo la unità suprema, ad incominciando la somma dalla seconda unità mezzana fra le due laterali, saranno le due somme a confronto, come qui accanto

Sommando, come sopra i due termini di riscontro, la somma di 1+2 = 3. è il mezzo armonico della tripla g.d. di cui il quadrato 4. è il mezzo aritm.co

la somma di 2+6 = 8 è il mezzo armo. della dupla g.d., di cui il quadrato 9. è il mezzo aritm.co

la somma di 3+12 = 15. è il mezzo armonico della replicata 2.a 3.a g.d. di cui il quadrato 16. è il mezzo aritm.co g.

Adunque in qualsivoglia rispetto la operaz.e fin somma in questa figura, è dimostrativa in genere, in specie, in individuo de' principj primi, ed universali di questa scienza

Ciò dimostrato, si prosiegua la operaz.e con le somme totali delle due serie rispettive

sup. 20

serie p.a delle somme

delle unità	termini laterali	quadrati
1		1
2	2	4
3	6	9
4	12	16
5	20	25
6	30	36
7	42	49
7 . 28	112	140
4	16	20
1 .	4	5

serie 2.da delle somme delle unità, termini laterali, mezzi armo.ci

1	2	3
2	6	8
3	12	15
4	20	24
5	30	35
6	42	48
7 . 21	112	133
3	16	19

1 . 4 . 5 | 3 . 16 . 19

Sup.to

Ecco adunque nei tre termini 1.4.5. individualmente dimostrata in 1.4. la reciproca 10000 y . 40000 p. assegnata a carte. 10. di questo supplem.to per la deduzione delle differenze della interpolata porzione di Eulero 141592 ; e la reciproca 4.5. in cui si sono trovate fra loro le dedotte differenze

Il pretendere dimostrazione più precisa, e più universale di questa, si crede dall'Autore parzia espresso. Ho innanzi .

I tre termini . 1 . 4 . 5 . essendo dedotti dalla serie, che si risolve o torna in quadrati le devono seguire la propria natura , non può esser la loro somma che di 1. per la testa , e di 4+5. somati in g. poche . 1 . g . sono numeri quadrati . Ecco adunque in . 1 . ed in g . il principio ed il fine dell' intiero prima colonna de' numeri semplici ; dalla cui somma si ha il p.to n.o composto . 10 . , non riferibile che alla unità suprema la quale non ha , nè può aver altro riscontro che il zero . 0 . Non basta

0 10
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Essendo dedotte queste due serie dalle differenze , si

1166

Sup.to

deduciamo le differ.e fra 1.4.5 ecco in 1.5. le radici di 1.9.^{3}, la forma tripla assolutamente prima, e la quadrupla ridotta alla tripla. Più

la porzione principale di quest'opera è nei soli termini 9.10.11; de' quali è 10. il centro, e 30. la somma. Ecco nella somma di 1+4+5=10. il centro, e nella ragione delle due somme 10.30. la forma tripla a prim. 1.3. col zero aggiunto, e nella più: Prova evidente di fatto del fondamento, e verità di tutte le operazioni proposte nel corpo della scienza, ed in questo epilogo con i zeri aggiunti, e con la denominat.e principale in 10.

Più ancora, benchè il più non appaja possibile. Si combinino in qualunque modo ambidestrario di somma i soli termini 1.4.5; o si avvalga ugualità fra 5.5. nella somma di 1+4. rispetto a 5. o si avvalga la forma seguente 6.4. nella somma di 1+5. rispetto a 4., nè altre combinazioni sono possibili stante le due già assegnate di 1. l'istesso, e di 4.5. in 9., e della somma doppia 10. Sia la ugualità nella somma 5.

10. Luglio. 1770

questo [illegible]

sup.ro

quadro termine è la precisa radice quadrata di .25; nell'aritm.co della sesquialtera g.d. di cui sono radici gli estremi g.li della posizione principale potentissima la indicazione dei due termini uguali .5.5, dai quali bando ci ha il sommo, quando si moltiplica .25.

Questa indicazione riportando la somma .6. di .1+5. rispetto a .4., termini sesquialteri, fra i quali è nell'aritm.co 5 a cui corrisponde il n.o quadrato .25., nell'aritm.co della sesquialtera g.d. no.24.25.no.30., la indicazione si converte in evidentissima dimostraz.e del principio attuale dell'aritm.co sistema nella sesquialtera.

Questa verità si è più volte dimostrata con le proposiz.i g.d. di questa scienza. ma quì dimostrandosi con le differenze dedotte dalle sopra esposte particolari proposiz.i s'intende dimostrata in quel grado supremo del genere dimostrativo, oltre di cui non vi è, nè può esservi principio alcuno dimostrativo.

Così essendo, e tornando a buon rigore su principj fondamentali proposti, e dimostrabili nell'opera

1166

sup.to

e su questo di più si è fin
qui proposto a dimostrare
in questo supplem.to, la scienza
che si contiene in queste figure
dedotte dalle diffe.ze realmte
oltrepassa la idea dello subli-
mano

Ecco il fatto, se pure c'bisogni
sopra poco in chiaro ogni
bisogno.

Primo fatto si è la somma di
due termini osservati fra
se relativi 1.10., e si dicono
astratti, e metafisici, perche
la relaz.e di 1.10. non è alla
unità della colonna laterale
alla mezzana colonna delle
unità, ma unicamte alla
unità suprema, e solitaria
della mezzana colonna delle
unità.

Che nell'aritmetica serie del
n.o la cifra 0. del termine
10. corrisponda necessariamte
ad una unità anteriore
alla unità della serie, si
è dimostrato, e spiegato
altrove. Si congiunga
questa verità col fatto
presente, ed a questo
fatto si riferisca la proposizio-
ne di Mercurio Trismegisto
che 1.10. è l'anima del
mondo.

Nella metafisica di questa
scienza si spiegherà intieramte

C. Foglio.

jup. 20.

il suo vero senso, che altro-
ve qui si rileva abbas-
sato quando si applichi
la unità suprema a dio, ed
il n°. 20. al diam°. dell'uni-
verso (di figura effettivam^te
circolare) diviso in quel. io-
predicam^ti che in Platone
si trovano enunciati.
Qui basti il cenno antici-
pato; ma intanto si osservi
che la somma delle unità della
colonna mezzana è recepi-
am^te determinata dal n°. 7;
la somma di 1.10. è recepi-
am^te determinata dal n°.
11., la natura di queste
due somme, è astratta
e metafisica, ma positiva
e reale; che dividendo
i due impari 7.11. nelle
loro forme, 7. in 3.4. ed
11. in 5.6., i quattro ter-
mini 3.4.5.6. costituis-
cono identificam^te la diade
determinata a proporzi-
dai due mezzi, arm^co 4, e
armonam^co 5., dalla quale
si sono dedotte le differ.
delle tre unità, e le tre
colonne della prima
figura di questa tavola.
Moltiplicando fra loro le
due forme 3×4=12, e
5×6=30; 12.30. si risolve-
no in 12.5. p^e e duo termini
della serie

jup. 21.

1170

pag. 11

della serie de' mezzi continuam.ti
primo fondam.to della ragione
4.5., di cui 4. è duplo di 2.,
prima radice della seguente for-
ma. dividendo due n.i pari
in. IXI = 1., 5. impari in. 123 = 0
e nella divisione risolvendosi
nella prima di tutte le forme
di proporz.i, ch'è la tripla
1.2.3.6

Questa folla di fatti a tutto modern.o
rigore, si risolve a posteriori
nei due termini 7.11; i quali
nella Geometria dimostrano
la ragione in pochi numeri
la più prossima di tutte alla
vera quantità, in cui si tro-
vano fra loro il quadrato
inscritto, ed il cerchio circo-
scritto.

In questi precisi termini 7.11.
coincide la somma dei due ter-
mini del centro triplo 3.4.
e la somma dei tre termini
della tripla armonica 6.3.2.
contenuti nella tripla geome-
trica 1.2.3.4.6. il primo fon-
damento della vera scienza
del cerchio; ed in questi
precisi numeri 7.11. si risolve
la somma dei termini delle
due approssim.te ragioni 1.6. fra
la unità approssim.ta, e le sei
unità corrette della colonna
mezzana; ed 1.10. fra la stessa
unità approssim.ta ed il p.o numero
composto

10. Luglio. 1770

sup. nr.

composto più relativo . co .
de' quali ore sevnini . 1 . 6 . co .
le differenze sono . 5 . 4 .
Questo è il giusto, e vero aspetto
di confronto di scienza, che cade
che cade nei due stessi numeri
fra la facoltà della vera
scienza del cerchio, e le facol=
tà di della Geometria, che di tutte
le note scienze dimostrative,
fondate massimalm.te su la ragione
Proseguendo l'esame dei ore sev=
nini . 5 . 16 . 19 . della rda serie,
che si risolve, nei merri arm.ci
lasciando . 5 . da se, solo ché
è il merro arm.co della tripla
q . d . , e sommando . 16 + 19 = 35
ecco i due merri armonici
estremi della serie delle
5 . proporz.i q . d . , 3 . della
p.a ch.e è la tripla . n . 3 . 4 5 6 .
e 35 di . 30 . 35 . 36 . 37 . &c .
Dunque a tutto rigore della
natura della rda serie
che si risolve nei merri ar=
monici, si ha in . 5 . 35 . la
risoluzione dimostrativa
degli estremi totali de' merri
armonici, contenuti nelle
cinque proporz.i q . d . , le
quali costituiscono quel se=
stuplo confine, che in attuali=
tà è il periodo del cerchio
nei due punti fermi di
progetto, e regresso
si prosiegue, deducendo ancor più

(ma ché si han a formare
Tutto è arbitrario

(altro è mostrare,
altro è dimostrare .

sup. 21

(. ov.g somma, ov.g radice
ub a ve ma est.

la differ.a di 3.15.19 ; Esaminan-
dole, non 13.3 sono, ma come
radici, non sono perchè sono
impari, quando perchè devono
seguire la natura dei merji
armonici, i quali a priori sono
i prodotti della serie univer-
sale delle forme differ.a di
divisore 3 in 1+2=2 ; e 10 in
6+7=42 ; di trova in 2.42 ::
1.21. la ragione costituita
dalla unità osservata ch'è il
principio metafisico, e dalla
somma concreta dei sei termini
delle semplici forme 1.2.3.4.5.6
de' quali la somma è = 21.
Dunq; egualm.te da questa data
serie sono empiricam.te dimo-
strati i principj pr. univer-
sali della vera scienza del
occhio, concretati in 1.21.
rispetto ai semplici termini
delle forme in 3.35, rispetto
alla serie totale de' merji
armici delle cinque risperna-
tiche proporzioni g.d.
(vede l'Autore di dover rispondere
ad una istanza che può farsi
ed è, che potrebbe nell'opera
il total fondamento su i
termini 9.10.11., e questi (se
la scienza è vera) dovendo
essere intrinsecam.te connessi
col principio nuovam.te introdotto
introdotto della differ.a
da questa nuova specie di
proporzioni, non si vede

fin qui altra connessione, che della somma di 1+4+5=10; o di 9·10·11·· in 990; come si è qui sopra esposto, e spiegato.

Questa connessione, che è particolare della prima serie, ma non comune alle due serie, come esser deve di necessità di fondamto universale, non basta al presente bisogno, et cui si richiede la risoluzione totale delle operazioni in una posizione di principio attualmte universale e comune.

Questo principio attuale essendosi dimostrato in·9·10·11·, se in questo si risolve la 1ma serie, nel medmo deve risolversi anco la 2da serie

La istanza è tanto giusta, quanto così appunto in fatti succede. Con i tre termini della prima serie ·1·4·5· si sommino i tre termini della 2da serie 3·16·19· in·1+3=4; 4+16=20; 5+19=24; questi saranno in numeri primi ·1·5·6· ed o si sommino con i primi ·1·4·5· in ·2·9·11·; o si pongano fra loro in serie ·1·4·5·6· per sommarli ordinatamte di due in due, 1+4=5; 4+5=9; 5+6=11. in ogni modo si avranno gli estremi ·9·11·, ne' qli si risolvono queste nuove posizioni, ed operazioni.

1·4·5
3·16·19
4·20·24
1·5·6
1 4 5
2·9·11

1·4·5·6

1+4=5
4+5=9
5+6=11

Sup·21

1174

Sup. cit

dimostrabili gli esposti n. 9. 11., non vi è difficoltà veruna sul merito n. 10., che il proprio natural è a priori, il metodo dimostrativo operativo, e legge di questa scienza, si suppone sempre necessario alla costituzione delle forme delle proposizioni determinate dai mezzi specificabili a natura di concreta operazione.

Si ha dalla somma di $g+11=10$, divisor il 2 dal termine n. della 1ª somma n. 9. 11., e dal termine 5. della 2da somma $5 \cdot 9 \cdot 11$, si ha il moltiplicatore $n \times 5 = 10$.

In somma si volga, e rivolga la operazione come si vuole, si troverà che in ogni modo si risolve nei tre termini 9. 10. 11., fondamento, e posizione principale della vera scienza del cerchio. Si è adunque dimostrato quello si doveva dimostrare

Sure i maestri lume di questa scienza si sappia, che la vera dottrina a priori consiste nell'arm.ca naturale della ragione 9. 5. la quale convertita nelle frazioni $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$. è l'arm.co principale della sesquialtera $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$. nello stesso senso, in cui la suddupla 1. 2; convertita nella serie arm.ca $1 \cdot \frac{1}{n}$. è l'arm.co principale potenziale della triplicata $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

11. Luglio. 1770

Malfatti

ma tutta questa machina cade a
terra quando si ritrovi al proprio
proposto a cavte. 10. di questo sup=
plemento nelle dedotte differ.
9114159, ed 9540709 duplicato
in 17168809, ove si trova l'av=
vanzo non consumato 1549409
il quale essendo prossimo di
quantità al divisore. 1770209,
computandolo nella operaz.,
riduce la vagione 463. 464.
alla vagione. 464. 465; molto
più prossima al vero nel più
di quello sia. 463. 464. nel
meno.
di fatto la vagione. 463. 464.
computata alle due dedotte
differ. 9566309 ed 9566409
manca (salvo errore) di
n60658. n60659. in circa;
e la vagione 484. 485. eccede
di. n196945. n196944. in circa
ma nella stessa comune delle
vagioni, e proporz. l'assegnat
fondam. principale di
una dimostraz. la vagione
463. 464. più constante al
vero, a confronto della va=
gione. 464. 465., molto più
prossima al vero, l'intende
che sia fallo patente, quando
siano ugualm. note le due
vagioni, come qui lo sono.
Adunq; tutta la machina rovina,
perchè è fondata nel falso.
Così è obligato a vagionare, e

1176
sup.ra

conchiudere il Geometra dalla
sua scienza, e conseguentem.te è
corroborato dalla sua scienza acciò
egli nell'ovvare [illegible] mancare
dalla vera scienza delle va-
zioni, e proporzioni. scienza
del fatto

La vera scienza delle vazioni, e
proporz.i assegna alle sue pro-
porz.i 3.e., non due medii
ma ove; non vaghi, ed indeter-
minati, ma specificabili
naturali. Tali sono i ove medii
463. 464. 485. degli estremi
462. 500.; e questi, fra loro
inseparabili, formano il
centro della proporz.e.
Ma si è da vera scienza, che dalla
comune, si dimostra impossi-
bile in ove estremi, che
siano fra loro in differ.a
della unità, l'allegraz.e
di due vazioni, inchiudersi
il più ed il meno della com-
parata vazione, formata dalle
due dedotte differ.e, fuorchè
nei ove precisi. 463. 484. 485.
e questi formano fra loro
il centro della dimostrata
proporz.e.
Adunque il meno, ed il più
delle due comparate vazioni
463. 464; e 484. 485. è di-
mostrato da questa, che
è la vera scienza delle vazio-
ni, e proporzioni, non solam.te

sup. car

mente nella unità dello stesso cerbo, ma nella posiz.ne di quei ove cerniti, fuor de quali è impossibile una diversa assegnaz.ne

Per corollario si osservi l'effetto della mancanza del merg contravm.ne nella seconda comune.

Se il meno ed il più à dimostrato nel cerbo 483. 484. 485., è dimostrabile cerbo che il meno ed il più è decerminato dalla vagione degli esponenti del cerbo. 483. 485.

483. 485
484 486
241 243
240 242
120 121
60 61

Questa vagione formata da due nri impari è dimostrabile cambe la radice della vagione 484. 486. :: 241. 243., Queste egualmte di nri impari sono radici della vagione 240. 242 :: 120. 121. :: 60. 61. Ma i due nri pari 120, in essendo merri decerminati, 120. avm.ne 120. contravm.ne della propost. 3. d. 110. 100. 121. 122. 123. la di cui somma è. 10. 11. 6. conviene formarsi in questi riflettere alla sua forma, i di cui esponenti sono. 10. 12. :: 5. 6., ultima vagione delle settuple semplici forme 1. 2. 3. 4. 5. 6., de di cui decerminii la somma è. 21. a della qual vagione 5. 6 sono radici gli esponenti imporim. 2.

21. 22
10. 11 | 11. 12

1178

sup. 11

della forma 11. 12. 13. ; da cui si è avuta la propos. 9. d. 462. 463. 464. 465. 500

dividendo l'impari 11. 12. 10. 11. l'impari 10. 12. 11. 12; escono la forma 10. 11. 12. da cui si ha la propos. 500 esposta. 110. 120. 121. 122. 123. e però è dimostrabile vamente, che siccome il centro 120. 121. 122. corrisponde al centro 462. 464. 465 (Barba commentatore) essendo i termini ripetuti da quelle reverenze [illegible] si trovavano fra loro in quadruplo: così gli esteriori corrispondono fra loro, come radici di vagione, a quadrato di vagione, finchè si risolvano nella semplice vagione di prima forma. 5. 6. ma si è rilevata a cagione sup. la ragione 4. 5. nella differenza dedotte dalla quadruplo, e si è dimostrato ben a lungo la sua origine, natura, ed influsso. Quei dall'apotisi degli effetti. 463. 465. dentro i quali sono dimostrativamente compresi gli avanzi, si rileva la vagione. 5. 6. in cui, come in principio assolutamente primo, di forma si compiuta l'una così. Dunq, congiungendo le due vagioni 4. 5. 5. 6. e sommando 4+5=9; 5+6=11. tutta la machina delle proporzioni ed operazioni

120. 121. 122

463. 464. 465

120+122 = 242 | 463+465 = 928

121+122 = 243 | 464+465 = 929

120+122 = 242

463+465 = 928

11. Luglio. 1770.

Sup. ac

ad operazioni, ben lontano dal vacuare, si risolve dimostrativam.te in g. 11. radici degli esponenti 4.6 :: 2. 3. , e conferma più che dimostrativam.te la portione principale g. 10. 11. fondam.to della machina inoltre.

Ecco a quel via procedono, ed ove vanno a finire le dimostrazioni di questa scienza, in cui più che si avanza, e si profonda nella dottrina, sempre più se ne scopre la sfera.

Fin qui la dottrina si credeva consumata, ma non è così incominciò di nuovo per gli avanzi della ragione 4.5 ; i quali dimostrativam.te conducono ad un fatto fuori di ogni apparenza.

Per comprendere il significato, si premettono alcuni fatti sparsi nell' opera, acciò si abbiano pronti al bisogno.

1.° è la risoluzione qui sopra dimostrata delle radici 485. 485. in. 60. 61., ragione di semplice forma, benchè sia fuori del settuplo primo delle semplici forme, ma è indicata a dovere s'intende il quadrato del mezzo aritm.co del centro ino. ind. 462.

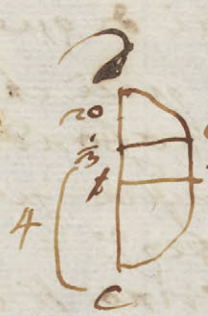
1160
Sup. ☐

61
61
61
360
3721

11×11 = 121
60×60 = 3600
61×61 = 3721

diviso in 60. 61, i quali due termini col termine 11 = Via formano il triangolo Rettangolo 11. 60. 61.

Il rdo 4 è la necessaria portione del pe. 60. come un tubo armonico, quando col numero si debba esporre l'armca sesquialtera delle frazi. 1. 1/2. 1/3. 1/4. 1/5. 1/6; conciosia dividendo il diame del cerchio e la pedba serie, sia forza denominolo 60.



$\frac{1}{2}C^{\square} = 20 \times 40 = 800$
$BB^{\square} = 30 \times 30 = 900$

Il 3°. si è, che divisa il diame. la pedba serie, il quadrato del pe. seno, ch'è il raggio al quadrato del rdo seno, dedotto da 1/3 è in ragione sesquiottava :: 9. 8., conciosia forza denominare il quadrato del pe. seno 9., del rdo 8. e vogliasi il quadrato del 3°. seno, dedotto da 1/4 si trova al pe. quadrato :: 675. 900 :: 3. 4 e però ridotti i 3 ove quadrati a denominazi. 1ne sono pe. 36. rdo. 32. 3°. 27.

$\frac{1}{4} = 15$
$\frac{3}{4} = 45$
75
60
675

900. 800. 675
36. 32. 27
3600. 3200. 2700

Ciò premesso, si vorrà a pag.to del replen. li cerchi con qual progetto si vadano computando gli avanzi, e li cerchi con la operaz.e comune, ricordandosi che se anco vi sia qualche fallo, nella oppz. (fallo materiale) non altererà in modo veruno il progetto, rispetto alle ragioni che risultano dalla oppzione la prima cade nell'avanzo

sup. cn

1770 cn 849 744
1 584 941 886 004
1404861740
1404864084
36 37 97 656
cn 37 471 116
1105 cn 65 40

1584941886004. sottrata la differa dal pavitore 1770cn849744 sarà 1404861740. divisi p la diffa i due terzini suddetti, risulta la vagione g.6; ed avanza. 1404864084

La da operar.e cade adunq; su questo avanzo, sottrata la diffa dal pavitore, sarà 36 37 97 656. divisi p la diffa i due terzini suddetti, risulta la vagione. 37; ed avanza. cn 37 471 116

sup. cn.

La 3a oper.e sarà adunq; su questo avanzo. sottrata dal pavitore 36 37 p la diffa. cn 37 p sarà. 1105 cn 65 40 divisi p la diffa i due terzini suddetti, risulta una vagione equivoca, rispetto alla quantità materiale, che nulla determina di preciso su le vagioni di questa scienza.

ma in questa avendosi vagione dimostrativa delle forme degl'impari, e pari p diffa 1. e degl'impari p diffa 2. ché fra queste forme, la dimostrativamte indicata dalla risultata vagione cn 37 p, e. 36 37 p; si è la forma. 5.7., corrispondente le prime radici dupla di vagione, perchè composta alla vagione sud.a risulta

1162
Sup. 1163

la differ.a 408 1/2 in circa.
Il quadrato di 7. termine mag.r non arrivando al quadrato differenziale (non arrivando nemeno 12. somma de due termini 5+7=12) li ha rinvenuta dimostrativa, che questa è la indicata ragione.
Ma prevenendo di accertare la natura della ragione formata fra 17347 9, e 34379 9, si dimostra ch'è natura di ragione dupla radicale con la rispettiva differ.a 408. 409. Comparandoli li radici duple 5.7.10. come si è spiegato nell'opera la somma, moltiplicato 12×17=204; moltiplicato 17×24=408. Non può adunque negarsi la natura del primo duplo radicale, se di fatto s'incontra la identità del termine 408. in differ.a di unità, che proviene, non dalla diversità delle comparate ragioni, come duple radicali, ma dalla somma, e composizione delle radici duple, le quali di quando si uniscono e compongano, mutano bensì quantità, ma non mai natura ma più dalla somma di 12+17=29 e 17+24=41; nascono le radici duple 29.41. Comparate queste alla ragione 17447 9. 34379 9 :: 29.41; risulta la differ.a

5.7.10
5.7
12.17.24
12.17
29.41.58

17 12 17 24 17 204 24 408

11. Luglio 1770

sup. n 57.

la differa 666. 667. e fra di
lla moltiplicato 18 x 37 = 666
s'incontra un termine della
differa; e duplicato. 18. in 36.
questi due termini. 36. 37.
sono i due mezzi, 36. aritm.co;
37. contraritm.co Degli estremi
30. 40 :: 5. 7. Adunque dal
rapporto delle radici duple. 5. 7.
è dimostrata la identità
del principio comune delle
due comparate ragioni; e
nello stesso tempo si scopre
che la diversità della quan-
tità procede dal mezzo con-
traritm.co 37., da cui non si ha
nè può avere il moltiplico
la quantità completa, come
si ha dai due mezzi, arim.co,
ed aritm.co

La ragione di questa scienza che
conduce a investigazione ignota
si è. 57. 60. Il quale alla
comparata. 1753 47 9. 1863798
è in differa della unità,
fra 17889. 17890 se fra di
Intanto poi si dice ragione di
questa scienza, in quanto i
due termini. 57. 60. si trova-
no attinenti alle proposi. g.d.
della mod.na. Il termine
56. è comune alle due
proposizioni.

40. 44. 49. 50. 56. 63. 64. 63. 70. Cresce della unità
in 57, quando si trovi rela-
tivo di quantità ai due

114/14

Sup. non

~~Radici~~ merzi, aritm.co, e contravm.co delle due proporzioni 43.57., relativamte a 49.50; e 57.73; relativamte a 64.65.

Il termine 60. è proporzionale il merzo aritm.co della proporz.e 7a. 60. 61. 62. 90.

Quì si vede ad evidenza la origine di questa ragione nella contravm.a natura; poiche 50.60. essendo ragione = 7.10., con aggiungendo la unità in 5.7.10., restando la unità in 57. relativo allo stesso 60., e con ciò approssimandosi di canto alla ragione 17347 &. 30379 &, questa unità accresciuta, non ha nè più nè altra relazione alle due proporz.i delle quali è termine comune 60., che di congiunzione di moltiplico, rispetto ai merzi della med.a

Indi trovato dimostrativamte verificata la risoluz.e delle diffic.tà nei due termini 399.400. assimilandoli al triang.o Pitagorico 20.399.401., proposto, e dimostrato nell'opera, poiche moltiplicandosi fra loro 50×57 = 2850., e soggiungendo a 60. il suo il suo reduplo 40. in 60×40 = 2400 si trova la difficoltà risoluzione in 399.400 si verifica la risoluzione delle

estremi suddupli. 40. 80
dei loro termini pri. 5. 10,
merci contovarm.a, 5. della tripla
e 10. della dupla: prova
dimostrativa della contrav=
monica natura del termine
57.

Se poi si vigneavano i termini
generatori di 57. 80. e
chiava la produz.e di 80.
da 8×10=80; ivi ne pri.
4×5=20. che viene dive
dalla ragione 4.5.

Non appare a prima vista
cosa significhi la produz.e
di 3×19=57., che 19. appa=
rendo termine pro, non si
sa la sua generazione. Tutto
è padrone la indicazione nel
no. 13. ch'è il determi=
nante la forma sesqui=
altera 2.3. nel genere
leggiavvicolare, la forma
tripla 1.3. Nel genere sem=
plice.

Moltiplicati in se stessi i
termini della forma
sesquialtera. 2×2=4; 3×3=9
e 2×3=6; si avrà la
sesquialtera continua
in 4.6.9., di cui tornati
i termini, si avrà il no
19., e si avrà converga di=
mostrativa della sua
contravm.a natura, che
nella forma vi entrano
due quadrati.

La sua significazione poi è la

1166

pep. 153.

dai due mezzi avm.ci 15.24
fra 15. 20; e fra 20 60
da questi due termini si ha
la proporz. g. d. 15.18. 20.24.
formata dalle due sesqui=
quinta 15.16; e 20.24; alle
quali cade mezzo 19 fra
18 20 :: 9.10

Di questa proporz.e si ragua=
dino gli estremi 15.24 :: 5.8.
qui si vede, e si conferma
la prima semplice forma
4.5, da cui si ha la com=
posta 5.8., raddoppiando
4. in 8.

Se si riguarda la somma de due
termini 15+24 = 39; si ri=
solve in 13. somma di 5+8.
e però nel mezzo original
conservm.o della sesquialtera
con ciò si ha nuova conferma
della composizione del termine
19. dalla somma della sesqui=
altera continua 4+6+9 = 19.
perchè se gli estremi 4+9. somma=
no 13; di cui estremi
nati col mezzo 6. somma
19., è forza concedere che il
principio è lo stesso, e la
conservm.a natura è co=
mune

Ma troppo vi è di più, ragua
dando il termine 57. a con=
fronto del mezzo avm.co 60.
della proporz.e 50. 60. 69. 72.
la ragione, in cui sono fra
loro si è :: 19. 23, e questa è
la radice

(i.e perche questo raddoppiare
4. in 8.?

pep. 24.

11 luglio 1770

la radice della ragione g. 11.
fondam.to principale della
vera scienza del cerchio
Essendosi stabiliti nell'opera i due
termini anom.i 63. 99. acciò
dimostrativam.te conducesse il con=
angolo Diagonico. 10. 99. 101. ϕ;
e qui tornando. 57. 63:: 19. ai.
in ragione radicale di g. 11., da
cui si ha la formula. g. 10. 11.
della propos.t 90. 99. 100. 101. 110
è troppo chiara la vista de'
principj fondamentali della
scienza, e aveva scritta la sim=
metria, che in questa vista vie=
ne del grande assai. Ella si tenga
adunque dietro.
Gli estremi di questa posizione
57. 63. 99. essendo in n.i primi
99. 33., e questi essendo im=
pari, si dividano in 9x10=90
e in 16x17 = 272. I due pro=
dotti. 90. 272., essendo in n.i
45. 136. si trova. 45. subdu=
plo di. 136. e differenza di
unità in. 135. 136. Ricercan=
do fra le moltissime ragioni,
delle quali possono esser
merzi di propos.t g. d. 135.
136; le più prossime fra i
loro estremi, e sempre rela=
tive ai centri delle propos.i
sistematiche di questa scienza,
Le ne trovano due, e sono
120. 135. 136. 153., e
108. 135. 136. 170.

16
17
112
16
272
90
45
3
135
136

1188
sup. 24

(6. 9. ; avm.co ad antm.co
15. 17. ; avm.co e contravm.co
che varrà mai di comunanza
è questa?

la p.a è composta dalle due vagioni 6.9. fra 100. 135. e 15. 17. fra 100. 136. ma 6. 9. è centro della doppia 3. 4. 6. 6. 9. 12 ; e 15. 17 sono gli estremi del centro 15. 16. 17. della proporzione 12. 15. 16. 17. 20. adunque l'una e l'altra sono del sistema.

la 2da propor.e è composta delle due vagioni. 12. 15 fra 108. 135. e di 27. 34 fra 108. 136. la p.a vagione è chiaramte del sistema fra 12. 15., estremi precisi della 2da propor.e 12. 15. 16. 17. 20 e rispetto alla vagione 12. 15 :: 4. 5, merzi precisi del centro triplo. 3. 4. 5. la 2da vagione 1a prima vipa non è chiara in. 27. 34, ma 27. 34. essendo 1. di 26. 35 :: 4. 5 ., e dalla compavazione di 27. 34 con 4. 5

27. 34 :: 4. 5
5 4
135. 160

nascendo necessariamte la differenza. 135. 136. la quale forma il centro della propor.e. 108. 135. 136. 170 : è dimostrabilmte certa la origine della forma. 4. 5.

In altre ove agisce il centro della propor.e col merzo convarm.co, dovendosi necessariamte accrescere della unità gli estremi rispettivi, è chiara la somma di 13. 21 (+1. del 12. 20. rispetto al centro 16. 17) in. 34. se a 34 si riporti la somma. 27. de' due estremi 12. 15. della p.a vagione, havrà

Sup. 24.

la scienza a priori della ragione 27. 34. costituita dalla congiunzione delle due natura, armonica e contrarmonica.

Ma qui non occorre fermarsi. È forza bensì fermarsi seriamente negli esponenti 40. 51. della proporz., e negli esponenti 108. 140 :: 54. 65. della rda. È un fatto che paragonando la ragione 40. 51. a 11. 14 di Archimede, eccede 51. di 561. 560, e comparando la ragione 54. 65. a 7. 11., eccede il 54 di 595. 594

Se questa non fosse la vera scienza del cerchio, come mai potrebbe darsi, che ricercati gli esponenti incogniti di un cerchio noto, qual è 135. 106 dovessero trovarsi esponenti due ragioni circolari del più, e del meno.

Qui è chiaro, che nulla importa la magg., o minor approssimazione di quantità, ma unicam. l'impropria ragione.

Comparato 65. 108 (ch'è raddoppiato 54. in. 108. (ragguagliate le due ragioni comparate) con la ragione 40. 51; la differ. si risolve in 288. 289. ma data la dupla 12. 24. col mezzo 17. il prodotto del mezzo è = 289.

140. 139. 136. 135
40 51
108. 135. 136. 170

40. 51 11. 14
14 11
160 51
40 51
560 561

54. 65 7. 11
11 7
54 595
54
594

(Arbitrio

65. 108. 40. 51
51 40
65 4320

Ars
135 4335 4320 15
15 15 288
289

1190

Sup. ∩4 ·

∩4
1∩
48
∩4
∩48

6. 8. 9. 1∩
1∩. 6+9. ∩4
1∩. 17. ∩4

595 594
560 561
35700 594
∩975 3564
34 | 33∩∩00 ∩970
9800 ∩70 33∩∩34 | 34
9801
∩700

99 140
99 70
891 9800
891
9801

70. 99. 140
35. 49. 50. 70
1×35. 49+50. 2×70
70. 99. 140

degli estremi è = ∩48. dunq; la differ.a si risolve precisam.te nel cenno duplo 8. 9. degli estremi. 6. 1∩; perchè data la forma di: 8. 9. in. 16. 17. 18, la sua proporz.e si è

∩7∩. ∩84. ∩89. ∩90. 3006.

e qui non solam.te si trova il cenno della proporzione di quantità in ∩84. ∩89; ma diviti ancora gli estremi ∩7∩. 3006. in. 1336. 1533., si trovano i due termini precisi della p.a proporz.e 1∩. 1533. 1336. 15∩.

Più: sottrata la ragione differenziale minore 594. 595. dalla magg.e 560. 561, risulta la differ.a 9600. 9801.

Ma data la duplo. 70. 140. col mezzo. 99., il quadrato del mezzo è = 9801; degli estremi 70×140 = 9800. dunque la precisione si risolve nel cenno 49. 50 degli estremi 35. 70. perchè data la forma 49. 50. in. 98. 99. 100, la sua proporz.e si è. 9702. 9800. 9801. 9900.

dunque la risoluzione è inammissibile dalla congiunzione dei termini della quantità, e della ragione, cosicchè gli estremi rispetti si riducono ad un solo, ch'è il cenno della proporz.e; ed in ogni qualunque conto questo cenno si dimostra pacificato e determinato alla duplo, ch'è il principio assolutam.te primo

11. luglio. 1776

sup. 14

primo della scienza presente
come scienza del circolo.

1. corni al cambiamto della vagione formata dai quadrati 5. 16 del 3°. e 4°. seno, seguito nella vagione formata dall'avanzo 17534711116, e dal precedente 38379765616. Mai non si avrà fondamento essenziale di questa vagione, se si prende disgiunta, e da se. Si avrà tutto il fondamto quando si congiunga col fatto ch'è la vagione attualmto formata in. 16. 5 dei due quadrati del 3°, e 4°. seno

Se vi è fondamto di scienza in questo cambiamto di vagione, deve ritrovarsi fornita di principio reale due addette vagioni; nè può seguir questo cambiamto se non che il principal vagione di sistema.

Per scoprire se vi sia questo fondamento di dottrina, e di sistema, si tolga la vagione minore dalla maggre sarà.. Ricercando qual sia la risultata vagione, si troverà la differa 696015404, che risulta la vagione 8. 9., ed avanza 57a63g764. Risulta adunque la stessa vagione seguita 9. 8., da cui necessariamte deve no incominciare i due quadrati

sup. 15

17534711116 — 5
38379765616 — 16

1367555340
5969477500
6836777900
6149768496
696015404
8
9

1307785936
3837976560
6190768496
57a63g764

1192
pag. 25

del p.o e 2do seno del diam.o armonicamte diviso

Si seguiti cercando qual vagione risulti fra l'avvanzo 57.6.39.64, ed il pavitore 6960.5404; per la differa. 1253761.40. risulta la stessa vagione. 4.5.; dimostrata a carte 10. del ripien.o nelle diffe. dedotte dalla quadrupla.

Adunque come ivi il progresso dall'avvanzo, e dal pavitore della vagione 4.5. risulta la vagione seguiobava 9.8., in cui necessariamte deve ovvarsi la prima vagione attuale del cerchio fra i due quadrati dei due primi seni; così qui il regresso dall'avvanzo, e dal pavitore della vagione attuale 9.8. dei due quadrati de due primi seni, risulta la vagione 4.5. che si è avuto dalle diffe. della quadrupla, come principio primo assodato di quella serie di vagioni che concretamte conduce al cerchio, il di cui diam.o sia armonicamte diviso.

Adunque la natura delle vagioni risultate il progresso e regresso dagli avvanzi dedotti dalle diffe. della quadrupla, è natura circolare nel senso, e modo stesso

57.6.39.64 | 1253761.40
79.63.70.41 | 4/5

prop. 25

in cui nell' opera si è dimostrato il cerchio rivoglierse in se stesso dentro la stessa pla, contribuisca dalle forme delle propor.ni q.d. di grandezza

Queste sono conseguenze di fatto positivo, e vale, che non ammette risposta, e che anzi altamente si conferma dall' avanzo 791534704 della vazione 4.5. Contribuisca la vazione fra il ned.o avanzo, ed il precedente 1253761440, risulta una vazione equivoca fra 7.11; fra 9.14; e fra 16.25.

Rispetto alle regole di questa ricerca, non può essere 7.11. perche qualunque no quadrato dovendo essere mezzo aritmetico della rispettiva proporz.ni; ed il quadrato di 11. essendo 121. non concorda con la vazione differenziale 126.127. e frazi.ni che risulta dalla comparazione delle due vazioni 7.11. e 791534, 121337.

Il quadrato 121. non potendo esser mezzo aritm.co di forma la più prossima che della forma 10.11.12; e l'esponente della proporz.ne dedotta da questa forma essendo $11 \times 11 = 121$, la vazione 126.127, 2 frazi.ni non può essere che una

1194

sup. 25

mezzanità di propor.ne fra
12. 1752.

Ciò sarebbe combinabile con la
propor.ne 110. 120. 121. 122. 123
dedotta dalla forma. 10. 11. 12.
ed in questo senso è realm.te
indicata la ragione circolare
7. 11. ma questa ragione di
quadrato inscritto a cerchio
circoscritto essendo di propria
natura concepibile in. 11. 14;
ragione di cerchio inscritto a
quadrato circoscritto: è chiaro
che se il quadrato di. 11.
ch'è. 121. non arriva ai
termini differenziali. 126. 127.
il quadrato di. 14., ch'è. 196.
sorpassa, ben di molto, i due
termini suddetti

Sia dunq; da ora escluso questa
ragione. 7. 11., che non regge
rigorosam.te alle regole della
scienza. Per queste regole
adesso non può attendersi
la ragione. 16. 25., perchè com
parandola alla ragione
79 1582. 1583 1584, e risul
tando la differenzial ragione
453. 454. in circa: il qua
drato di 25, ch'è = 625. sor
passa di molto i termini
differenziali. 453. 454.

Resta adunque la unica ragione
9. 14., perchè comparandola
alla suddetta ragione; e
risultando la ragione differenziale
443. 444

11. Luglio 1770

Sup. 25

16
16
144
16
324

444 · 444 · e frat.i : A questi esempi non arriva nè il quadrato di 14 · ch.e è = 196 ; nè il quadrato del doppio di 9 · ch.e è 16 · , il di cui quadrato è 324 .

Levato la ragione 9 · 14 · rispetto alle regole di questa scienza, è dimostrativam.te falsa · ma acciò un Geometra non arrischi una dimostraz.e che non è fondata su le regole della sua scienza, così sarà bene convincerlo che la regola di essa scienza è assolutam.te vera.

Qui è necessario avere alla mano, e sotto gli occhj il trattato di Musica dell'Autore ad osservare la figura VII, a cui sono annessi gli esempj musicali . si troverà che l'ultimo esempio musicale in chiave di contralto, è dedotto p.r serie dalle ragioni de' quadrati de' seni alla qual serie corrispondono le ragioni delle frazioni nell'esempio p.o in chiave di basso , sopra segnate con i numeri · 60 · 30 · 20 · 15 · 12 · 10 · e le ragioni degli avanzi nell'esempio 3.o segnate con i numeri · 30 · 40 · 45 · 48 · 50

Il fondam.to di quel trattato è la dimostraz.e del vecchio axioma comunem.te costituito, il pratico

stampato 1754
qui lo dice l'Autore stampato 11 anni p.a dunque vi=veva ancora tra il 1765 ; o 1766 non nel 1770 addì 16 Feb.o

1196
sup. 96

fondam.to preciso si è la settima figura con gli esempij numerici. ✓ (Si sfoga qui contro d'Alembert il cambiam.to della ragione de' Leni. 53.16. nella ragione affatto prossima. 57.60. degli avvanzi, succede precisam.te a riscontro della 15.ma r. del p.o esempio, che corrisponde al rdo in $\frac{1}{4}.\frac{1}{5}$. che vuol dire nell'aritmetica ragione. 5.4; fondam.to di tutte queste ogazioni succede precisam.te a riscontro della ottodecimaquintadecima 45.46. del terzo esempio degli avvanzi; che vuol dire nel cenovo. 15.16. degli esponenti 1r. ro :: 3.5; nel qual cenovo si trova necessariam.te chiusa la circonf.a di Culen, come nell'Opera si è a lungo dimostrato succede precisam.te fra il rdo, e quovo teno del quarto esempio, di cui il p.o termine essendo. 15. il quale, rispetto al 4.o termine essendo :: 53.16. rimanendo il p.o qual'è. 15. il 4.o si cambia in un termine di radice duplo prossimo $= 9.10\frac{1}{2}$; che vuol dire a. 7.5. 7 radici originali della duplo, e ragione fondamentale a priori di questo trovato la differenza fra la risultata ragione. 57.60, e le radici

45.46 :: 15.16

53.16 :: 15 . $9\frac{15}{53} = 9\frac{3}{5}$

15 / 60 / 16 / 53 / 40 / 9 / 15

$15 \cdot 9\frac{15}{53} :: 7.5$

$15 \cdot 9\frac{3}{5} :: 7.5$

$\frac{5}{15}$ | $9\frac{3}{5}$

$53.16 :: 15.9\frac{3}{5}$

$5.16 :: 3.9\frac{3}{5}$

$\frac{3}{48}$ | $\frac{5^3}{48}$

$6^3 + \frac{4}{4}$

$6\frac{4}{4}\frac{5}{5}$

sup. 26

57. 40 :: 5. 7

7 — 399 — 3 99 — 3591 — 3591 — 11971 — 159 r 101

40 — 400 — 401 — 401 — 401 — 16040 — 160401 — 159r101 — 1600

40 — 40 — 1600

duple . 5 . 7 . si risolve in 399 . 400 termini precipi del triangolo Pitagorico . 40 . 399 . 401 . e però il cambiamto indica dimostrativamte i due principij fondamentali della scienza, cioè le radici duple, ed il triango Pitagorico relativo al proprio pr° della loro serie nella forma . 9 . 10 . 11 . da cui si ha il pr° triangolo Pitagorico in . 20 . 99 . 101 . e nella forma . 19 . 20 . 21 . da cui si ha il 2do triangolo Pitagorico . 40 . 399 . 401 .

Il termine . 57 . , mancano fra la duple 80 . 40 , non deve intendersi altrimti di geometrica natura ; è tutt'altro . dedotte le differ^e 17 fra 40 . 57 e 23 . fra 57 . 80 ; e come impari divisi . 17 . in . 8 . 9 ; e 23 . in . 11 . 12 : compariscono sotto gli occhj i quattro termini . 8 . 9 . 11 . 12 . , gli estremi de' quali sono sesquialteri . 12 . 8 :: 3 . 2 . , ed i due medij . 9 . 11 . sono le radici sesquialtere originali di ragione , su le quali nella loro intiera forma . 9 . 10 . 11 è fondata la vera scienza della misura del cerchio in . 9 x 11 = 99 . , termine formale del cerchio .

La regola adunque di questa scienza

1198

Cap. 26

prescrive la scelta della ragione 9.14., a confronto delle due 7.11; e 16.25.; risul= tabe in prossimità dalla loro comparazione con la ragione 791534704.1253576140. formata dall'avanzo della ragione 4.5., e dal precedente questa regola si trova dimo= strata dal fatto; o nò. Se nò, è falsa; se sì, è forza che sia vera. Il vero fatto qui non ha, nè può aver luogo, che il 4° esempio musicale, dedotto dai quadrati dei seni.

Acciò adunque vi si vogliono trasportare gli esempj musicali in nu= meri di proporz.ne, e deno= minazione comune, acciò con magg.r facilità si rilevi il fatto da chi non intende musica. sono adunque come qui accanto.

Fra il 3°. quadrato de' seni 540, ed il 4°. $460\frac{4}{5}$, che al p°. 7200. è nella ragione di 16. 25. cade il termine 513. il q.to col p°. quadrato 7200. si trova nella ragione 57. 80 :: 513. 7200 a questa ragione si è dimostrata di= trova duplo radicale in differenza di 399.400. delle radici duple originali. 3. 7.

ova si cerchi

Cap. 27

frazi	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
N.i	2880.	1440.	960.	720.	576.	480.
=	60.	30.	20.	15.	12.	10.

avanzi	1440.	1920.	1680.	1709.	2400.
=	30.	40.	45.	48.	50.
quadrati de' seni	7200.	6400.	5400.	$4602\frac{4}{5}$.	4000.

$460\frac{4}{5}$. 7200 :: 16. 25

25	7200
2300	3200
9200	11200
11500	11520

$460\frac{4}{5}$. 513. 5400

80	57
41040	5400
	2700
	41040

Sup. 27.

Ora si cerchi in qual ragione si trovi l'ultimo quadrato de' lati 400. con lo stesso termine 513. comparata la ragione 400. a 513. alla ragione 7. 9: si trova nella stessa differ.a 399. 400; in cui si sono trovate le radici duple 5. 7. comparate alla 513. 400. 7 20; e le conseg.ti nelle stesse dimostrative indicazioni, che rispetto ai principj di questa scienza, si sono qui sopra dimostrate, e spiegate.

400. 513 :: 7. 9

9 | 3600 | 513 | 9
400 | 7 | 399

È adunque un fatto che la ragione 7. 9. si trova nei quadrati de' lati; e conseguentemente la ragione prescritta è determinata dalla regola di questa scienza, tanto e di fatto quanto che dipende dalla sola conversione del 7. nel suo duplo. 14

Se poi alcuno in questa conversione il Geometra si offende, attenda a quanto segue.

Questa scienza dimostrando il diametro del cerchio col mezzo de' lati, il mezzo geometrico degli estremi di una proporz.e q. d. in un solo termine, sempre razionale, e sempre somma dei termini della ragione

1200
sup. 27.

dei due mezzi che formano il cerbo della proporzione. Qui non v'è bisogno di ripetere la dimostraz.e, allegata nell'Opera, e compiutamte spiegata. ivi si riveggia.

Ciò premesso; sia la sequiale ceva . co . 24 . 25 . 30 . Sarà il mezzo geometrico di questa serie . 24+25=49, sarà de' due mezzi, 24. armco, e 25 . ariomco . Indi si avranno i prodotti degli estremi co e 30, raddoppiabi in 40×60 = 2400; il quadrato del mezzo 49·49=2401; ma necessariamte chiuso dai due cerminі produ-cenси il complesso 48×50 = 2400.

In conseguenza si verificano le radici della sequiale-ceva in . 40 . 49, ed in 49 . 60 (intendendosi sempre il diffalco della unità nel quadrato di . 49 .

Su questo fondamto, e dottrina si ritorni alla ragione . g . 14 . essendo questa composta dell'impari . g . , e del pari . 14 . , si divida . g . in . 4 . 5 il pari in . 7 . 7 . e si avranno i due prodotti 4×5=20; 7·7=49 ma dati gli estremi sessagesimi co . 120 . , il mezzo geometrico proprio di questa serie

49
49
441
196
2401

co . 24 . 25 . 30
40 . 24+25 . 60
40×60 = 2400
49×49 = 2401
48 . 49 . 50
40 . 49 . 60

cioè 40 . 49 in raddoppiata di 40 . 60 :: 4 . 6 :: 2 . 3

sup. 97

100 · 49 · 1200

100 × 1200 = 120000

49 × 49 = 2401

7 · 9

7×4 · 4×5 :: 3 · 5

4×5

3 · 5

1×n · n×m :: 1 · m

9 · 14

4×5 7×7

20 · 49

è 49 · dalche 200 × 1200 = 240000 e 49 × 49 = 2401 · con lo stesso diffalco della unità.

Adunque si dimostrare la integrale estensione dell'armonica scienza nello esplo, era necessaria la conversione di 7 nel suo duplo 14; giacchè nella ragione 7 · 9, vi sono bensì le radici della ragione 3 · 5; ma in questa le radici della tripla, ch'è la prima, e fondamentale proporzione della scienza; ma non vi è in 7 · 9 la ragione radicale della sua esatta estensione, come vi è in 9 · 14

se adunque in 7 · 9 si dimostrano le radici della ragione 3 · 5, ch'è la radicale della tripla, in cui risiede la prima, e fondamentale proporz. della scienza, e raddoppiando 7 in 14 si dimostra la esatta estensione totale della scienza: Bensì che offendersi della conversione di 7 nel suo doppio 14, conviene a forza confessare, che se in tanta semplicità, quanto è il raddoppiare un termine, si trova tanta verità, e dottrina questa scienza ha più del divino

1100
pag. 67.

che dell'umano.

Inoltre questa convenzione
di duplo è palente di fatto
nella posizione degli estre-
mi sesquipli, e sesquial-
teri con il medio comune
49.

10. 40. 49. 60. 100

è un fatto che o si duplichi
10. in. 40; o si divida. 40.
in. 10., ed egualmte o si
raddoppj. 60. in. 100., o si
divida. 100. in. 60. tutta
questa operazi si risolve
nella duplazione convenzione
degli estremi, rispetto ad
un medio comune

Veggasi un Lemma del lib XII di
Euclide Prop.

∴ r. 4. 6
rxr. 4. 6/r
∴ 4 . 4 . 4
∴ r. 6. 16
rxr. 6. 16/r
∴ 4 . 6 . 9
∴ r. 6. 6^3/r
rxr. 6 . 3^3/r
∴ 4 . 6 . 16
∴

Ma quì togliendo una difficol-
tà, che nasce dalla natura
delle proporz., succede
ottimo incontro di scopri-
la distinta relazione della
sesquialtera alla sestupla
e di scoprire una proprie-
tà affatto singolare della
sestupla.

La difficoltà si è che assegnan-
do un'aritmca proporz.
a confronto della corrispon-
dente armca, la necessità
delle ragioni inversamte
eguali, nasce in due ter-
mini un medio di propor.
geometrica discreta, comune
di quantità fra gli estremi
delle due proporzioni.

Per esempio. Data la tripla
aritmetica

12. luglio. 1770

Aritmetica . 1 . 2 . 3 . a confronto della tripla Aritm.ca 4 . 6 . 12 . l'estremo 3 . della tripla aritm.ca con l'estremo 4 . della tripla aritm.ca, essendo in Sesquialtera, assegnando la Sesquial.a g . d . e ripovocando le due triple aritm.ca 1 . 2 . 3 . alla eguale 14 . 28 . 42 ; e l'armonica 4 . 6 . 12 . alla eguale 56 . 84 . 168 è dimostrativam.te certo che il centro della Sesquialtera 4 . 12 . 56 :: 6 . 8 :: 3 . 4 il centro, dico . 28 . 42 . è centro comune di quantità di tutti gli estremi relativi . 28 . 84 [illegible] :: 2 . 6 . 14 . 168 :: 1 . 12 .

Ugualmente assegnata la quadrupla aritmetica . 1 . 2 . 3 . 4 . a confronto della corrispondente armonica 6 . 8 . 12 . 24 ; l'estremo 4 . dell'aritm.ca con l'estremo 6 . dell'armonica, essendo in Sesquialtera ; assegnata la Sesquialtera g . d . 20 . 24 . 25 . 30 ; e ripovocate le due proporzioni aritmica 1 . 2 . 3 4 alla sigla . 5 . 10 . 15 . 20 . , e l'aritm.ca 6 . 8 . 12 . 24 alla eguale . 30 . 40 . 60 . 120 , è dimostrativam.te certo che il centro della Sesquialtera 24 . 25 , è centro comune di quantità di tutti gli estremi . 15 . 40 ; 20 . 60 . 5 . 120 ; [illegible]

Sup . 27

1 . 2 . 3 / 4 . 6 . 12

3 . 4 Sesquial.a

42 . 48 . 49 . 56

14 . 28 . 42 56 . 84 . 168

28 . 48 . 49 . 84

14 . 48 . 49 . 168

48 49 168 42
49 28 14 [illegible]
43 2 67 2 67 2 [illegible]
14 2 168 168 [illegible]
35 2 35 2 35 2 35 2

Sup . 28 .

1 . 2 . 3 . 4 / 6 . 8 . 12 . 24

4 . 6

2 . 3

20 . 24 . 25 . 30

1 . 2 . 3 . 4 6 . 8 . 12 . 24

5 . 10 . 15 . 20 30 . 40 . 60 . 120

15 . 24 . 25 . 40

10 . 24 . 25 . 60

5 . 24 . 25 . 120

si rende più universale il Centro del XII . Libro sopra q .

1004
sup. 68

Perciò nell'incontro sopra dimostrato di 49. torna di 24. 25, resta comune divisore fra gli estremi sesquiali seri 40. 60., e semplicemente 10. nella essendosi di più, e di nuovo di quanto deve trovarsi nella natura delle proporzioni, appare che la dimostraz.e non abbia la forza necessaria, perchè non è singolare del caso ivi proposto, ma universale delle proporz.i

Imperante questa difficoltà è sciolta dal fatto, perchè abbiamo che la dimostraz.e particolare si risolva nella universale; abbiamo che ivi si scuoprano le radici sesquiple in 9. 14, e questo punto è affatto singolare del caso ivi proposto.

Che poi la dimostraz.e si universalizzi in tutte le proporzioni. Questo è vantaggio, e prodotto sempre maggiore del caso particolare ivi proposto, il quale è confermato da una dimostraz.e universale.

E poi è vero che restando comune il centro della sesquialtera 24. 25., agli estremi 15. 40; 10. 60; e 9. 10; non si rileva a prima vista la particolare comunicanza, che vi è fra la sesquialtera

n. 4b. 16 — n×16=6×6
n×n. 6 — 16/n — n×n×16/n=6×6
n×3. 6. 16/3 — n×3×16/3=6×6

Sup. 26

è la sestupla, a distinzione degli altri estremi di diversa ragione.

La troppa semplicità di tale comunicanza sfugge dalla vista in questo caso particolare, come nel caso universale la sua troppa semplicità è sfuggita a tanti secoli dalla vista la regola dell'aritmetica scienza, intieramente contenuta nel n°. aritmetico, noto a tutto il genere umano.

I primi termini dell'aritm.co n°. comune costituiscono la sestupla proporz.le 1.2.3.6. di cui è cenno di proporz.le g.d. la forma sesquialtera 2×3=6=1×6; e 10.40.60.100 :: 1.2.3.6. Si può erigger di più nessun col pensiero a prova delle verità qui proposte?

Certo è che se si volesse esporre tutta la dottrina contenuta in questi soli quattro termini 1.2.3.6., si conoscerebbe sempre più, che questa è scienza più divina che umana, ma è cenno altrettanto, che non si finirebbe mai più.

Tuttavia ricordi a memoria che sei è il 1°. n°. perfetto, uguagliato dalla somma de' suoi aliquoti divisori 1+2+3=6 e da questi costituito in

1006
fup. 24

~~1+r=r~~ ~~1+r+7~~
~~r+4=7~~

r8	1	
14	r	1+r+4+7+14=r8
7	4	
1	7	
	14	7. r. 3
		r. 3. 6

3. proposz. g.d. il che non si verifica di r8., ado nō 1 fosse uguagliato dalla somma de' suoi divisori aliquoti 1+r+4+7+14 = r8; ma non già costituito in proposz. veruna

Si noti che di questi 4. termini 1. r. 3. 6; la forma è la tripla aritmca 1. r. 3, e la tripla arm.ca 6. 3. r; che queste due proposz. si congiungono intrinsecamte fra loro nella seguialtera, r. 3 aritmca ad inversa - - - - 3. r. arm.ca: che la somma 3. di r+1 alla somma 9. di 3+6. è in tripla, e la somma 5. dei due mezzi r+3. alla somma 7. dei due estremi. 1+6; è in ragione dupla radicale 5. 7. &.

da questo principio procede la proprietà singolare, che si scopre nella congiunz. delle due seguple, aritm.ca ed arm.ca nella estensione integrale dei loro termini rispettivi; fra i quali ci sia un centro comune di proposz. g.d.

In tal caso i termini assolutamte necessarj, ed inimitabili sono, della seguipla aritm.ca ~~r. 6~~ r. 4. 6. 10. 12; della seguipla arm.ca 10. 24. 30. 40. 60. 120 che siano assolutamte necessarj ed inimitabili è dimostrato dai due mezzi 15. 16. comuni di quantità a tutti gli estremi rispettivi

r. 4. 6. 10. 12 | 10. 24. 30. 40. 60. 120
12. 10
3. 5

3 . 7

10 . 15 . 16 . 20

p 4 . 6 . 4 . 10 10 | 10 . 14 . 30 . 40 . 60 . 100 | 10 . 20 . de gli 15 . è inserto
n . a . n . a . a = 10 | | avm^co, 16 . anom^co.

rispettivi, specificabile nascosa rispetto ai minimi estremi

Ciò dimostrato, si deducano da una parte le differ^e; sarà la somma 10 . dell'avm^a 10 . 14 . 30 . 40 . 60 . 100, sarà la somma 4 . 6 . 10 . 20 . 60 = 100. Ma 10 x 10 = 100; adunque le due somme si trovano fra loro in radice, e quadrato, e la radice si trova nel semicerchio, mezzano degli estremi g . li ., posizione fondamentale della vera scienza del cerchio, e numero primo del diametro di Ceulen, la di cui corrispondente circonf^a divisa a metà, si trova chiusa in quello stesso centro . 15 . 16 ., ch^e è comune alle due esempie, anom^a ed avm^a

ma la proprietà di radice, e quadrato nelle somme delle differenze, è individua delle due esempie a confronto, quali sono qui esposte. Cosicchè una tale proprietà non si incontra nè in serie minore, nè in magg^re della esempla.

È un fatto che il diametro di Ceulen nel suo n^o primo è fondato in . 10 . e che la sua circonf^a relativa, divisa a metà, è chiusa dal centro comune

1004
sup. 24

15.16; e quando si abbia difficoltà in questa divisione, cessa a dimostrare la forza di questa dimostrazione; poichè è un fatto che il quadrato inscritto, ed il cerchio circoscritto di Caulen è nella precisa proporzione di 100000 a 157079; ed è un fatto che questa scienza fondamentalmente dimostra, e suppone la ragione di quadrato inscritto, a cerchio circoscritto in 63.99.

È dimostrare di se patente, che l'assegnazione delle due settuple ne' numeri sopra esposti, è necessaria, ed immutabile. Dunque in questa sola dimostrazione si contiene la verità, la sostanza, ed il fondamento dell'arma scienza, esposta si a lungo nell'opera presente.

Se poi a ciò si aggiunga, che ridotte le due settuple ai termini primi l'aritm.ca in 1.2.3.4.5.6., l'armonica in 10.12.15.20.30.60., sommati i termini della p.a in 21. della r.da in 147., e sommate queste due somme in 168., questo termine è il medio armonico, relativo al medio aritmetico 169. ch'è il raddoppiato della radice 13., medio originale concavum.co della sesquialtera in 10.12.13.15 e raddoppiato in 20. della 20.24.25.30

in di cui

sup. rg.

Sup. 29

21 · 25 · 26 · 31
26 — 31
150 — 31
50 — 62
650 — 651

in di cui rispetto è facile scevegli esempi · 26 · 30 · in · 21 · 31 · quando si congiunga il mezzo convenuto · 26 · coll'antico · 25 · come cenno di quando.

Se si riflette alla convenzione di · 13 · in · 26 · , ed alla ordinata composizione di questi quattro numeri in · 1 · 2 · 3 · 5 · , dai quali risulta la sopra assegnata settupla g · d · , se tutto ciò si congiunga a quanto realmente si è qui sopra dimostrato, e si ripensi alla comune sostanza dell'umana esperta scienza: è impossibile non concludere che si fatta scienza trapassi i finora cogniti limiti della facoltà della sibilla cumana.

Se assegnata l'antica serie

g · 18 · 27 · 36 · 45 | 54 · 63 · 72 · 81 · 99
90 · 81 · 72 · 63 · 54 | 45 · 36 · 27 · 18 · 9
99 · 99 · 99 · 99 · 99

g · 18 · 27 · 36 · 45 · assegnata la inversa
90 · 81 · 72 · 63 · 54 · quando è
99 · 99 · 99 · 99 · 99

evidente la loro convenzione circolare, e doversene adoperare altrettanto è da siccome l'attribuita ad una favolosa combinazione, e non trovane conto.

Ma ov si finisca di computare l'ovvanzo 6249664, che risulta dalla vagione · g · 14 · computata a 79153470 4 · 1233376140 · provata e non computata carte 23 Sup.

1ª 10

Jup. cg.

791ª4704 | 1ª3ª37ª6140
14 | 9

1ª16ª3ª8816 | 1110ª345ª60
791ª34704 | 1107ª4858ª36

1107ª485450 | ª499404
1041ª4ª. | 44ª
414409. | 444
649 884

che avrebbe!

16575 | 17576
16575 | 15ª3ª5
87480
39151
105456
47490
17576
74ª6ª6000

8ª4875
11601ª5
8ª4875
99450
16575
747306ª5

ª6 | ª7 | ª5
ª6 | ª7 | ª5
15ª6 | 189 | 1ª5.
5ª1 | 54 | 50
670 | 729 | 6ª5
ª6 | ª7 | ª5
4050 | 567 | 31ª5
1351 | 5160 | 1150
17576 | 1458 | 15ª5
1674 | 6084
1001. | 16575
9

1ª. luglio. 1770

Ecco la operazione. Si ripeta
ti, e confronti
Rimane adunque a confermare
la vagione formata dall'av-
vanzo 649884, e dal precedente
ª499404. Questa vagione
(ripensiamo fatica) compa-
rata a 13.50. si trova
nella minima differenza dalla
unità in 16884.16885;
ma avvanzando 1ª/13 in circa,
si trova molto più pros-
sima a 16885.16886.
In 1º luogo deve dimostrarsi
qual sia la vagione 13.50.
Raddoppiando 13. in ª6 divi-
so 50. 1 ª in ª5., e dimo-
strato che ª5.ª6. sono i
due mezzi, aritmº. ª5; con-
travmº. ª6. della terzialba
9.d.10.14.ª5.ª6.30.
Nè può negarsi questa
convenienza di regola, dachè
ª5.ª6. è il cambio di proporz.
9.d. degli estremi 13.50.
Moltiplicati ª5×ª6=
650., e 13×50=650.
Molto meno può negarsi
che dedotto il cubo di ª5
che è = 15625., dedotto il
cubo di ª6, che è = 17576;
dedotto il cubo della vagion
ª5.ª6; ch'è prossimo a 16575
in ogni modo la vagione
differenziale 16885.16886
è chiusa da questi estremi
e però

Sup. 29

e però è forza che la radice cuba sia nella ragione c5. c6 In 2do luogo, dimostrata la radice cuba della ragione differenziale in c3. c6. ragione contraria del centro Sesquialtevo, sono inevitabile consumati gli avanzi, i quali dipendendo, non da un determine, ma da una ragione, e stata essendo dimostrata in c5. c6. come radice cuba della ragione differenziale, la stessa dimostrare che consuma inevitabile gli avanzi, conferma il principio Sesquialtevo determinante, e la necessaria consegue fondamentale positione delle radici Sesquialteve negli esempi della forma g. 10. 11. dopo si patente dimostrare si osserva che dei determini p.i differenziali. 16664. 16665 la somma delle cifre è 1+6+6+6+4 = 23 nel mero, e 1+6+6+6+5 = 26 nel più. e che l'avanzo col positore è affatto prossimo a $\frac{12}{13}$ (12. 13. 14; 13. 14. 15. 16. centro della Sesquialteva) cosicchè la somma delle cifre, e l'avanzo col positore dimostra lo stesso che la suddetta chiamata da Diab. Onom.a de' filosofi.

Sup. 30.

consumato

1612
Jup. 30

Continuato questo primo supplemento possa l'huomo, secondo la mia parola a quello dimostrare che non ha risposta. Eccola.

Nell'opera si è dimostrata la serie composta delle radici duple e somā, approssimandosi sempre più alla vera quantità della ragione 2.10. vi è una proprietà di fatto, ed è che somata la ragione 2.10. con queste radici duple, o sottratta dalle medesime, ne risultano si ha una ragione che si va approssimando sempre alla ragione di quadrato circoscritto, a di cerchio inscritto; e somā, alla ragione inversa di cerchio circoscritto a quadrato inscritto. Ecco la prova con la posizione di Archimede e sottrae 11.14; Resta somā. 7.11.

5.7.10.
5.7
12.17.24
12.17
29.41.58
29 41
70.99.140
70 99
169.239.338

Per sottrae

5.7	7.10
10.9	10.9
50.63	70.90
14.11	14.11
700.693	980.990
7. differ. 700.99	98.99 differ.

Proseguendo con tal metodo la operazione; dalle radici duple 12.17, risulta la differenza 560.561; dalle convadici 17.24, la differa 594.595. dalle radici duple 29.41 la differa 4059.4060; dalle convadici 41.58 la la differa 5870.5871. Finalmente dalle radici 70.99. la differa 9800. 9801. dalle convadici 99.140; la ragione = 7.11.

Avanzando poi le radici duple fino ad esaurire magne 13860. 19601. 27720. la di cui differa

sup. 30

78 1/2 1/3

in prodotto è della unità
nell'ultima cifra del prodotto
degli esponenti. 3541999100.
e del quadrato de' mezzi. 3541999201.
e sottrato da queste radici,
e sommata con la medesima ragione. 9.10., e comparato il risultato a quante mai cifre di Ceulen si vogliono adoperare, risulta la ragione differenziale del più, o del meno. 1645. 1646 e frazioni. È dimostrativamente certo che questa ragione non sarà mai alterabile nei suoi termini interi, di quante cifre di Ceulen si adoprino, e di quanto si indica più esatta la sopr'assegnata ragion duplo radicale. 13860. 19801; senonchè fino a 1646. 1647., qualora si comprendano gli avanzi prossimi a $\frac{16}{17}$, e però prossimi ad un intiero.

Onde di minor fatica a chi si accinga all'impresa si assegnano qui le cifre duple 54333597120. 76663968401. 10866792140 Queste nel loro prodotto si troveranno in differenza della unità nella ultima delle cifre 18. Da chi vuole si faccia la prova: si troverà l'alterazione negli avanzi, ma sarà sempre immobile la ragione differenziale.

1214
Sup. 30

in tre termini. 1845. 1846. 1847.
compresi gli avanzi.
Ciò stabilito, si dimostrava da
vero che questa ragione differen-
ziale dipende essenzialmente
dalla ragione. g. 10., indipen-
dentemente dalla radice, e dalla
somma della medesima con le
radici duple, cosicchè per trovar
la origine di questa differe-
za fosse forza cercarla nella in-
trinseca natura della medesima
Ciò è fuor d'ogni dubbio, poichè
presto si trova la ragione. g. 10.
ed aggiunte quelle frazioni
che avvicinino ad uguagliare
la ragione differenziale. 1845. 1846;
o la differenziale. 1846. 1847:
È chiaro che sommata questa
ragione con le radici duple,
avrà vigore alla posizione
di Eulero, e si troverà
È altresì chiaro, che essendo
immutabili le radici duple,
e la posizione di Eulero,
se non quando importa la
loro maggior esattezza, non
può esser mutabile che
la ragione. g. 10.
Quì si è finalmente al punto
inamovibile, e sempre.
Si trova, e si dimostra de-
ridere a frazioni le
comuni posizioni di diam.
e circonf.a.; 7. 22. di Archimede
113. 355. di Metio; 100000
314159 di Eulero, ed aggiunte
alla ragione

lì 3. luglio 1770

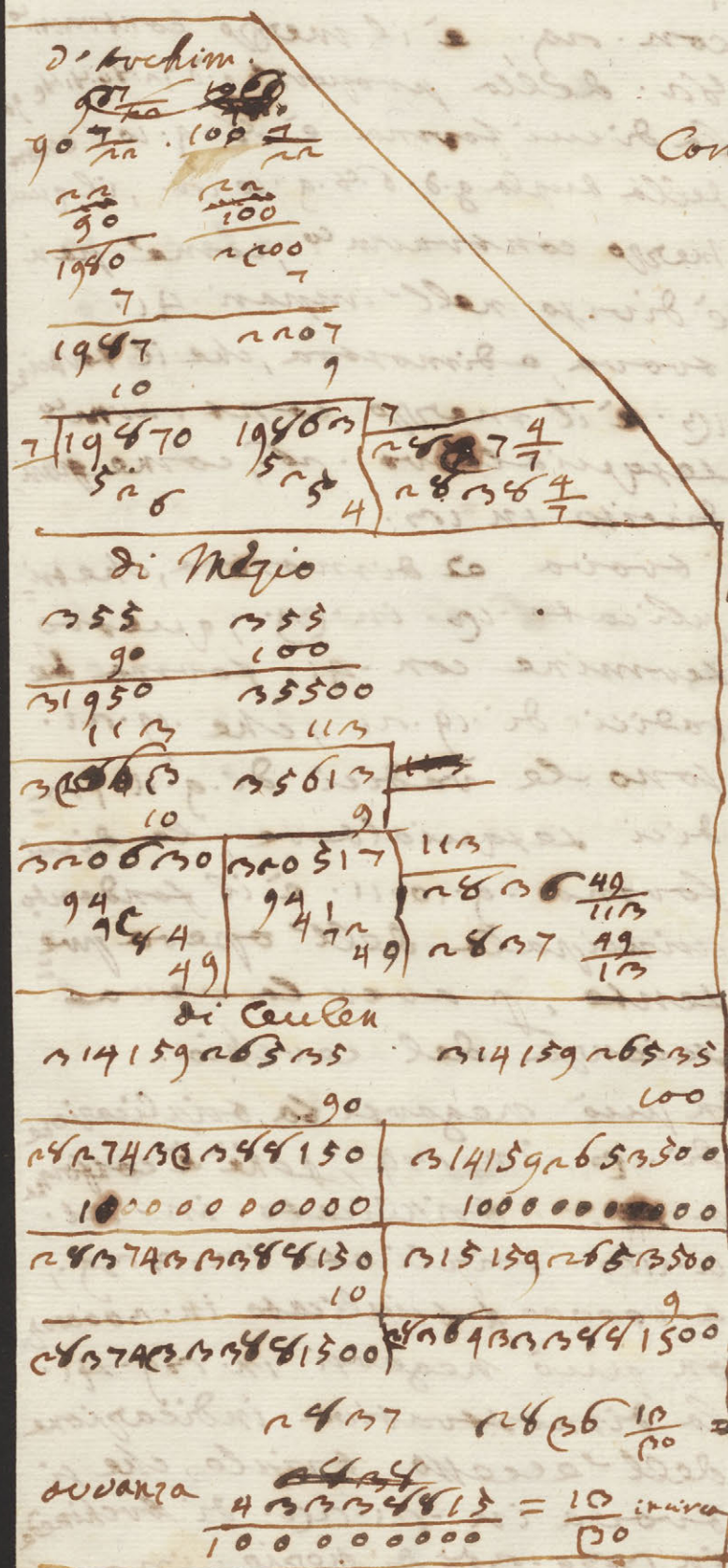
alla vagione 90.100 :: 9.10. le frazioni $\frac{7}{22}$; o. $\frac{113}{355}$. ovvero $\frac{1000000}{3141593}$ la vagione che risulterà, comparata alla vagione 9.10., si troverà prossima alla vagione differenziale 845. 846. Ecco la prova, riducendo le frazi. a denominaz. comune d'interi per maggior facilità, e minor fatica.

Come queste due proporzioni si accostano tanto tanto nella risultanza vagione alla vagione differenziale 845. 846; ma non la inuonovano, nè in precisione nè in differa di unità, come è la regola, a legge di sufficienza: così cercando la frazione, la quale aggiunta alla vagione 90.100. produca una vagione che comparata a 845. 846. si trovi in differa della unità; si trova e si dimostra che assegnata ed aggiunta la frazi. $\frac{113}{41}$ alla vagione 90.100., la risultata vagione comparata a 9.10. sarà in differa della unità con la vagione 845. 846. e la frazione

90 100
41 41
3690 4100
113 113
3703 4113
10 9

3703 | 4017 | 113
11 | 4047 $\frac{6}{113}$
6
96 8446 $\frac{6}{113}$

ciè adunque dimostrato



1016
sup. 31

Rimane il più; ed è di trovare e dimostrare qual principio, e significazione abbiano le fratt. $\frac{13}{41}$; incerta come una ragione. 13. 41. Si trova, e si dimostra, che il termine 41. è termine di radice dupla con. rg. è il mezzo continuam.to Geo. della proporz.e g.d. 7. 20. 41. 82. 90 la di cui forma è -8. g. 10. cotton della dupla g.d. 6. 64. g. 10. 100., il qual mezzo continuam.to, come pari è diviso nell' impari. 41.

10. 14. 15. 16. 30
10. 12. 13. 15

Trova, e dimostra, che il termine 13. è il mezzo continuam.to Sesquialtero. 16., come pari diviso in 13.

Trova, e dimostra, che triplicato. 13. in. 39., questo termine con. 41. forma le radici di. 19. 21., che. 19. 21. sono le radici di. g. 110. proxime Sesquialtere, la di cui forma. g. 10. 11. è il fondamento principale dell' opera presente, per aver la vera scienza del cerchio.

39. 41
19. 20 | 20. 21
19 x 20. 20 x 21 :: 19 x 21
19. 21
19 x 10. 10 x 11 :: 9. 11

Non può negarsi la triplicazione di. 13. in 39, perchè è conforme a. 7. triplicato. in. 21., a. 113. triplicato in. 339., a. 100000 triplicato in. 300000.

Non può negarsi in. 39. 41. la dimostrativa indicazione dell' eccesso triplo, che si trova in. 21. 22. di Archimede in 339. 355 di meno; in

30000 · 31415 9 di Eulero.
Perchè comparando l'eccesso triplo di Merio, e di Eulero, la ragione differenziale risulta in 256 · 257 · e frazi
Questa nulla importando nel caso presente, in cui vi è il bisogno, non di analizzare le frazi: ma di assumere la ragione degl' intieri; e questa dimostrandosi in 256 · 257. meglio antin. e conformità della proporz. g. d. 240 · 255. 256 · 257 · 272. la di cui forma essendo 15 · 16 · 17. fia dimostrata chiusa la circonfa di Eulero in questa forma come cerbro degli effetti 16 · 16 :: C · 5.
Per tutto ciò è dimostrabile, e probabilmente indicato l'eccesso triplo circolare in 39 · 41. onde non essendovi altra diversità in questa comparazione, se non che della quantità materiale negli eccessi di Merio, e di Eulero, e della conformità cagione della differenza della quantità nell' eccesso triplo 39 · 41. questa diversità è tanto più vantaggiosa a questa scienza, quanto è più vantaggioso il sapere la cagione del fatto, del sapere il fatto, senza saper la cagione.

1 2 5
prop. 31

ma più. Costituita la formola
39. 40. 41., e dedotta la pro-
porz.e g. d. 1560. 1599. 1600. 1601. 1620
fatto cenno di proporz.e il
mezzo conoscim.to 1601.; gli
estremi relativi di quantità
sono necessariam.te 1561 1/2 . 1641 1/2 ;
ma la proporz.e g. d. delle posizio-
ni di Euclide 7. 22., e
70. 333.; si è 497. 1561.
1562 . 4900 . dunque e-
stremo 1561 1/2 . relativo
al mezzo conoscim.to 1601,
cade precisam.te mezzo aritm.co
del censo . 1561 . 1562 .
della proporz.e di Euclide
dimostraz.e più chiara, e
precisa di questa è impos-
sibile. Si è assegnata nell'
opera, e qui si ripete al
bisogno del presente caso,
ch'è in altra vista. Se ivi
è dimostraz.e, qui è più
che dimostraz.e

Spiegata la natura della ragione
43. 41., deve spiegarsi la
natura della ragione diffe-
renziale 1847 5/13 . 1848 5/13
Non trattandosi qui di ar-
rivare alla precisione ma-
teriale della quantità, ch'è
nota, ma alla cognizione
formale della ragione, si
valuti la frazione 5/13 di 1/2 .
e raddoppiare la ragione
in interi in 5695 . 5697 .

1641 1/2
1561 1/2
4202 1/2
780 1/2 1/4
1641
9840
4205
1641
256220201 1/4

1561
1601
1601
9900
4860
1664
2578921
1601
1601
1601
96060
1601
256320101

13. Luglio 1710

la ragione

5695 . 5697

⌐647 × ⌐648 . ⌐648 × ⌐649 :: ⌐647 . ⌐649

14⌐3 × 14⌐4 . 14⌐4 × 14⌐5 :: 14⌐3 . 14⌐5

711 × 71⌐ . 71⌐ × 71⌐3 :: 711 . 71⌐3

355 × 356 . 356 × 357 :: 355 . 357

177 × 178 . 178 × 179 :: 177 . 179

88 × 89 . 89 × 90 :: 88 . 90

44 . 45

4 × 11 5 × 9

(4 . 11 / 5 . 9)

4 . 5

9 . 11

la ragione non si troverà altrovata che della unità nell'ultima delle nove cifre ⌐10885849 . ⌐10885850 ; e però da non curarsi.

Essendo . 5695 . 5697 . due impari differenti . 2 . , è dimostrabile ancora che sono radici della ragione . ⌐647 . ⌐649 . Questi egualmente impari sono radici della ragione 14⌐3 . 14⌐5 ; Questi sono radici della ragione . 711 . 71⌐3 . Questi della ragione ⌐355 . 357 . questi della ragione 177 . 179 . questi della ragione 88 . 90 :: 44 . 45 . in cui finisce la serie delle sei ragioni radicali

Qui non si vuol trapassare di osservare che i numeri generatori di 44 = 4×11 ; di 45 = 5×9 ; Li espongano i producenti così 4 . 11 e la linea di relazione 5 . 9 in piano, si converta in linea di relazione perpendicolare 4 . 5 si cambierà la relazione di 9 . 11 4 . 11 . nella relazione di 4 . 5 ; e la relazione di . 5 . 9 . nella relazione di 9 . 11 ; e nelle due ragioni . 4 . 5 ; e . 9 . 11 . si troverà il piano fondamentale di questo supplemento

or si cerchi cosa significhi la ragione 44 . 45 . lasciata

Caso
Sup. 71

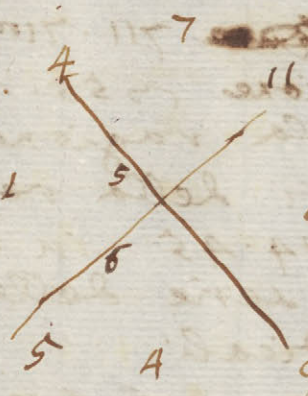
60 · 88 = 90 · 99

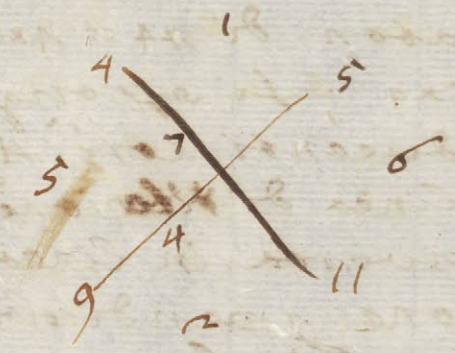
60 × 99 = 7920

88 × 90 = 7920

4 · 11

5 · 9





Sup. 52

1 · 2 · 4 · 5 · 6 · 7

1 · 2 · 1 · 1 · 1

1 · 1 · 0 · 0

0

e nei nuovi termini pari ragione 44 · 90, questa è il diritto di proporre g. d. degli estremi 60 · 99 - Questa è di quella natura di proporzioni i di cui estremi sono sempre merci armonici delle rispettive proporzioni, 60 · media armo. degli estremi 72 · 90 :: 24 · 5; e 99 · media armo. degli estremi 90 · 110 :: 9 · 11.

Se si moltiplichi 4 × 5 = 20; 9 × 11 = 99 i di prodotti 20 · 99 · costituiscono i due lati del triangolo Pitagorico - 20 · 99 · 101; che formando la figura X in 7 11 4 5 6 9 e riducendo le differenze esterne, ed interne, sommando le esterne 7 + 1 + 4 + 2 = 14, e le interne 5 + 6 · in · 11 si ha la ragione circolare di quadrato circoscritto, a cerchio inscritto, e non si cambia questa ragione, sebben si cambi figura, perchè la somma delle quattro esterne 1 + 5 + 2 + 6 = 14, e delle due interne · 7 + 4 = 11, che ed assegnando queste immutabili differenze ordinate 1 · 2 · 4 · 5 · 6 · 7 · e formando un triangolo con le differenze delle differenze, queste si conservano nell'ultimo triangolo 1.1 0 le di cui cifre costituiscono

prop. 52.

la ipotenusa .101. del triang.° Diagonico .no. gg. 101; al di cui termine .no. La somma delle sei diffev.e 1+2+4+5+6+7=25 sta come .5. A., E rimanendo esclusi dal triang.° i detti due ultimi termini .6.7. perche nella 3.a linea si consumano in zero; e però rimanendo il triangolo nella sua sezione come qui avanti; incominciando dalla unità come cuspide del triangolo di cui sia la base 0115, ed assegnando i termini per somma in .L., seconda linea sotto il vertice .1. di .1+2=3 terza linea di .1+2+4=7; quarta linea di 1+1+5=7. si avranno adunque quattro numeri .1.3.7.7. de' quali scrivendo uniti i due primi in .13., i due ultimi in .77., si trova .13. n.° 1 e primo, perchè non ha divisore; Non può essere adunque senon che, o somma dei due quadrati .4+9. come nello consonarm.° della sesquialtera 3.d. il che si dimostra con le radici quadrate di .4.9. e gli essendo .2.3., questa è forma sesquialtera, o le si rigetta; o le si rigetta ai due numeri .6.7 esclusi dal triangolo nella

1.2.4.5
1.2.1
1.1
0

Somnia Pythagorea

1772.

Sup. 32

serie .1.2.4.5.6.7. de' gli lo
fonda è .6+7=13., ma non
di conservam.a natura, come
è intrinsecam.te la fonda de'
due quadrati .4+9., deve
necessariam.te conchiudersi
che appunto a questa cagione
siano esclusi dal triangolo,
acciò il determine .13. non
rimanga equivoco fra due
nature; ma sia determina-
tam.te, ed unicam.te conserva-
monico sequialbero, come
esser deve, e lo sequialbero
è principio primo, attuale
e determinante (ma di ciò
fra poco). ~~Si~~

1.2.4.5
1.2.1
2.1
0.

Si trova poi .77. n.o N.o 4 te
pr.o, ma prodotto dai due
generatori 7×11=77. il che
significa ch'è il prodotto
della vaga ne circolare
7.11. di cerchio circoscritto
a quadrato inscritto.

Incominciando poi nello stesso
triang.o da .5. come sopra
e proseguendo a .4+1=5;
2+2+1=5; [illegible]; a
1+1+1=3; si ottengono
i quattro numeri .3.5.5.5
de' gli prendendo i due pr.i
numeri in .35. ed i due ul.i
in .55; si ha in 35.55::
7.11.

Poi vigliando il pr.o triangolo
rimpiazzato delle differenze

1.2.4.5.6.7

13. Luglio 1770

si dica doppia continua

1.r.9.5.6.7. la quali formano la base in 6. termini; si osservi la parente quadruplicata combinata nelle due primi termini 1.r.4; la parente formata delle radici duple nei due ultimi termini 5.6.7.; e con ciò il principio potenziale, tante volte dimostrato dall'avanti scienza

Indi ritornando al rdo triangolo effetto, la di cui base è 4. termini 1.r.4.5; si osservi che, sommando i due p.i 1+r=3; ed i due ultimi 4+5=9, risulta la tripla che basta dire la triplicata della quadruplicata del p.o triangolo impiegato alla tripla alla tripla nel rdo triang.o effetto;

Ed acciò non si dubiti di questa verità, si sommino 1+r=3; r+4=6; 4+5=9 e si ha la formula tripla 3.6.9 :: 1.r.3. Laddove in questi triangoli vi è la potenza intiera ed elementare dell'antica scienza. Ne negar fatti, e dimostrarli è pazzia. Laddove questi risultati a formulare combinazioni è giocchezza. Che risultati da fatti e dimostrati premesse.

Ma è tempo di concludere la

1124
Sup. 32

dimostrare dopoche si abbia osservato ne' detti triangoli che la ragione circolare 7. 11. si è avuta ne' quattro n.i 33. 5. 5. 5; in 35. 55. :: 7. 11, nei quali 35. 55. si osservino quelle tali proprietà et significazioni, che non si hanno, nè possono aversi in qualunque diverso rapporto fuorchè nella posizione principale della scienza 113. 99; da cui altro dipende soprattutto la posizione 35. 55. dividendo l'impari 35. in 17. 18. ed applicandovi la posizione di Merio 113. 355. sufficientissima al bisogno, ripulsa nella sua differenza 35. 36. degli estremi 30. 42. 5. 7. radici duple originali di ragione certo della Geometria comune che la posizione di Merio 113. 355. non eccede che di due parti diecimillesime in circa; e rispetto a questa scienza, eccede della unità e fuori nella ultima delle cifre 1177666. 1177665

Come mai sarebbe possibile una tale precisione se questa non fosse la vera scienza del cerchio, ed in questa non vi fosse

355	355	113
17	18	55
6035	6390	6215
355	355	5665
5680	6035	550
	6215	6035

5 | 175 . | 180 :: 35 36
35 | —

valm.te quel tale fondamento di vera scienza di ragioni e proporzioni, che inoltra alla scienza comune.

Si è detto che questa ponizione. 35. ~~80~~ 55. dipende dalla ponizione principale della scienza 63.99. Ciò basso è vero q.to che il n.o circolare. 99. essendo il mezzo arm.co della proporz.e 9.d. 90.99.100.101.110., la di cui forma è. 9.10.11., de' di cui termini la somma essendo = 30. si vede chiaramente la relaz.e di. 35. 36.; il termine. 35. al rdo esterno. 110 :: 7. n.; e la somma dei due termini 35+55 = 90. primo estremo della stessa proporzione.

Più. Raddoppiato. 35. in. 70., fra 70.99. si trovano quelle radici duple precise, alle quali aggiunta, o dalle quali sottratta la ragione 9.10. risulta la ragione di Archim.e 7 somma 7.11.; 7 sottratta. 11.14.; e 70.63 :: 10.9.

Più ancora. Moltiplicato 35 x 71 il prodotto è 2485. C'è dunque termine preciso altresì dimostrato della differenza che corre fra le due ponizioni di Regio, e di Archimede. Ivi si è dimostrato 71. somma di. 35+36., e di fatto si trova. 2485. mezzo arithmo

Leyp. 33.

35. 110 :: 7. n.
n.
70
70
770

71
35
355
213
2485

113. 355
n. 7
n20 2485
n20
2486

1775

Sup. CC

1450	1485	1520
35	35	

1450	1520	:: 35 . 36
30	35	
14700	16600	
7350	7560	
44100	44100	

degli esponenti 1450 . 1520 :: 35 . 36 . non arbitrarij ma necessarij, non separabili, ma inconvertibilmente congiunti al termine principale . gg . Perchè dati gli esponenti degli 35 . 70 . il di cui prodotto sia 1450 ; i due medij di proporz.e g . d . sono 49 × 50 = 1450 ; e la somma di 49 + 50 = 99 . Ma dati i due termini 1450 . 1485 e la differ.a 30 . 35 . non può aversi che il termine 1520 . dunque necessarij, non arbitrarij . dunque congiunti alla posizione principale, non separabili ed è dimostrata la stessa ragione . 35 . 36 . risultata dalle differ.e dedotte dalla posizione . 17 . 18 . 35 . in forza della divisione degl' impari 35 . in . 17 . 18 . e la inseparabilità di questa posizione dalla proporzione 90 . 99 . 100 . 101 . 110 . nel rispetto essenziale delle ragioni comuni primitive, cioè ragione duplo radicale, e ragione circolare

Rispetto alla ragion duplo radicale, questa dimostrandosi nel centro . 35 . 36 . degli esponenti . 30 . 42 :: 5 . 7 . prime radici duple originali di ragione, s'intende dimostrata

14 . Luglio . 1770

pag. 53

85 (1787

dimostrate nel suo principio
assolutamte primo

Rispetto alla ragione circolare,
di questa non solamte si dimostra
la origine nel centro stesso
35. 36., ma in oltre di questa
si fa altrettanta dottrina
un altro rispetto ch'è un fatto.
Archimede ha dimostrato il pg.
ℍ poligoni la ragione del
diam°. alla circonfa nell'ecce=
lo in .7. nn., nel difetto
in .71. nnn. si aggiugne a
7. un zero in 70., e la
scienza di ragioni e proposi=
zioni si trova e dimostra
la origine de' due diametri
70. 71. nel centro. 35. 36.
inregabile conseguenza di
tutti quei antecedenti.
Ma si venga alla fine alla con=
chiusione

7. nn :: 70. nno
ℍ 71. nnn

b cotte. 30. hyp. si è proposta
e compruata la dimostrazione
ma non si è dedotta la ultima con=
chiusione. si riprende il piano
della dimostraz.e opponendo
il piano del fatto.

I Geometri principiando da tutti
medesimi hanno cercato la grandez.a
inabitrale della circonfa, a
confronto della quantità
del diam°. col mezzo de' po=
ligoni inscritti, e circoscritti;
e la precisione di Ceulen oltre=
passa ogni aspettazione.

1805
Sup. 353

Ma non è questo il luogo della circonferenza del cerchio, nè ragione della possibilità di costruire la quasi infinitesima differenza nè la qual cagione a priori si trovi la circonferenza triplo del diametro più l'eccesso prossimo nella proporzione di 1 a 3 di ar. ra., di Merio di 3 a 7 sg. 355., di Ceulen di 3 00000 e a 3.14159 &.

In questo piano è adunque un fatto che si è cercato il termine materiale della quantità nel cercare la quadratura del cerchio, nè mai si poteva pensare a cercare non il termine, ma la ragione, perchè sempre nè falsamente rapporto che dai termini anteriori di quantità si abbiano le ragioni a posteriori, come conseguenze di un antecedente, effetto di cagione.

Questa scienza è il contrario rapporto, e dimostra, le ragioni essere il proprio valore, entità reali a priori, ed il no. essere il loro segno reale a posteriori come verbo di quel corpo, anzi meglio, come corpo di quelle forme. Perciò cerca non in un solo termine o in numero, impossibile

ritrovarvi, ma in una
ragione, la quale si esprima
in prova due termini, o due
numeri.

Stabilito questo, propone di-
mostra che alle radici duple
non comuni, ma sue
proprie; non di quantità
ma di ragione, aggi-
unta, o sottratta la ragione
g.co., a ragguaglio della
verificazione sempre magg.
delle radici duple fino a
70.gg.140; la ragione
risulterà dalla somma
o dalla sottra, s'incontra
con la ragione d'ochiende
la somma in.63.gg::7.11
di quadrato inscritto a
cerchio circoscritto; la sottra
in.gg.106::11.14. di cerchio
inscritto a quadrato circoscrit-
to.

Con ciò resta ivi dimostrato,
che rispetto alle pt. radici
duple originali.5.7. la pre-
cisione del più, e del meno
di.gg. è negli estremi
gg.100 prossimo di unità
poiché come pari risolvendosi
la metà in.47.45 gg.50.
questi due termini costi-
tuiscono il centro di pro-
porz.g.d. degli estremi
65.70::5.10:: poiché 49×50
=1450=65×70.

1770

sup. 33

Conseguenza regola dimostrato che la vera e precisa quantità materiale del termine gg. dando vicevata dalla Geometria, applicato alla ragione circolare formata dagli estremi 63.100. è necessariamente ed esattamente chiusa nella ragione formale 98.100 :: 49.50.

sup. 34.

Per intendere la forza di questa dimostrazione conviene avvicendarsi della dimostrazione assegnata nell'opera sul centro sequialtero. 4.5.6., sommando i due termini 4+5=49, e 4+6=50; 5+6=51. Negli estremi 49. 51. si hanno le radici 4. 6 :: 10. 13., e nei tre termini 49. 50. 51. si ha in precisione ciascun termine relativo alle radici duple di questa scienza

49 . 51
4×13 . 5×6 :: 4.6

che 49 = 7×7. adunque il medio relativo agli estremi duplicati 5. 10. Il termine 50 = 5×10. adunque estremi relativi al medio 7. Il termine 51 = 3×17. adunque 17. medio relativo agli estremi 1.4. moltiplicabili per tre 1.36.72. dei quali è medio 51.

14. luglio 1770

Conviene

Conviene parimte avvicendarsi che il cerbio .n5-06. degli sperami .n0.4n :: 5.7. ha relazione di radici duple con i reddetti ore cervini 49.50.51; che 49.50, rispetto a .n5. meglio avvno hanno doppia relazne di 5.7, e di 7.10; e .n0. meglio avvno a .51 :: (n.17

Conviene avvicendarsi, che sommando i ore cervini 49+50=99; e.49+51=100. 50+51=101. si hanno i ore merli avvnonici 99.100.101. degli sperami 90.110 :: 9.11; cosicchè rivegga la indissolubile catena di queste cerbi, e distintamte la risoluzione degli sperami 99.101. negli sperami del cerbio sesquialtero .n4.06 :: (n.(n3, de' quali (n4.n6) essendo radici .49.51; è forza che le radici delle radici siano 99.101.

n4.n6
49.51
n4×n5.n5×n6 :: n4.n6
99.101
49×50.50×51 :: 49.51

Conviene finalmte avvicendarsi, che nei ore cervini 49.50.51. si trovano i due cervini precisi dei due diametri del più, e del meno di avchinde 70.71 i quali ai cervini .49.50.51 sono necessariamte relativi in radice dupla; che di 49. la radice quadrata è 7.

70.71
35×n2.n5×n6 :: n5.n6

1772

pag. 34

preciso diam.° di Archimede in .7. rr. , che 71 è somma di .35 + 36. somministrati il cenno degli estremi 30. 40 :: 5. 7; che in specie il termine .30 ha la origine decimale da .5×10. , che nella origine decimale si trova il diametro di Euler , che la circonfa. di Metio . 355 . si trova prodotta da . 5×71. che vuol dire da due termini di radici duple & habbia tutto ciò presente e ben inteso e comprep: si divida il termine impari .99. nei due termini .49.50 . e co'l mezzo delle differe dedotte dalla proporzione di Metio sufficientemente al bisogno, si cerchi qual ragione risulti rispetto a .63. termine circolare, relativa a .99. C.° ag.° è in mag. risolvendosi la differe rr7. rr35 in .10. 13. in differa della unità frà rr610. rr611. che vuol dire in quella tal ragione differenziale, ai di cui termini non arriva il cubo, nonchè il quadrato di .10. termine maggiore,

45rr	45rr	rr355
49	50	63
4064	rr600	10065
1408	rr365	rr130
rr1456	rr235	rr365
	10	rr1456
	470	rr7
differe comparate	rr235	13
	rr610	651
		rr7
		rr611

è possibile si faccia precisa
mente non se è vera quanto
sublime scienza questa delle
ragioni, e proporzioni:
Fuori di questo fondamento
è egli possibile la conse=
guenzione del conseguente
comune che è 3055 = 1331 m 25
con il prodotto 101 x 121 =
12221: divito per 4. in
3055 1/4; e si trovi
101. mezzo convenient.
della stessa proporz.
di cui. 99. è il mezzo
arm.co; si trovi. 121.
mezzo aritm.co fra gli
estremi. 110. 132. de gli
110. è estremo comune
dei mezzi 99. 101; si trovi 99. 121
:: 9. 11; e il conseg. la prop.
fondamentale. 9. 10. 11; si
trovi moltiplicata per 11
in 99. 110. 121
Nè osta l'assegnazione di
101. 121. invece di. 50 1/2. 60 1/2
de gli è immediato il pro=
dotto 3055 1/4.

101 121 — 35 13 — 105 235 — 3055

4 | 1 — — 21 — 3055 1/4

Da questa scienza non ammet=
tendosi frazioni &
il centro 48. 49. della sequi=
~~poteva~~ deva g. d.
4in. 46. 49. 50. 56. in qualche cap
si trova equivoco col cevero
24. 25. 26. della sequiale deva g.
20. 24. 25. 26. 30. Trovandosi
24. 48; 25. 50. in ragion riddupla

la ragione r4.r5. si trova comune al centro inferiore delle due proporz.; e ciò equivoca.

Ma quando si fanno vedere uso de' centri di g. e la natura dei termini, che g. la loro somma, si distingue la natura il merito a riguardo di 50 doppio di r5 della sesquialtera, dal merito contrario di 50 della sesquiz.a

I distinguono poi fra loro con più facilità come va detto di g. la loro somma, perche quella chiaramente dimostra la specifica differenza che corre, nè vi è adito di equivoco

Sommati i due merti del centro sesquiterzo .48.49.50 in 48+49=97; 49+50=99. sono 97.99 le prime radici degli estremi 48.50 :: r4.r5.

97.99
48*49.49*50 :: 48.50

Sommati i due merti del centro sesquialtero .r4.r5.r6. in r4+r5=49; e r5+r6=51; sono .49.51. le prime radici degli estremi r4.r6 :: r5.r6

49.51
r4*r5.r5*r6 :: r4.r6.

Perciò è chiaro che il termine 51. non ha, nè può aver luogo nel centro sesquialtero, il di cui estremo magg.re è 50; o. r5. Ed ugualmente proseguendo la deduzione delle radici

14. Luglio. 1770

99 - 100

49·50 · 50×51 :: 49·51

Lup. C5

96·100 :: 16·17

17	16
672	612
96	102
1072	1632

delle vadici di 49·51· in 99·100 quì non ha luogo il secondo 97· dedotto dal centro sesquiz°. nella somma di 48+49=97.

È vero bensì che negli esponenti 96·100 :: 16·17· si contengono tutti i mezzi rispettivi dei due centri; perche in 96·100 si contengono gli estremi, i mezzi, e le vadici del centro sesquialtero· 48·49·50·; ed in 96·100 gli estremi, i mezzi, le vadici, e le vadici delle vadici del centro sesquialtero· 24·25·26· ma il centro sesquialtero è il contenente, il centro sesquiterzo è il contenuto; perchè l'uno, e l'altro centro avendo il p° esponente comune 96· (indi necessariamente inscrivibile da buchinede il p° poligono di lati 96) non hanno altrim.ti comune il dio in 100·100· come adunque è magg.r ragione 96·100· della ragione· 96·100, così si dice, e si verifica, che il centro sesquialtero 96·100 :: 24·26 :: 12·13, contiene il centro sesquiterzo 96·100 :: 48·50 :: 24·25

Ciò premesso, e spiegato come dobbiamo a priori, si verifica nell'uno, e nell'altro centro la deduzione a posteriori dei tre diametri di buchinede, herjo, e Ceulen·

1256.

Sup. 35

Perchè 48. 49. 50. sono numeri comuni de due cerchi, e nella radice quadrata 7. di 49. è fondato il diametro di Archimede, come nella quadratura di 5×10 = 50. è fondato il diametro di Ceulen in 10. 100. 1000 &c.

Nella relazione poi dell'estremo sesquitero al cerchio totale 48. 49. 50. è fondato il diam.o di mezzo. 113. come somma di 56. relativo ai due mezzi 48. 49; e di 57. come relativo ai due mezzi 49. 50. Indi 56+57 = 113.

Ciò si dimostra con tutta chiarezza. Perchè data la forma. 14. 15. 16 e dedotta la proporz.e q. diviene 110. 1224. 1225. 1226. 1240. il mezzo convarm.co, cioè 1226. doppio di 113. a confronto del mezzo avm.co 1224, doppio di 112.; e gli estremi 14. 16 della forma, essendo :: 7. 8. è chiaro che 7×8 = 56; il di cui doppio è = 112.

Non si vede a primo aspetto nel cerchio sesquitero il fondam.to della deduzione del diametro di mezzo, poichè in niun modo appare il determine 56; fondam.to della dedotta. Ma se, come data la duplicata con i due mezzi, avm.co e convarm.co in 3. 4. 5. 6; e congiunti si trova 3+4 = 7; 5+6 = 11.

quadrato inscritto, rendo circolare

si ha in .7.11. la ragione circolare di Archimede: così data la sesquialtera con i due soli mezzi, arm.co e convesso m.co in .10.12.13.15.; a congiunti il primo .10+12=22.; 13+15=28.; si ha la ragione stessa circolare inversa in 22.28 :: 11.14. in .11. cerchio inscritto, 14. quadrato circoscritto.

Adunque se 11. è determine originale in .22. nella dupla g.d. 6.8.9.10.12.; sommando 6+8=14; 10+12=22.; sarà adunque determine semplice originale 50 (=4×14) nella sesquialtera g.d. 20.24.25.26.30. sommando 20+24=44; 26+30=56.

Vi sarà unicamente la specifica differenza che corre fra le proposizioni determinate da due soli mezzi, e le determinate da substituzione i mezzi: ma questa differenza è vantaggiosa alle prime, perchè queste precedono in priorità di natura le seconde, chiaro essendo che la dupla proposizione 3.4.5.6 sarà prima di natura della dupla 6.8.9.10.12. quanto gli estremi 3.6. della prima sono prima de' doppj estremi 6.12. della seconda.

Ed è altrettanto chiaro che la serie delle prime si ha dalle forme semplici 1.2; 2.3; 3.4 e delle seconde si ha dalle forme compos-

1.c.38
nep. 35

40.46.49.50.56
56.63.64.65.7a

1.c.13; c.3.4.C

spiegato a sufficienza la dottrina della originale natura de' sei diametri: a questo si congiunga la dottrina de' ne ha dalla prop. 21. g.d. 48.54.56.63; i diametri estremi 48.63. sono due medii armonici. Qui si abbia presente il termine 55. medio aritm.co fra 54.56, nel quale come relativo circolare a 55. diviso in 17.18: si è fondato qui sopra a cagione della hyp. la dimostraz.e delle differenze 55.(36., e si vedrà ben chiara la concatenazione del termine 56. nelle sue relazioni a tre a quì assegnate proporz.i

Ora si cercherà con mano, la formando 54+55=109; 55+56=111; si veggia medio aritmetico fra 109.111. il termine 110. estremo da proporz.e g.d. 90.99.100.101.110 ch'è la fondamentale della scienza della sua forma 9.10.11; e si rifletta che al termine 111. corrispondendo il termine 37., medio conservm.co del genere 35.36.37. poiche 3×37=111. al termine 111. deve trovarsi il termine reale corrispondente nello stesso proporz.e 90.99.100.101.110, relativo con 111. alla ragione formata dai due medii aritm.ci 100, conservm.co 101., come gli estremi 90.110. sono relativi alla ragione formata dai due medii

111/3 = 37

14. Luglio 1770

avm^co. 99., aiom^co. 00. Vi sarà bensì 90. 110 incompleba fra ~~i due mezzi~~ la diversità delle due relazioni nella quantità, completa fra i due mezzi avm^co. ed aiom^co, ed i due ~~mezzi~~ estremi 90. 110., incompleba fra i due mezzi aiom^co., e convavm^co. ed i due estremi 90. 111. ma questa procedendo dal mezzo convavm^co. che di propria natura non è capace di quantità completa, rimane inalterabile la legge di questa scienza nelle due necessarie relazioni alle due diverse ragioni del censo, benchè l'una di quantità completa, l'altra di quantità incompleta.

Ciò si ripete al presente bisogno, benchè questa legge sia universale della scienza, e nell'opera intiera stati continuam^te osservata.

497	1561	1561
355	113	113
485	4683	4680
485	1561	1561
1491	1561	1561
176435	176539	176506
176393		176435
42		71

ma non bastano all'Autore le ricavate dedotte dalla propria scienza. Ispire molto più le ricavate dedotte dalle scienze comuni.

Egli adunque propone per comune reciproco fondam^to la propos^e di Archimede 490. 1561. 1561. 4900; da cui con la posizione di Mezio molto più esatta deduce le differenze.

Chiede l'Autore perchè 113 (somma

1240
sup. 35

dele differenze) divisibile in varii modi, e rispetti, qui nelle differ.e (primi essenziali componenti) si divide in 4 ca. estremo della proporz.e g.d. 30.35.36.37.4a.; ed in 71. somma de' due termini 35+36. del centro complesso degli estremi. 30.4a.:.5.7. Perche dividendo il pari 4a. in. a1×a1 = 441; l'impari 71. in. 35×36 = 1260, moltiplicando p. tripla il termine 441. in. 3×441 = 1323; fra 1260, e 1323. si trova la ragione differenziale complessa. 20.21., la quale (come si è dimostrato altrove) congiunta con la ragione. 14.15. costituisce i termini differenziali della duplo g.d. 35.49.50.70.e

35.49 . 35.50 . 50.70 . 49.70
differ. 14 15 20 21

tico il fatto
Perche questa stessa ragione. 20.21. s'incontra estremo comune de' due centri totali 15.16.17. centro totale degli estremi. in. 20.:.3.5; e 24. 25.26. centro totale degli estremi 20.30.:.2.3. - coricche formando i termini dei due centri, si trovano. 39.41. radici di 38.4a.:.19.21; si trovano 41.43 radici di 40.44.:.10.11; e posto assegnate le radici 19.21; 18.20 :.9.11. finalmente i due centri

15.16.17
24.25.26
39.41.43

sobali si risolvano in g. 10. 11.
ch'è la proposizione fondamentale della vera scienza del cerchio.

Per magg. intelligenza qui si ripete ciò che si è spiegato altrove. Si dice dall'Autore cerchio bobbe a differenza delle comuni proposizioni g. d., il di cui cerchio è costituito da due soli termini come mezzi determinanti la uguaglianza delle vagioni, e della quantità, ma non determinati a propria specifica natura di mezzi. Le proposizioni g. d. di questa scienza hanno benissimo lo stesso cerchio nei due mezzi, aritmetico, ed armonico, il quale determina la uguaglianza delle vagioni, e della quantità; ma altre questi due mezzi specificati ad individuo natura, hanno necessariamente il 3° mezzo, ch'è il contr'armonico, non relativo alla uguaglianza delle vagioni, e della quantità, ma sostanzialmente relativo ai triangoli Dibagonii, come a lungo si è nell'opera scritto, e dimostrato: Capo di scienza che manca assolutamente alle scienze comuni.

Da ciò procede la necessità dei tre mezzi specificati, e non di due non specificati a natura perchè dei due armonico ed aritmetico la ingegnosa si è la uguaglianza

1r 42r

Prop. 53ª

delle vagioni, e della quantità ma di tutti i tre mezzi la inspezione fa è il Triangolo Diagonico relativo.

È dessi vero che rispetto ai due centri, formati dai tre mezzi in due vagioni, sono ripetuti, cambiate necessarj doppj estremi, cioè dato, p. es., la setquialtera g. d. no. 24. 25. 26. 30; come agli estremi no. 30 sono relativi di vagione e di quantità i due mezzi armco. 24., aritmco. 25. così fa assegnare ai due mezzi aritmco 25; conseguentemente 26. gli estremi relativi, e fuori aggiugnere la unità a no. 30, facendoli. 31. ed allora la vagione no. 21; e. 30. 31. s'intendono relative al centro totale. 24. 25. 26.

Ma fatà è dev'essere necessariamente vero, che in tal relazione trovandosi il mezzo contraarmco, non si trova, nè può mai ritrovarsi uguaglianza di vagioni, e di conseguenza di quantità.

Vi fatà sempre la differenza della unità nei prodotti, inseparabile dalla contraarmonica natura

Nè questo è già difetto della proporz., anzi fa lo conoscano anzi questo è un capo di scienza che conduce dimostrativamente alla cognizione

21. 25. 26. 31

26	21
150	31
50	651
650	651

14. Luglio. 1770

alla scoppa delle prime originali
nabuve, contenute nella
essenza dei ove merdi; cioè
nel merdo aum.o la nanuva dello
bello; Nel merdo anom.o la
nabura del diverso; e nel merdo
conovam.o la nabuva della
sopranza, come si vedrà nella
Fisica di questa scienza.

E se le scienze comuni sono prive
di questi due sommi capi di
scienza, che qui sono nulla
più, che pavti integrali
dell'armonica scienza, o sia
dell'anomebica de' Filosofi:
Come mai è possibile che in
quelle vi sia fondamento
veruno di rispondere adegua=
tamente alle istanze presenti
dell'Autore?

Ciò premesso, e spiegato, acciò s'
intenda chiaramente cosa voglia
dire l'Autore quando dice
centro tabale, ripiglia le
istanze con sempre maggior
insistenza.

Perchè nella ragione ro. ri.
e nella ragione del centro
35. 36. degli estremi 30. 42
:: 5. 7. si trovano le prime
radici della tripla in. roxri
= 420, ed in 35x36 = 1260;
e 420. 1260 :: 1. 3.

Perchè nella stessa ragione
ro. ri., e nella ragione
15. 16. del centro degli estremi

35. 36
1Qx1 46x18 ::
ro. ri

ro44
Sup. 36

in. ro :: 3. 5. s' inuenuano le precise radici di vagione della tripla in. 15x16 = ro40 ed in roxri = 4ro ; e. ro40. 4ro :: 4. 7 ; diuito il pari in rixr = 4 ; e l'impari in 5x4 = 1r è chiaro che 4. 1r :: 1. 5.

19. r1
9x10 . 10x11 :: 9. 11
4x5 . 5x6 :: 4. 6

ma più . Perchè dalla fourna ~~xxxxx~~ 19. ro. r1. , i di cui esbremi sono le radici della vagione . 9. 11. dedotta la proporz. 9. 10 ~~. 10. 11~~ 380. 399. 400. 401. 4ro. , e soggiunti i due esbremi 361. 421. relativi al centro fournato dai due mezzi arithmici 400 ; conuarranno 401. assegnato il termine circolare in. 1ro60. , ch'è il prodotto di roxbb = 1ro60. (in ro= dice roxr1 = 4ro, e 3x4ro = 1ro60) ed a cui, senza il zero, è relativo di vagione circolare il termine. 99. il quale a. 1ro. è :: 11. 14. ; a bb :: 11. 7 e con la portione di mezzo 113. 355. ~~sufficiente~~ sufficientemente al presente bisogno, dedotte le differ. 7075. 7125, le quali . 5. diuisore comune, si riducono in. 1413. 1425. ; onde, si replica, questi due termini, come radici, conducono completam.te, e dimostrativamente il centro. 35. 36. Ecco la operaz.e delle differenze

sup. 36.

361	4 ☐	1 ☐ 60
☐ 55	☐ 55	113
1905	☐ 105	☐ 3780
1905	☐ 105	1 ☐ 60
1143	1 ☐ 63	1 ☐ 60
135 ☐ 55	149455	14 ☐ 340
	14 ☐ 380	135 ☐ 55

5 | 7075 — 5 | 71 ☐ 5

5 | 1415 — 5 | 1405

4 1 — 4

☐ 463 — ☐ 85

Ecco parimente la dimostrazione delle radici ☐ 863. ☐ 85. radici della vagione ☐ 81. ☐ 86. :: 141. 143. radici della vagione 140. 144 :: 70. 7 ☐ :: 35. 30. Dunque Non volendo soverchiare con altre istanze, giacchè queste bastano al bisogno: Fin quì ti rispondeve adeguatamte alle medme, è dimostrativamte cerca la necessità della posizione del mezzo contoarmo; e della nozione della di cui natura, ed uso; è dimostrativamte cerca la necessità della intelligenza, ed uso particolare delle differe; è dimostrativamte cerca la necessità della vagione formalmte intesa, e non di un termine materialmte inteso; è dimostrativamte cerca la necessità delle proposizi di questa scienza, e non delle proporz. della scienza comune; è dimostrativamte cerca la necessità dei triangoli Pitagorici, inseparabili dal centro totale delle proposizi di questa scienza; è dimostrativamte cerca la necessità d'intendere le vagioni nella loro forma a priori, e così le proposizi; e si vuol dire quando, p. es., si assegnano le radici della forma sesquialtera ☐. 3. in g. 11., devono

n.246
Sup. 136

queste insendevoli radici di tutte le sesquialtere, nella impossibilità, che siano espresse in pochi, o molti numeri; più in g.to, che in - no - no g; perchè tutte le sesquialtere si risolvono necessariamte nella forma n.3. ch'è la forma a priori ma in altre vi è la necessità d'insendere nel loro sistematico universale legame, in cui di fatto si trovano nel numero fra loro dispotte, e congiunte; sicchè in massimo apprendo il collocare la forma sesquialtera, fuorchè fra le due forme, dupla anteriore 1.2. e sesquiterza posteriore 3.4.

Così regualmente in massimo apprendo il collocare la sesquialtera g.d. no. 24. 25. 26. 30 fuorchè fra le due proporz.ni pubipotiende. 3a. 12. 15. 16. 17. 20 e pubipotiende. 5a. 30. 35. 36. 37. 42

Così essendo; è tutto ciò pontivamte mancando a tutta affatto le comuni scienze dimostrative: Troppo è chiaro che nessun matematico può rispondere nemmeno ad una, nonchè a tutte le istanze dell'autore.

Ma le istanze dell'autore sono addotte da fatti positivi, e reali qui scoperti ad esposti agli occhj di tutti; E questi fatti

14. Luglio. 1770

fatti dipendono da principj positivi, e reali di scienza, ma equalmte. qui noti, ed opposti agli occhj di tutti. Che adunque deve concludersi. = Nell'albero cercamte, che la realità di una scienza, quando presentasi ignobile, altrettanto vera, necessaria, e suprema fra le scienze dimostrative.

Quando rimane dalla parte de' dotti si è una specie di rappresaglia con quelle istesse che da essi possono farsi all'Autore su quei punti che o si oppongono alle idee comuni, o sono difficili a concepirsi nella idea dell'Autore.

Fra questi punti è di subietto principale la posizione dei due termini ☉☽.gg. della ragione circolare, proposta dall'Autore come assolutamte prima, e fondamentale del suo sistema. Non può intendersi come essendo gg; per l'Autore, l'individuo carmine del cerchio, ed essendo tale, perchè deve assegnare e dimostrare la natura, ed origine del cerchio, razionale di quantità, mezzo avvco. della proporz.e, dedotta dalla forma g.10.11. come radice sesquialtera ne' suoi estremi, somma della

2a46

Prop. 36

tripla armonica 63.2; la quale in gg. è costituita per somma dai due termini 54.27.18 a confronto potrà trovarsi 63. medio armo., e però specificato all'armo. natura, quando dallo stesso autore si dimostra che la conversione dei termini converte la natura; sicchè se gg. sia essenzialmte armo. e razionale, sia dimostrativamte impossibile che 63. sia eguale armo. e razionale.

Se dato il quadrante BFDC, lo stesso autore il termine, o dell'area del quadrante rispetto all'area del triangolo, o la circolare BDC rispetto alla retta BFB deve essere eguale a gg. come razionale, e specificante armo. ma si dimostra in 63. a confronto di gg., proposizione che in numeri primi si risolve nella proposizione 7.11 (:: 63. gg.) di Archimede



Prop. 37.

Nè a questa contradizione ripara il dire che egualmente 63. è somma di 31+32., ed egualmente somma di 20+21+22., eguale contradice sì con 61. della ragione 60.64 :: 15.16 sì con 65 della ragione 31.32 contradice della ragione 15.17.

Eudemo; ripiego

61. 63
30x31. 32x32 :: 30.32
63. 65 :: 15.16
31x32. 32x33 :: 31.33.
15x16 :: 16x17 :: 15.17

Qualunque ripiego si prenda per
abbracciare la irrazionalità del
termine 63, non salverà mai
la contradizione insita nell'ann.a
natura del termine 63; ch'essendo
il prodotto di 7×9 = 63. è un in=
diabo prodotto di forma di ra=
gione ch'è g se un principio
armonico a priori g sentenza
dell'humore e g la formola stessa
della deduzione del mezzo ar.co
che in essenza è sempre il prodotto
de' due termini della data forma.
Molto meno giova il ripiego di
alzare la quantità inabile
del termine 63., che rispetto alla
vera incognita quantità, a cui
deve ridursi, g determinare col
termine 99. del cerchio, che si
suppone innalzabile la precisa
compensata ragione, in cui devono
essere fra loro questi due
termini 63. 99. conviene al=
zare di quanto come termine
di quadrato inscritto, è mancante
rispetto a 99. ch'eccede, come
termine di cerchio circoscritto
se g l'humore il termine 99. come
ar.co, e razionale è inalte=
rabile, ed il nuovo individuo
del cerchio, e g l'humore si
deve convertire, e trasporre
tare la irrazionalità nel
quadrato, l'alterazione deve
necessariam.te trovarsi nel termine
63. del quadrato, il quale g

1750

sup. 37

le scienze comuni supponendosi di quantità variabile rispetto a gg. invariabile, in questo punto le due scienze convengono insieme fra loro.

Ma ciò appunto rende molto più manifesta la contraddizione, che vi è nel termine 63. come avm.o la sola è l'essenza, come può essere capace di alterazione, a confronto di gg. che appunto g essere avm.o si definisce inalterabile dall'Autore, e si appropria al cerchio, come suo termine individuo e di precisa consumata quantità.

Ma oltre se la scienza proposta dall'Autore sia realmente la vera scienza del cerchio, la prova di questa verità non può essere che la dimostrazione della precisa consumata ~~verità~~ quantità, non di uno, ma di due termini corrispondenti a ragione circolare.

Se dall'Autore si pretende che questa sia la scienza a priori della costruzione del cerchio, è debito indispensabile di questa scienza, o di assegnare i due termini nella loro quantità consumata, e precisa; o di assegnare a priori la cagione, a cui debba necessariamente rispettare un termine consumato, e preciso, e l'altro incapace di tale natura di quantità.

15. Luglio 1770

Così vi torcete

Così vi sarebbe in questa scienza
o il vantaggio di sapere una
volta la quadratura del cerchio,
se i due segmenti siano capaci di
quantità consumata, e precisa;
o il vantaggio di saperne una
volta la impossibilità della
quadratura del cerchio, se di
tale quantità non sia capace che
un segmento solo; ed in ogni
modo si avrebbe il vantaggio
di sapere a scienza l'una cosa
o l'altra.

Ma che da una tale scienza nulla
più si abbia che la conversio=
ne dei due segmenti della ragione
circolare, cosicchè ammettendo
ancora il supposto dell'Autore
nulla più risulti che il seg=
mento del cerchio, o della ci=
conferenza razionale e precisa; il
segmento del quadrato, o del
diametro irrazionale, ed inca=
pace di precisione, basta, e
meglio si ha dalla Geometria
comune col mezzo de' poligoni
inscritti, e circoscritti

Che poi rispetto alle ragioni, e
proporzioni espresse col N.o comu=
ne vi siano in questa propo=
sta scienza molte vere, non
può negarsi, essendo un fatto.
Ma non si vede la necessità di
separare questi lumi particolari
dalla scienza comune delle ra=
gioni, e proporzioni, a cui bene

1752
Sep. 27

possono aggiungersi il costituire una scienza compiuta, e il peggiore alle confessate mancanze delle scienze comuni

Ma questi lumi parziali non conducendo all' intento principale ch' è la scienza del cervello, oltre il vedersi la manifesta contraddizione, nulla più, nulla meno si sa di quello si sapeva della vagione circolare. Si vede la nulla necessità di far capo di scienza la scoperta di quei lumi parziali che non conducono altrimenti ad una scienza ~~parziale~~ a priori del cervello, ma si risolvono, e si congiungono con la scienza comune delle vagioni, e proporzioni

Se l'huomo in questa specie di vappresaglia facia la loro parte con tutta la forza, e fedeltà, se 'l vaggano essi, applicandoli con sincerità che nulla risparmierebbe a facer loro corso se stesso, se vedesse, o intendesse più di così. In questo dunque si scia-
& magg.r chiaramente si distinguono i capi della istanza, e sono cioè I. I due termini 6.5.gg. come incompatibili fra loro II. La ritrovabilità del termine 65. come contraddizione. III. La qualità della scienza, rispetto

pep. 34 ed altrove

alla obbligazione, o di assegnare dimostrativamte i due termini della vagione circolare nella loro precisa consumata quantità; o di assegnare dimostrativamte la origine della impossibilità di tale assegnazione.

Rispetto al p.o Capo, è vero che i due termini 63.99. sono ugualmte meri avm.ti delle rispettive proporzioni, ugualmte razionali, ed egualmente dipendenti dalla formola, che li determina essenzialmte armonici. È adunque vera la conseguenza, che in tali rispetti sono ugualmte immutabili, ed incapaci di alterazione. Ma è poi altrettanto vero (ed è una verità di fatto) che la essenza di sistema, la forza di serie, la necessità di natura a priori dei due termini 63.99., il p.o è, ed esser deve alterabile; il che non è, nè può esserlo in modo veruno.

Se l'Autore ha fin qui bardato a scoprire, e proporre quel tal fondam.to di questa scienza che come fatto, è omninamte descrittivo, e come dottrina è affatto illuminativo di quanto si contiene nell'opera, e nel supplem.to, ha creduto che questo

1254

Imp. 38. ult.

L'ordine migliore sarebbe principiare dalle più luminose verità

1. 3. 4. 5. 6
6. 8. 9. 10. 12
12. 15. 16. 17. 20
20. 24. 25. 26. 30
30. 35. 36. 37. 42

pia l'ordine migliore, per disporre le gente a lasciarsi convincere.

È un fatto che cinque sono le riflessabiche proposizioni della vera scienza del cerchio. È un fatto che di queste cinque proposizioni sono i cinque mezzi contrarmonici 5. 10. 17. 26. 37. È un fatto che sommando 5+10=15; questo s'incontra col mezzo armo. 15 della 2da proposizione; sommando i due ultimi 26+37=63., questo s'incontra col mezzo armo. 63. della proposizione 9. 56. 63. 64. 65. 72.

È un fatto che della 3a proposizione che è la mezzana, non prendendo il mezzo contrarmo, ma quadrando i due termini del centro 15. 16 in 225. 256; aggiungendo a ciascun prodotto la unità in 226. 257. che vuol dire due mezzi contrarmonici, sommandoli in 483, questo termine s'incontra col mezzo armo 483. della proposizione 9. di cui forma 241. 242. 243.

È un fatto che l'eccesso triplo di Archimede è dimostrato in 21. 22. rispetto al diametro 7. circonfa. 22.; e però è un fatto, e dimostrazione che nel centro 483. 484. 485. degli estremi 462. 506 :: 21. 22. è necessariamente rinchiuso

15. luglio. 1770

Supp. 536. vlt.

rinchiuso il mezo, ed il più della vera quantità circolare nell'esagono triplo di Archimede n. aa., di Metio. 3539. 355., di Ceulen. 3000000. 3141592, e di qualunque possibile posizione di diam°. e circonfa.

È finalmente un fatto che gli estremi delle sopra assegnate cinque proporz.i g. d., estendosi da .a. fino a .4a. quadrando ciascun termine di detta numerica serie da 1. fino a .4a. ed aggiungendovi la unità a ciascun numero quadrato, e determinato mezzo convarm.o, formando due mezzi qualunque di questi che siano in radice di quadrato, previnti della unità, non si trova altra somma che s'incontri con un mezzo arm.o, se non che .15. somma dei .5 to. più 1. de' due quadrati .4. g. dei quali .1. 3. sono le radici; 63. somma di .36+37., più 1. de' due quadrati .25. 36; dei quali .5. 6. sono le radici; 4863. somma di .256+257. più 1. de' due quadrati .255. 256 de' quali .15. 16. sono le radici.

È adunque un fatto, che ciascuna delle cinque sistematiche proporz.i concorre in questo fenom° dimostrabile; la terza nel suo mezzo convarm.o 2.

la duplà nel suo termine 10
mezzo contrarm.co; la sesquialtera
3a. nel suo centro 15. 16. la
sesquialtera nel suo mezzo
contrarm.co 16; la sesquiterz.a 5a.
nel suo mezzo contrarm.co 17;
E fuori di queste cinque pro-
porzioni questo fenomeno resta
escluso da tutta la estensione
de' numeri compresi fra 1. 4.

Stabiliti i fatti, è certo, che in un
fenomeno di tal natura
non ha luogo veruno lo
scandaglio della quantità
materiale, ma unicamte. ha
luogo lo scandaglio della natura
del mezzo contrarm.co, e delle
ragioni, delle quali è mezzo
Rispetto alla natura, questa si
trova originale nelle 4. ragioni,
tripla, di cui è mezzo contrarm.co
3., duplà, di cui è mezzo con-
trarm.co 10., sesquialtera, di
cui è mezzo contrarm.co 16.,
sesquiterz.a 5a., di cui è mezzo
contrarm.co 17.

Solamente nella mezzana pro-
porz.e 12. 15. 16. 17. 20, di cui è
mezzo contrarm.co 17; in sua
vece si trova il centro 15. 16.
della proporz.e i di cui termini
quadrati in. 225. 256., aggiun-
tovi la unità, che li determina
mezzi contrarm.ci in. 240. 256.,
e sommati in. 481., questo
termine s'incontra col mezzo

prop. 38. ultb.

avm.co 483. degli esperimi. 486. 506 :: 11. 23.

Qui è forza vendere la ragione dimostrativa della cagione, il cui nelle due prime, e nelle due ultime proporzioni agiscano i merli contravm.ci rispettivi; e nella sola mezzana propovr. agisca, non il merlo contravm.co 17. ma il centro della propovr. 15. 16.

Qui finisce il libro dell'Autore. Questa dimostrazione o sarà nelle carte volanti; o sepolta con l'Autore; o deducibile dalle cose premesse. Si vedrà

Non si trova di conservati questi fogli

Cf

V. è dea distinguere censo formale di vagione da censo materiale di quantità

Quel censo è nei decimini

49 · 50 · 51

relativi al censo 35 · 36. degli esponenti 30 · 42 :: 5 · 7 .

il qual censo di in gito rapporto diventa esponente relativo ai due medii medi-

Il medio 35 . dipende ~~immediatamente~~ primamente dalla vagione 5 · 7; 5×7=35

5 · 7 dipendono dalle due semplici vagioni 2 · 3; 3 · 4 ma moltiplicando fra loro 5×7 si ha il prodotto

5 · 7
5 · 6 · 7
30 · 35 · 36 · 37 · 42

35 medio aritm.co di data proporz.e 30 · 35 · 36 · 37 · 42

I medii aritm.ci dipendono tutti dalla data vagione essenzialmente contenuta in essi medii aritm.ci . Ciascun altro medio dipende in origine dai poli decimini della data vagione

Il m.o 36. dipende primamente dalla proporzione . data 5 · 6 · 7 si ha · 30 · 35 · 36 · 42 ; 36 è il quadrato di 6. medio aritmetico della somma. quindi 5 · 7 con radici duple di vagione ; e · 12 · 17 duple di proporz.e dedotte dalla dupla g · d · 6 · 8 · 9 · 12 raddoppiando il 6 e somando i due medii 8+9=17

5 · 7 · 10
5 · 7
12 · 17 cioè .

Una si trova 12 · 17 ancor indipendentemente da gita composizione

Ciò premesso

35 · 49 · 50 · 70

70 | 50

450 | 450

35 · 70 non dedotti dal medio aritm.co 35

Il semine 51 è relativo di radice dupla agli spremi 36 · 72 dedotti dal medio aritm.co 36.

36 · 51 · 72

12 : 17 · 24

Adunque 49 · 50 · 51 nei loro precipi rispetti sono dupli radicali de' due 35 · 36 che è il pr.o punto ~~potenziale~~ del principale delle radici dupla potenziali

Per potenziale s'intende una ragione di radice rimota dalla dupla, di cui essendo radici prossime 5 · 7, non ostante più rimote le radici di queste radici che sono 30×30=900; 35×36 = 1260

900 · 1260 :: 5 · 7

Similm.te si è detto che la ragione del centro 35 · 36 diventa un estremo rispetto ai tre medii 49 · 50 · 51. — 35 · 36 come unità di ragione, e non di semine è il capo di scienza a conoscere, e rilevare in genere la circolare natura ed in specie la ragione che corre fra il diam.o e la circonf.a

11. dal semine 49 · 50 · 51 è contenuto il centro [illegible] attuale

35 + 36 = 71

35 = 5 × 7

5 · 7 è il pr.o semine delle radici dupla 5 · 7.

I diametri d'Archim. sono 70 | 71 aur. 220 | 223

70 doppio di 35

71 = 35 + 36

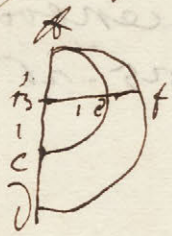
In 49·50·51. v'è il vero
sovranzide delle radici
duple potenziali, o vimote
in rapporto al centro 35·36.

o si dica prossimo. Il centro
sesquialtero è 24·25·26
ma 24+25 = 49
25+26 = 51
49·51
radici di 46 5r
o di — — 24 26
1r 1r
che vuol dire i due mezzi aritm.co conservano
del centro sesquialtero che qui
fanno figura di estremi, rispetto
al mezzo aritm.co 25.
Di quegli estremi 49·51 il
mezzo è = 24+26 = 50
da cui si ha 25 nella media
di 50.
Conviene ancora avvicordarsi
che nella serie del numero
la proporz.e 10·12·13·15 di estremi
sesquialteri e dei soli mezzi
12·13. è anteriore della
10·24·25·26 30
il cui mezzo aritm.co 25 non
ha, nè può aver luogo
nella proporz.e 10·12·13·15.

4r·46·49·50·56
56·63·64·65·7r
46+65 = 111
49+64 = 113

conviene avvicordarsi che propr.e 3·9·10
le differenze si trovavano 48·65
tra i primi 4·12·13 dedotti
dedotti dalla sesquialtera,
le differenze erano 49+64 = 113
diametro di tutti diviso ne
due mezzi aritmetici 49·64.
della sesquis.a e della seguente
serie. Ora sesquialtera adunq.
è la determinante l'aritm.ca natura

364 Rimane a dimostrarsi il III° preso Triangoli Pitagorici effettivamente annessi al detto cerchio comune ed è il loro principio



$\overline{AB} \times \overline{BC} = \overline{BE}^2$

$1 \times 1 = 1$

$\overline{AB} \times \overline{BD} = \overline{BF}^2$

$1 \times 2 = 2$

$\overline{EF} = \sqrt{2}$

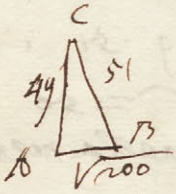


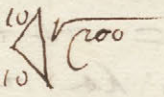
$10 \cdot 20$

$\overline{49}^2 = 2401$

$\overline{51}^2 = 2601$

diff. 200





V. f.	B_k
	B_l
	B_m
	B_n

Dè radici reciproche di ragione sono 9. 11. Perche data la forma

2. 3

4. 6

4. 5. 6 $\quad 4+5=9 \; ; \; 5+6=11$

4. 5

9. 11

9. 10. 11

90. 99. 100. 101. 110

$99 = 49+50$

$100 = 49+51$

$101 = 50+51$

99. 100. 101

$99 \times 100 \cdot 99 \times 101 \cdot \overline{100}^2 \cdot 100 \times 101$

$9900 \cdot 9999 \cdot 10000 \cdot 10100$

a. 64., medio quivi armon. della suddivar. 3a. Geom.a dic. Dunque la differenza di eguaglianza non si trova nei due medi della dupla Geom.a disc. 9. arithm.co, co. contraria armon.a; ma unicam.te nei due medi della sesquialtera geom.a disc. 12. armonico, 18. contrar. ad esclusione del medio armonico. 15.

Da ciò si comprenda sempre meglio, e sempre più il carattere attributivo alla sesquialtera, dee il determinante l'armonica natura di proporzione senza cui la divina Prov.a non provvede mai essere la ragione determinante.

Il confronto è patente nella detta causa soprannaturata, poiche presi i suoi medi 3. 4. 5. della tripla geometrica discreta, ciascuno come diametro, a vaglio triplo, havendo rapporto a 9. 10, medi della

300

10.12.13.65

12.15.16.20

duplo Geom.ca di seconda 4.a 12.13. medii della sesquialtera Geom.ca di quarta 5.a 13.16, medii della suddupla senza geom.ca di seconda: Egli è un fatto che sebben da tutte le dette differe. si abbia scienza, non si trova però la regualità delle differe, segue nei due medii, armonico, e contrarmonico della sesquialtera.

Rimane a dimostrarsi il terzo punto de triangoli Pitagorici, essenzialmente annessi al detto centro comune ch'è il loro principio, ossiano una regolare indefinita serie di proporzioni di medii determinati, unicamente applicabile alla misura, e dottrina del cerchio.

In p.o luogo, se il detto centro è il loro principio primo, si ha debito di dimostrare, che il triangolo

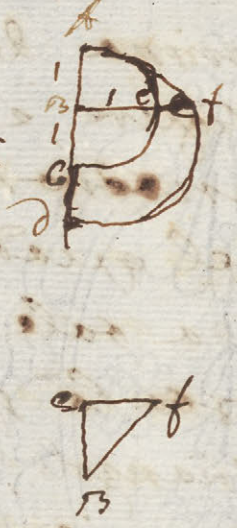
triangolo dedotto dal mo. è l'assolutamente primo di questi triangoli. Ma il principio assolutamte primo di questa scienza è nella dupla, e nelle sue radici; adunque l'assolutamente primo di questi triangoli deve dimostrarsi nella dupla, e nelle sue radici. Cecolo dimostrato $AB \times BC = \overline{BE}^2$ $1 \times 1 = 1$

$AB \times BD = \overline{BF}$

$1 \times 2 = \sqrt{2}$; adunque $Bf = \sqrt{2}$

adunque costituito il triangolo di due lati uguali ciascheduno ad 1. e coll'Ipotenusa Bf, questo è l'assolutamente primo di questi triangoli. Ma questo triangolo è un semiquadrato; adunque perche il quadrato si veda indipendente dal cerchio, non potrà mai però dimostrarsi, che nel suo ~~triangolo~~ principio assolutamente primo, non dipenda dal detto triangolo Diagonico che è

$AB = 1$
$BC = 1$ $BE = 1$
$BD = 2$ $BF = \sqrt{2}$



che è necessariamente un semiquadrato, e però bisogna cercare prima del quadrato intiero, quanto nelle rette figure inscritte al cerchio, e dedotte dalla circolo armonicamente divisa, la figura del triangolo è la assolutamente prima delle rette regolari figure, e però necessariamente anteriore alla figura del quadrato.

Nè a tale dimostrazione osta la specie diversa de' triangoli, perchè la dimostrazione è fondata puramente su la figura triangolare, come prima della quadrangolare; e rispetto alla diversa specie, basta in genere che il triangolo sia rettangolo.

Da ciò si deduce la necessaria, benchè rimota dipendenza della diagonale del quadrato dalla figura circolare. E la diagonale si risolve nella ipotenusa BF e questa

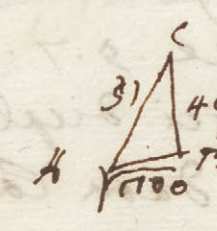
e questa nella vera scienza delle ragioni, e proporzioni, non è dimostrabile che il mezzo del cerchio, è forza che la diagonale dipenda prossimamente dalla Ipotenusa BF, e però rimotamente dal cerchio.

Ciò premesso, dico in secondo luogo che il pr.° triangolo Pitagorico essenzialmte contenuto nel centro comune de' semini 49. 50. 51. è il precisamte dedotto dal sopra dimostrato con la sola aggiunta del zero ai semini 1.a. in 10. 100. e si dimostra

49 — 49 — 441 — 196 — 2401

51 — 51 — 2601 — 2500 — 2401 — 100

Il quadrato di 49 è = 2401; di 51. è = 2601. , adunque la differenza è. 100. ma $10 \times 10 = 100$, come sopra era $1 \times 1 = 1$. adunque formata la base con la diagonale di un quadrato il di cui lato sia = 10, sarà BBC il triangolo Pitagorico formato dalla base = $\sqrt{100}$, dal lato BC = 49



e dalla Ipotenusa $bc = 51$
dico che questo triangolo
è il principio primo di
una infinita serie lineale
di triangoli Diagonici, di-
pendente in prima
essenza dalle prime
radici sesquialtere di
ragione, ed inseparabile
da una indefinita serie
di proporzioni geometri-
che discrete di mezzi
determinati, e si dimostra
Le prime radici sesqual-
tere di ragione sono
9. 11, perché data la
forma sesquialtera
2. 3. raddoppiata in 4. 6,
e interpostovi il mezzo
aritmetico 5. sommati
4 + 5 = 9; e 5 + 6 = 11, saranno
9. 11. le prime radici
sesquialtere di ragione
come 5. 7. sono le prime
radici duple di ragione.
Ma data la forma
9. 10. 11; si ha la propor.
geometrica discreta con
i mezzi determinati

2. 3
4. 6
4. 5. 6
4 / 9 — 5 / 11
9. 10. 11
9 / 9. 10
9. 10. 11
19 / 90 — 90 / 41
9
4 × 5 = 20
5 × 6 = 30
11

1. 2
2. 4
2. 3. 4
2 / 5. 7 — 3 / 7

9 · 10 · 11

9 X 10
10 X 11

90 · 99 · 100 · 101 · 110

in 90 · 99 · 100 · 101 · 110 ·
ed i ove mezzi, 99 aritm°, 100 · aritmetico, 101 · armonico si hanno dai ove sei termini del centro comune ~~49 50 51~~ 90 99 101
· 49 · 50 · 51 ·
49 + 50 = 99
49 + 51 = 100
50 + 51 = 101 .
Con ciò adunque si dimostra in un tempo il principio primo del detto centro comune dei ove sei termini 49 · 50 · 51; la unicoca essenziale natura dei sei termini suddetti 49 · 50 · 51 · e dei mezzi determinati della dedotta proporzione dalle radici sesquialtere 99 · 100 · 101; la costituzione del primo triangolo Pitagorico di una serie nei ove detti mezzi; perche 99 × 99 = 9801; 101 × 101 = 10201; differenza = 400; √10201 − 10000 = √400 = 20; e però data · 20 · cubo 99; ipotenusa = 101.

99 101
99 101
891 101
891 1010
9801 10201

472

99 · 100 · 101

99 ∴ 100

100 ∴ 101

99×100 . 99×101 . 100×100 . 100×101

9900 . 9999 . 10000 . 10101

9999 — 10001

9999 — 10001

99981 — 100010001

99962 — 99990001

99941 — differenza 20000

99940001

forse dir. p. doversi decuplo

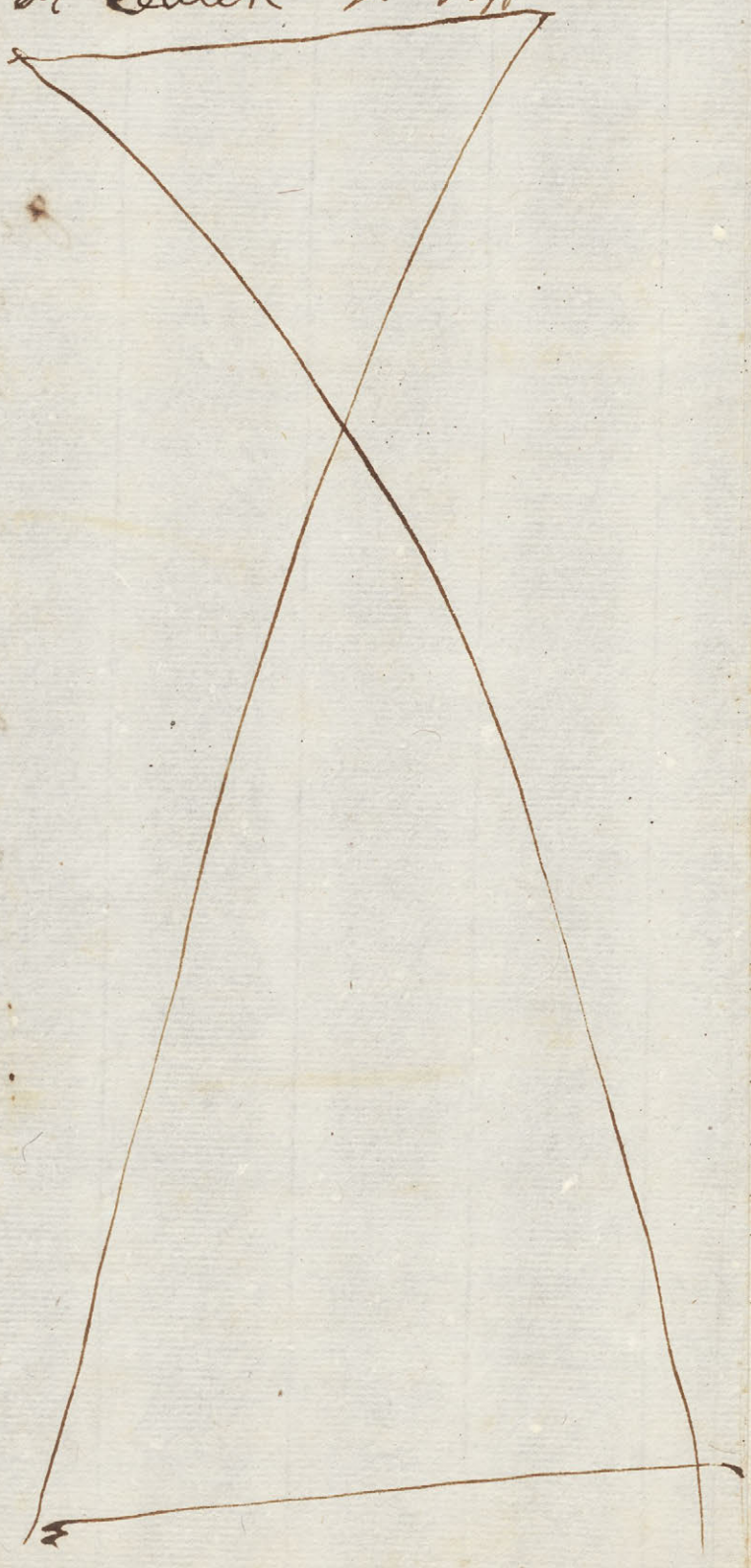
Parimenti si dimostra la indefinita serie decimale di questi triangoli razionali, di cui è capo il predetto perchè composta di tre medii determinati 99 · 100 · 101. La proporz. geometrica diventa colla solita formula, ci avrà la seq. proporz. di medii determinati in 9900 . 9999 . 10000 . 10100 ; e dal cenno dei tre medii sarà sempre inseparabile il triangolo Pitagorico razionale, la cui base $= \sqrt{40000} = \sqrt{200 \times 200} = 200$. Indi con lo stesso metodo si trova la indefinita serie, che dimostrativamente si chiama, e deve chiamarsi decimale. Si dimostra la 1ª sua radice è in 10 · 20, da cui si è dedotta la ipotenusa irrazionale $= \sqrt{200}$. del 1º triangolo Pitagorico, dimostrato nel cenno comune dei tre termini 49 · 50 · 51.

Ma indi

11 Il circolo

Ma indi la indefinita serie di passo i mezzi aritmetici delle rispettive proporzioni, ottengo numeri quadrati in cui 100000. 10000000 &c, e tutti i triangoli Pitagorici razionali = 1, e +1 de' rispettivi numeri quadrati; adunq. Dico finalmente in 3° luogo, che questa è precisamente la serie unicamente applicabile alla misura, e dottrina del cerchio, e si dimostra. I primi termini di questa serie sono. 10. 10. ma questi con zero aggiunti a ragguaglio sono i precisi di Eulero, cioè 10 di quadrato circoscritto a cerchio inscritto; e 10. di quadrato inscritto a cerchio circoscritto; si è dimostrato che in rapporto a 10. quadrato circoscritto, il cerchio di Eulero è rinchiuso

nel cerchio 15. 16 - degli
estremi 10. 20; e che in
rapporto a 10. pro. estremo
della proporzione
10. 15. 16. 20
la differenza ~~si risolve~~
di Eulero si risolve



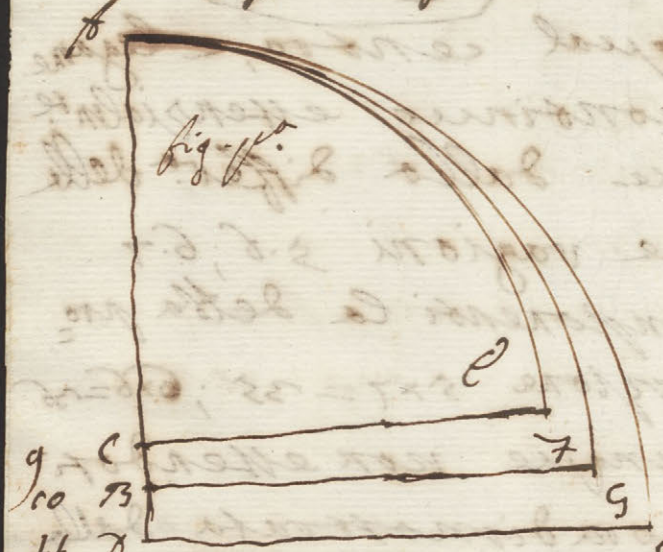
~~conto~~ di Ceulen si risolve in 35.36, centro degli esterni 30.42 :: 5.7. Qui si aggiunge, che convertito il duplo il termine 10. nella sua metà 10., il termine 10. al p. esterno 12. di detta proporzione essendo :: 5.6; questa è la prima ragione, che costituisce il legame, e forma il centro di continuo in 30 . 35 . 36 . 42 il qual centro, e legame di continuo essenzialm.te nasce dalla differ.a delle due ragioni 5.6; 6.7 componenti la detta proporzione 5×7=35; 6×6=36 Dunque non essendosi ancora dimostrata dalla Geometria una proporzione più prossima al vero di quella di Ceulen di cifre 36 con la differ.a della unità nella ultima cifra; e questa proporzione risolvendosi con l'ultima precisione nei termini

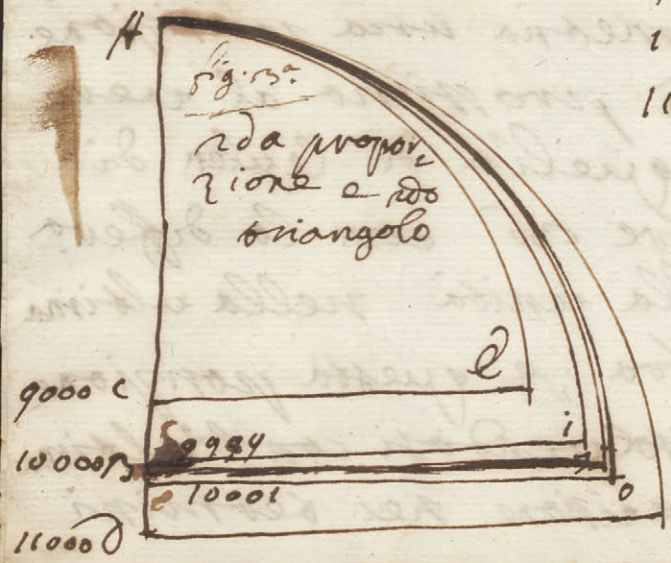
[redacted] co. co. corrispondenti il principio primo della dimostrata indefinita serie decimale, resta pienamente dimostrato, che questa è la serie unicamente applicabile alla misura, e dottrina del cerchio, di cui dalla Geometria si ha la misura, ma non la scienza.

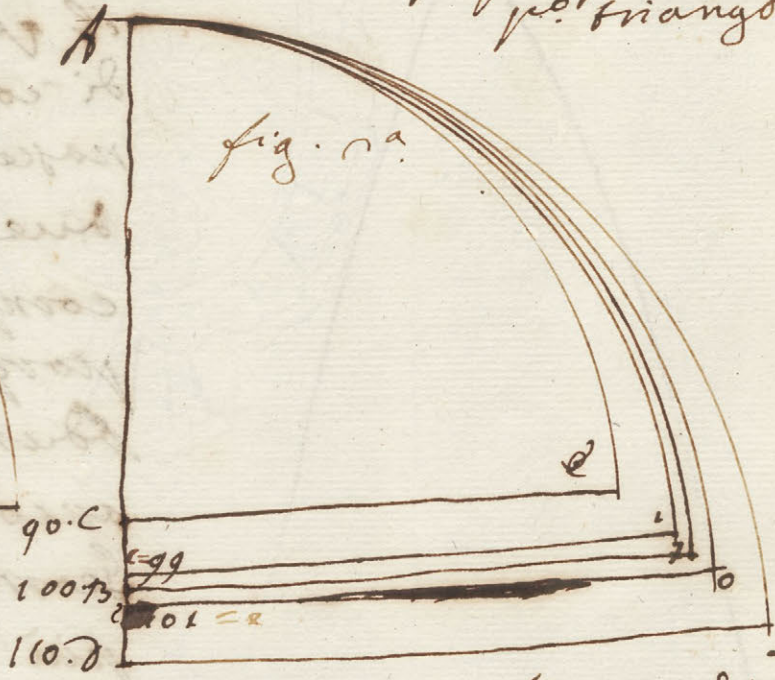
Applicazione de' Triangoli Pitagorici al cerchio

Prima forma

p.a proporz.e e p.o triangolo







La p.a figura di boè quadranti di principio comune in b esprime la forma g. 10. 11. in b C. A B. b D

Nella seda figura di cinque quadranti si esprime la prima proporzione, dedotta dalla data

circolo

dalla data forma 9.10.11.
in. 90.99.100.101.110.
E però, rimanendo sempre costanti i tre quadranti primi in bc=9=90; AB=10=100 bd=11=110: sono essi pure due quadranti aggiunti i due mezzi, ci armonico =99; e co contrarmonico =101. Indi costituita la base di $\frac{1}{4}$ di AB=100, che vuol dire di partire; il lato del mezzo armonico 99; l'ipotenusa del mezzo contrarmonico =101, si avrà il pr. triangolo Pitagorico razionale.
Nella terza figura che deve essere di sette quadranti, poichè in se contiene i due aggiunti della rda, ed i tre sempre costanti, e stabili della prima, dovendosi eppure me la proporre: Se si adduce dal centro della rda, ch'è dei secondini 99. co'. 101 in. 9900. 9999. 10000. 10001, restando stabile e costante il mezzo aritmetico 10000 = 100 = 10, conviene

(378

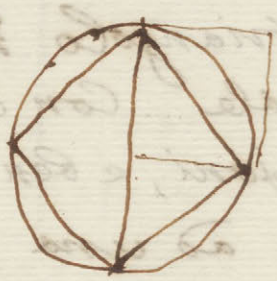
ciò aggiungere i due qua-
drati relativi ai due mezzi
sempre mobili, avvertendo
9999 contenuti 10000, e
questi sono appresi ~~in~~
~~in altri due quadrantigli~~
~~estremi di questa seconda~~
proporz.ne da ci = 9999, e da
do = 10000. Tra B, gio,
e BD, devono essere quelli
in altri due quadranti gli
estremi di questa proposi-
zione 9900, e da 10001
ed intanto qui non tutto se-
gnati per non far confusio-
ne nella figura.

Il vaglio nella senza
proporzione dedotta
nel centro della 3da
9900 · 10000, 10001, che
farebbe 99999999
9999000 · 100010000
100000001
i quadranti devon esser
nove; nella 4ª 11. 1C;
rimanendo sempre
stabile il mezzo
avvertendo nei 4 quadrati
100 della 4ª proporzione,
10000 della 3da; 100,000,000
della 3ª, ed a vaglio
sempre mobili i due estremi
avv.to, e contenuti

in differenza della unità
nel più, e nel meno del
mezzo aritmetico &., e sempre
inseparabili dal rispettivo
loro triangolo Pitagorico
razionale. Con ciò in poche
operazioni, e ben facili si
arriva ad una inconcepi=
bile approssimazione al
semidiametro in piano, ch'è
il mezzo aritmetico, perchè
in sei quadrati del mezzo
aritmetico 100. si arriva
a cifre 63 nell'ultimo
delle quali il mezzo armo=
nico si trova —1., il con=
trarmonico +1. del mezzo
aritmetico; differenza espri=
mibile col numero, ma
inconcepibile con la mente.

100
10000
100,000000
10000,0000000,00000
100,00000,00000,00000,00000,00000
1000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000,00000.

Si chiederà a che serva una
tale operazione. Si risponde
che essendosi proposta, ed
esposta in altre carte
la circonfa come terzo
de' termini della tripla
armonica 6. 3. 2. ch'è = 11.
e però di quantità razio=
nale; essendosi dimostrata
col fatto necessariamente

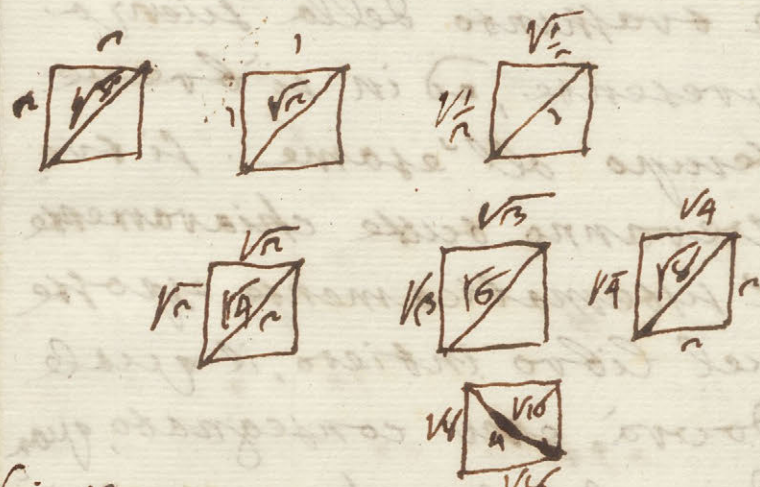


e razionalmente divisa dalla armonica serie delle frazioni $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ &c deduce i lati delle rettilinee regolari figure inscritte al cerchio. Fra i quali il lato del quadrato inscritto è certamente irrazionale, perchè costituito dalla diagonale, riflettendo che se la linea circolare in forza della sua ~~perfetta~~ unità, ch'è il raggio, è determinata dalla stessa sua unità a dover tornar a ripiegarsi in se stessa, ed in forza della stessa unità determina il suo diametro la retta linea, che sola è indefinita, ed indeterminata; Concludendo che se il cerchio è arbitrariamente costituito in guerra a Turchi, a norma delle due nature di quantità armonica, ed aritmetica: Essendo certo che le aritmetiche ragioni sono le inverse delle armoniche, e però data p.es: la ragione di Merlo

113 / 611 circolo

di Merio

diametro 113, circonf.a 355.
dovendosi armonicamente esprimere in $\frac{1}{113} \cdot \frac{1}{355}$, è
certo che il diametro si converte nella circonf.a, e
questo nel diametro. Tutto
ciò considerato, e compreso,
è chiaro che la invariabilità
del termine di detta operazione deve trovarsi nel diametro, e non nella circonf.a
e che la vera scienza del
cerchio ciò che materialmente
ed inutilmente si è cercato
a secoli nella circonf.a, è
stata cercata formalmente
e positivamente nel diametro.



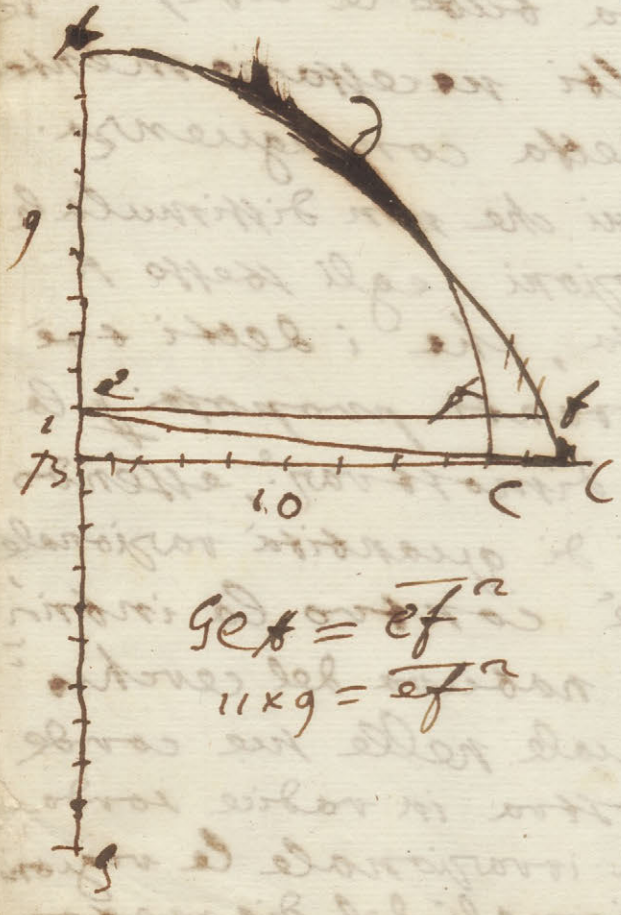
C. Il lato e la diagonale del
quadrato sono fra di loro
incommensurabili; e Lo sono
pure il diametro, e la
circonf.a. Ma poiché il
diametro del cerchio, come
linea retta facilmente
si misura, perciò dal dia-
metro come più noto
passar sogliono i Geometri
a ricercare la circonf.a

Se
questo discorso conchiude,
il perché di detta operazione
è troppo chiaro, e concludente
di se stesso senz'altra ragione.
Egli è bensì vero, che la detta
operazione essendo fondata
in questo principio generale,
si viene poi specificando ed
individuando con altre se-
guenti operazioni dedotte, ed
inseparabili da detto principio,
con le quali sempre più

concorrebbamente, e sistematica-
mente si dimostrò la verità
del med.mo.;
ma le dette concorrenti appa-
cifiche operazioni non
bastano, e bisogna occupar-
si esporle in questo stesso
e trattato della scienza
presente, ed in sì breve
tempo all'esame. Si tro-
veranno tutte chiaramente
e sistematicamente esposte
nel libro intiero, il quale
dovrà esser consegnato, quan-
do si decida, che questa
scienza è vera, utile, ed
improrrogabile, ricchè sia
necessario di pubblicarla
a beneficio comune.
Dove si esamini l'antidetto
discorso, base e fondam.to
di questo principio gene-
rale, in forza di cui deve
fondarsi la ricerca, non
già nella circonferenza,
ma nel diametro, ricercando
l'esame a tutti quei capi
essenziali di questa scienza
che finora si sono esposti,
non ommettendo il p.o capo

comune all'algebra ed
a questa scienza, ch'è il
mezzo armonico = a. frai
due dati estremi, la
verità, e l'infinito
vede il Tavarini che volendo
bassi al presente bisogno,
& accettare la necessità
di questo nuovo ordine
di sistema; poiché se vanno
effettivamente bene, le
conseguenze, ed i corollarj
sono & se evidenti
e conchiudenti. Imperò
& conchiudeve il molto
in poco, è da rigoro-
samente esaminarsi
se da tutte le cose premesse
risultri necessariamente
la detta conseguenza.
Il Tavarini che non dissimula le
obiezioni, egli stesso si
obietta, che i detti suoi
quadranti propotti & la
sua dimostrazione, essendo
tutti di quantità razionale
ciò è contro la infini-
teca natura del cerchio
il quale nelle sue corde
dimostra in radice sorda,
o sia irrazionale le razioni
razionali del diametro

armonicamente diviso come può vedersi nelle figure annesse al mio trattato di Musica, le quali sono al fine di detto libro, e nonna adunq; di tale natura dovrebbe dimostrarsi, che vi è tale facoltà in un solo quadrante in cui si verifichino le radici sorde della prima proporz.e proporzionale rispetto al centro 99.100.101. Questo è appunto ciò che si dimostra nel solo quadrante bdc, dividendo cB in dieci parti uguali, come si è diviso il gno de' rè razionali. dalla decima parte cB dedotta la ipotenusa ce, il mio quadrato sarà = 101; dal cateto ef dedotto il mio quadrato sarà = 99; ma di Bx il quadrato è = 100; adunque si è dimostrato





7 circoli 11.12.13

13□.14□.144.145.156

12.13.14

156.166.169.170.186

11.12.13.14

13□.143.144.145.156.166.169.170.18□

143 | 11 / 0 / 13

166 | 11 / 5 / 13

Posizione di merio con i termini 5.6.7.

45□.353 :: 5.5

:: 7.6

45□×5 . 353×7 . 45□×6

□60 . □485 . □7□

□□5 □□7

radici □□4 □48

11□ . 113. 114

56 57

4□.48.49.50.56.63.64.65.7□

48×49 = 4□×56 = □35□

63×64 = 56×7□ = 40□□

4□.7□ :: 7.1□

□4.6+6

1□.36::1.3

44×50 = □400 399

4□×57 = □394 400

57×7□ = 4104 455

63×65 = 4095 456

le conterm.co lascia sempre reiprodotta differ.a 1.

da forma di 3+□5+1□5 = 155

merio aritmetico fra 154.156 che sono merii di proporz.le g.d. fra 143.166

143. 154 :: 156. 166

166 154

1149 624

458 780

143 156

□40□4 □40□4

Gli esponenti delle dette forme sono 11.14. cerchio a quadrato circoscritto

1□+1□ = □5 = 11+14 = merio arit.co d.a sesquialtera no.□4.□9.30

1□.13 sono i due merii arit.co e contrarm.co della stessa proporz.l sesquialtera no.□4.□5.□6.30 dirli (come pari) in 1□.13

le cifre del prodotto □40□4 separate dallo zero, sono □4,□4 merio arit.co d.a stessa proporz.l

□400.□□94 :: 499.599

4□04.4095

4004 □400 □400/6 = 400

4095 □□94

0009 6

399 6

□□94 6

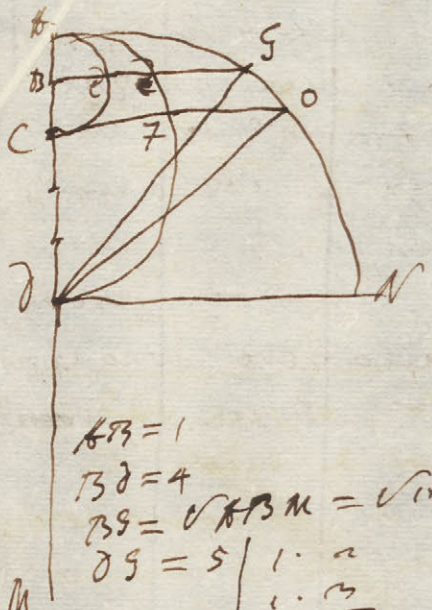
5 5 399

4104.4095 :: 456.455

V. maggior fierezza contiene la proporz.ne di circhio^{o} 11.7 di qualunque altra

~~Il cerchio~~ La circonf.a armonica presa divisa da i lati delle figure regolari inscritte al cerchio (dalle quali dipendono i poligoni) ~~della~~ ~~che~~ figure da^{o} per p.a è il triangolo equilatero, per 2da il quadrato. Dunque non è arbitrio il prendere la proporzione del cerchio al quadrato inscritto

1 : 1 = 2 × 3 :: 1 : 6



AB = 1
BD = 4
BQ = √(AB × BM) = √(1 × 9) = 3
DQ = 5

1 : 2
1 : 3
1 × 1 : 2 × 3 :: 1 : 6

4.3.5

AC = 2
CD = 3
CO = √(AC × CM) = √(2 × 8) = 4
DO = 5

6.8.10
3.4.5

1² + 1 4 = 15

1 2 · 1 3 · 1 4
1 5 6 · 1 6 8 · 1 6 9 · 1 7 0 · 1 8 2

7 2 · 1 6 8 :: 3 · 7
1 : 2 · 3 × 4 :: 2 · 1 0 :: 1 · 6

2 · 5 vadici seconda
BB = 1 = BC, sarà BE² = 1
AC = 2, ED = 3, sarà CZ² = 6
adunque BC · CZ sono vadici della seconda
Fatto col semid. DD il quadrato DBON, e prolungato BE in Q, CZ in O, e tirate le ipotenuse DQ, DO, si hanno i due triangoli spettanti alle due vazioni dupla e tripla

La vazione 7 · 11 si risolve finalmente nelle vadici della seconda 2 · 5 · che sono i due pri. contravm.i de serie 2 · 3 · 10 · 11 · 16 ecc

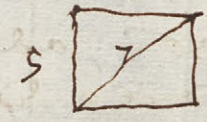
7 · 11
3 · 4 5 · 6
3 × 4 . 5 × 6 :: 12 · 30 :: 2 · 5

7 · 11 :: 2 + 4 · 6 + 3 + 2 | 2 · 3 · 4 · 6

e nella tripla si è dimostrato dedotto dalle due vadici AC · AD :: 2 · 5

Questo si dimostra in 6 · 8 · 9 · 12
12 + 8 + 6 = 26 · 8 + 9 = 17
13 × 13 8 × 9
169 72

Jo propo adunque che qualunque sia il diametro debba risolversi nella somma .7. del cerchio 3+4 della tripla e qualunque sia la circonf. debba risolversi nella somma .11. della tripla armonica 6+3+2 ; è chiaro che di tutte le assegnabili proporzioni, la immediata è quella di 7. a 11.



25+25=50
7×7=49

di .5. cato la divisione è 2.3
di 7. diagonale la divis. è 3.4
di .70. è 35. 35
di 99. è 49. 50
che è appunto la differenza precisa de' due quadrati, di 5 indiviso = 25 il cui duplo è 50 ; e di .7. indiviso = 49 dai gli nasce la ragione 49. 50

---

1. Ragione dupla, e sue radici ragione prima di tutte le ragioni, e di armonica potenza

2. determinazione della dupla per l'unico mezzo della sesquialtera circonf. tripla del diametro con quell'eccesso che nasce dall'accetto, e differenza delle due ragioni 3.4 ; e 4.5 formate dai tre mezzi 3.4.5

2.3
1.2
12.18 :: 2.6 :: 1.3

3. Triangoli Diagonici inscritti dai tre mezzi determinati da ragioni, de gli il primo è costituito dai tre mezzi 3.4.5 della tripla g.d., e dai tre della dupla 4.6.10
3.5 :: 12.20 de gli è centro 15.16. fra i gli sta la circonf.

15. 16. 20 quadrato circoscritto
cerchio inscritto
15 2/6

12. 15. 16
cerchio circoscritto
1570 M

12. 15. 16. 20

Re

6. 12. 20. 30. 42

di cubi nella ragione
35. 30
corrispondente il cubo delle
radici duple 30. 42 :: 5. 7

Legame di continuo 12. 16 :: 15. 20
:: 3. 4
Legame di contiguo 12. 15 :: 16. 20
:: 4. 5

Delle p.e radici duple di
ragione 5. 7 :: 30. 42 il cubo
è 35. 30; adunque
l'esagono ed il ~~dipento~~ deve
risolversi nella ragione
cubale 35. 30, come
ancora nella ragione cubale
15. 16 degli ettreni 12. 20 :: 3. 5
ettreni del cubo triplo
3. 4. 5
da cui come forma è costi-
tuita la proporz.e 12. 15. 16. 17. 20
12. 20. costituisce un
cubo di mezzanità
fra la dupla e sesquialtera
e fra le cinque ~~fra~~ proporz.i
contenute nel settuplo pi-
tagorica

si deve cercare se vi sia un
cubo comune di proporz.i
g. d. tale, che il cubo duplo
potenziale, il cubo sesqui-
altero attuale, ed i triangoli
Diagonici si trovino insa-
pavabilmente congiunti fra loro
in cubo comune di una
regolare indefinita serie
di proporz.i co' mezzi deter-
minati, cagione principalmente applica-
bile alla misura, e dottrina del cerchio

Sebbene è vero che le ragioni $1 \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c sono espresse inversamente dalle ragioni corrispondenti della serie aritm.ca $1 \cdot 2$; $2 \cdot 3$; $3 \cdot 4$ &c. Non è già vero che le proporzioni armoniche $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ &c siano espresse dai corrispondenti termini della serie aritmetica $1 \cdot 2 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$. Per ritrovare quali numeri interi della serie aritmetica corrispondano alle frazioni della proporz.ne armonica, bisogna ridurre queste frazioni a comune denominatore. Allora i numeratori delle frazioni ridotte indicano i termini della proporzione armonica; ed il comun denominatore mostra in quante parti l'intiero sia divisa la armonica unità.

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$
$2 \cdot 1 \cdot 2$	$3 \cdot 2$	$4 \cdot 3$
$3 \cdot 2$	$4 \cdot 3$	$5 \cdot 4$

essendo adunq.; le dette tre proporz.i armoniche dedotte dalle due serie, armonica, ed aritmetica, saranno a proposito gli stessi i mezzi aritmetici ed i contrarmonici. Non è adunque un errore, anzi è di utile, e lodevole uso il cercar tutti i mezzi arm.co aritm.co contrarmonico e geom.co fra due dati interi. Lebbene vi sovverrebbe alla stessa cosa cercarli fra due frazioni

$1 \cdot 3$	$1 \cdot 2 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	$2 \cdot 3 \cdot 6$	
$1 \cdot 2$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 3 \cdot 4$	$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$	$6 \cdot 8 \cdot 12$
$3 \cdot 5$	$3 \cdot 4 \cdot 5$	$12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 20$	$12 \cdot 15 \cdot 20$	
$2 \cdot 3$	$4 \cdot 6$	$4 \cdot 5 \cdot 6$	$20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 30$	$20 \cdot 24 \cdot 30$
$5 \cdot 7$	$5 \cdot 6 \cdot 7$	$30 \cdot 35 \cdot (36 \cdot 37 \cdot 42)$	$30 \cdot 35 \cdot 42$	

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$	$\frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$	$6 \cdot 3 \cdot 2$	$6 \cdot 2 :: 3 \cdot 1$	
$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$	$\frac{12}{24} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24}$	$12 \cdot 8 \cdot 6$	$12 \cdot 6 :: 2 \cdot 1$	
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{20}{60} \cdot \frac{15}{60} \cdot \frac{12}{60}$	$20 \cdot 15 \cdot 12$	$20 \cdot 12 :: 5 \cdot 3$	
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{30}{120} \cdot \frac{24}{120} \cdot \frac{20}{120}$	$30 \cdot 24 \cdot 20$	$30 \cdot 20 :: 5 \cdot 4$	
$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$	$\frac{42}{210} \cdot \frac{35}{210} \cdot \frac{30}{210}$	$42 \cdot 35 \cdot 30$	$42 \cdot 30 :: 7 \cdot 5$	

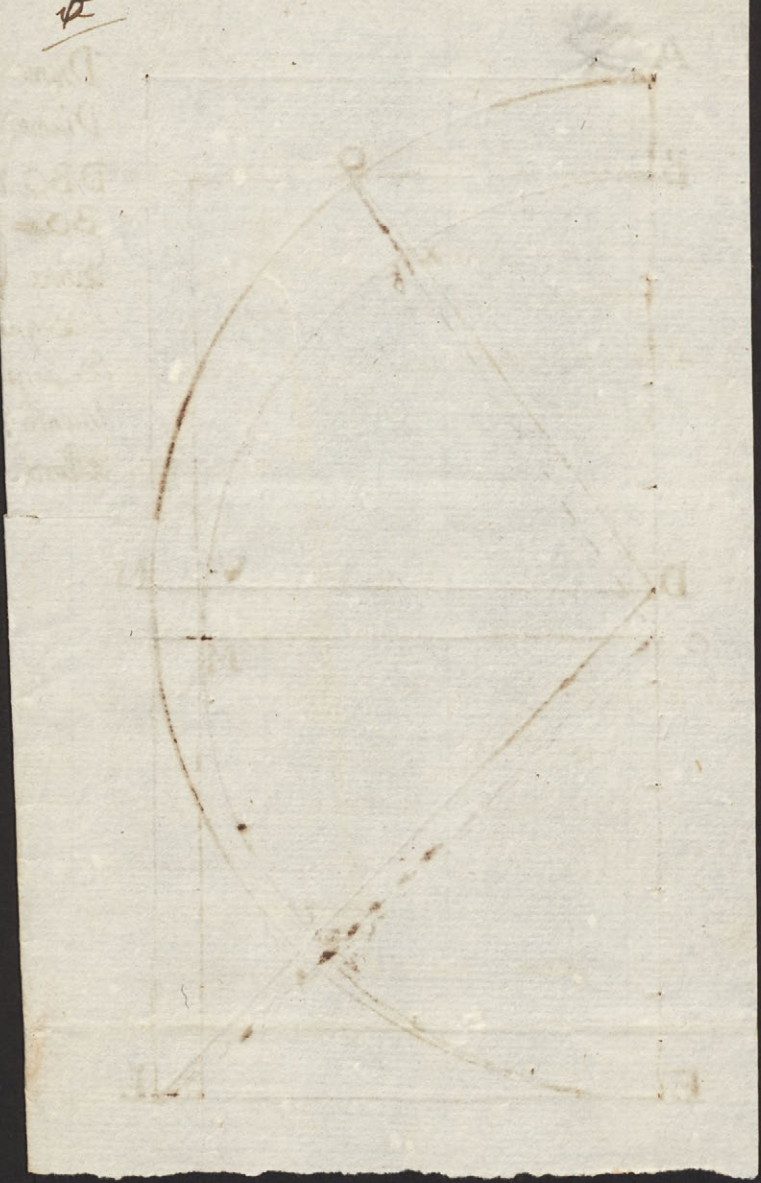
Sono ancora in proporzione arm.ca tre termini presi con ugli intervalli nell'armonica serie

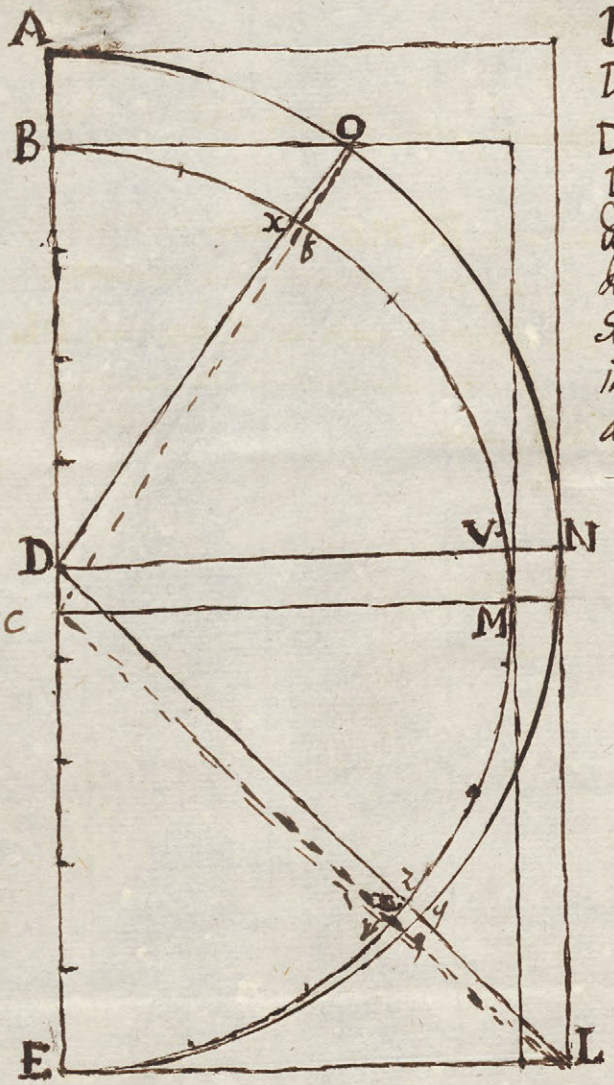
$1 \cdot 5$	$1 \cdot 3 \cdot 5$	$3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 15$	$3 \cdot 5 \cdot 15$	
$3 \cdot 7$	$3 \cdot 5 \cdot 7$	$15 \cdot 21 \cdot 25 \cdot 29 \cdot 35$	$15 \cdot 21 \cdot 35$	
$5 \cdot 7$	$1 \cdot 4 \cdot 7$	$4 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 28$	$4 \cdot 7 \cdot 28$	
$2 \cdot 5$	$(4 \cdot 10$	$4 \cdot 7 \cdot 10)$	$28 \cdot 40 \cdot 49 \cdot 58 \cdot 70$	$28 \cdot 40 \cdot 70$
				$14 \cdot 20 \cdot 35$
				$2 \cdot 5 \cdot 7$

$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$	$\frac{15}{15} \cdot \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{15}$	$15 \cdot 5 \cdot 3$	$15 \cdot 3 :: 5 \cdot 1$	
$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$	$\frac{35}{105} \cdot \frac{21}{105} \cdot \frac{15}{105}$	$35 \cdot 21 \cdot 15$	$35 \cdot 15 :: 7 \cdot 3$	
$1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10}$	$\frac{28}{28} \cdot \frac{7}{28} \cdot \frac{4}{28}$	$28 \cdot 7 \cdot 4$	$28 \cdot 4 :: 7 \cdot 1$	
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10}$	$\frac{70}{280} \cdot \frac{40}{280} \cdot \frac{28}{280}$	$70 \cdot 40 \cdot 28$	$70 \cdot 28 :: 10 \cdot 4$	
		$35 \cdot 20 \cdot 14$	$5 \cdot 2$	

Nella serie armonica la unità è il
tutto, e tutti i denomini sono
parti di essa unità; ma questa
unità si concepisce divisa
in sei parti nella pa proporz.
$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \mid \frac{6}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6}$ delle quali il
2do denomine ne contiene 3,
il terzo 2.
Nella proporz. 2da $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \mid$
$\frac{12}{24} \cdot \frac{8}{24} \cdot \frac{6}{24} \mid 12 \cdot 8 \cdot 6 \mid$ la unità
si concepisce divisa in 24 parti
delle quali il pº denomine ne
contiene 12, il 2do 8, il 3zo 6.
Nella terza $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \mid \frac{20}{60} \cdot \frac{15}{60} \cdot \frac{12}{60} \mid$ 20. 15. 12
la unità si concepisce divisa
in 60 parti, delle quali il
pº denomine ne contiene 20;
il 2do 15, il terzo 12. E
la unità per tanto della progres-
sione armca è sempre la stessa,
sebbene si concepisca ~~divisa~~
composta or di 6 parti; or
di 24, or di 60. La unità
è sempre il tutto ch'è libero
poi considerare come compo-
sto di magre o minor nº di
parti; ma in una data
proporzione, questo numero
di parti è determinato:
Siccome una linea resta sempre
la stessa, sebben si divida, o
si concepisca divisa in due, in
tre, in mille, o più parti.
La unità armonica è sempre
la stessa; è sempre un tutto
ne altro muta che le parti
che di essa si prendono

circolo



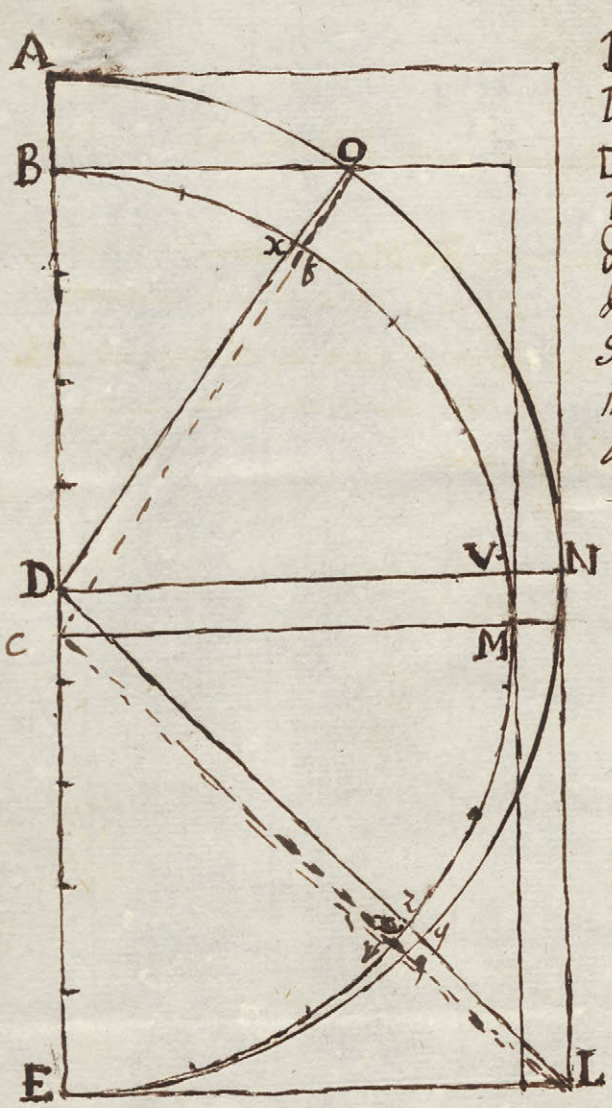


Diametro EA = 10

Diametro EB = 9

DBO Triangolo Pitagorico, perchè DB=4, DO=5; adunque BO=3.

Divisa la semicirconferenza BVME in undeci parti eguali, delle quali Bx = 2, Ez = 3, di corta dalla Geometria, se la ipotenusa DO incontri il punto x, la diagonale DL incontri il punto z; e non incontrandosi, di quanto si allontanino dai detti punti.



Diametro EA = 10
Diametro EB = 9
DBO triangolo Pitagorico, perchè DB=4, DO=5; adunque BO=3.
Divisa la semicirconferenza BVME in undeci parti eguali, delle quali Bx=2, Ez=3, di cerca dalla Geometria, se la ipotenusa DO incontri il punto x, la diagonale DL incontri il punto z; e non incontrandoli, di quanto si allontanino dai detti punti.

AN. BV :: AO. Bx
90. 60 :: 37° 60' | 90
2960 | 3R. 5B. 10=
2460
60
4800
3
30

60/11
2 16. 21. 49

60/11 = 16°. 21'. 49''

4 60
240
960
54°
10

Bx = 3R. 5B. 10=
= 11 da. semicir. = 3R. 43. 38
differ. = 9. 4R

dv. Dm :: by. bz
90. 100 :: 45°. 50°

3/11 da. semicir. corfa. = 49°. 5'. 27''
differenza = 54. 33

Questo conto è fatto a un di presso. La trigonometria accostandosi molto più al vero, si troverebbero le differenze molto minori.



Trovo $\overline{BX} = 32° \cdot 5' 3'' \cdot 10''$

due undecime

della semicirconf.^{za} $= 32° \cdot 43' \cdot 38''$

la differenza è $= 9' \cdot 45''$

Trovo la $\overline{EZ} = 50°$

Trè undecime

della semicirconf.^{za} $= 49° 5' \cdot 27''$

la differenza è $= 54' \cdot 33''$

Se queste due differenze di 9. minuti nel primo caso, e di 54. minuti nel secondo, fossero troppo grandi, si potrebbe con maggior esattezza operare per secanti. Se così bisogna, tanto meglio. Intanto chi scrive all'umanissimo S.r Giuseppe, si picconferma suo umil.mo obbl.mo servo

N. N.

L'um.mo servitor Tartini del Rev.do P. Ab.te Colombo ha debito di non nascondere le proprie vergogne al di lui Padrone, e Maestro; e però gli confessa, che quando la dimostrazione non sia ridotta ai numeri, egli non è capace d'intenderla. È dunque cosa necessaria di rimandare al Rev.do questo stesso suo foglio, dietro cui è copiata ad litteram la dimostrazione del Sig.r Ab.te Marinelli favorita anni sono al Tartini, acciò il Rev.do con tutto comodo la confronti con la propria; e se vi è qualche notabile differenza nei numeri, la segni, acciò possa rilevarsi, se sia fatale, che invalidi la dimostrazione.

Se la semicirconferenza BVME è divisa in undici parti, posto il seno tutto = 10000000, posto l'arco Bx di gradi 32 : 8 = 32 . 43' . 38'' . etc.; il seno di gradi 32 . 43' . 38'' etc. secondo le tavole più accreditate sarà, nel meno = 5406000, nel più = 5406392. Ma Cx = CB + ½ BE 4500000 ~~etc~~. Sarà dunque

$$10000000 : 5406000 :: 4500000 : \frac{5406000 \times 4500000}{10000000} = xy.$$

Fatta l'attual moltiplica di 5406000 in 4500000, trovasi il prodotto = 2432700000000, il qual numero diviso per 10000000, dà 2432700 = xy.

Essendosi preso il meno in 5406000, se si prenda il più in 5406392, la sua moltiplica per 4500000, e la divisione del prodotto ~~etc~~ per 10000000 darà 2432876 = xy. Ma la differenza tra 2432700, e 2432876 risolvendosi in 13790 e frazioni non è da curarsi per quanto si dovrà vedere nell'ultima risoluzione. Si è dunque dimostrato, che dividendo la semicirconferenza BVME in undici parti eguali, la ipotenusa DO del triangolo rettangolo DBO incontra prossimamente il punto x, che con B forma l'arco Bx di tre parti undecime della suddetta semicirconferenza.

Si costruisca sul questo fondamento la geom.ca dimostrazione per il punto Z, che con E forma l'arco EZ di tre parti undecime della stessa semicirconferenza, e si troverà che la diagonale DL incontra prossimamente il punto Z.

Si avverta di prender per seno dell'angolo di gradi 32 . 43' . 38'' . etc. piuttosto il minore 5406000, che il maggiore 5406392, perchè quello più di questo è prossimo al vero. In oltre se si verifichi Cy = 3785758 : 57/01 in circa, dovrà risultare dalla operazione richiesta la minima differenza dell'unità nell'ultima delle undici cifre, cioè in 14576426822 / 14576426823, e frazioni.

BO = 3. al raggio DB = 5.
Ma le tavole de' seni, e
tangenti suppongono il raggio
= 10. Facciasi adunque

5. 10 :: 3. 6

la BO sarà = 6 al raggio
= 10.
Ma la BO è seno dell'angolo
BDO; e. 6. è seno di gr. 37
adunque l'angolo BDO = 37°
adunque il suo supplemento
a due retti ODE = 143°.
Ora si deve considerare la
EO come tangente dell'
angolo ECO, ossia dell'arco
corrispondente BE.
Ma il raggio CB = 4 1/2; quel
delle tavole = 10. facciasi
adunque

4 1/2 . 10 :: 6 . 13

9 :: 3 . 3×20/9 = 60/9

adunque al raggio
CB, reso = 10. la tangente
EO = 6 6/9 = 666/9 = 666 2/3
alla quale tangente cor-
risponde l'angolo BE =
33°. 40'
Ma Bx < BE adunque
Bx < 33°. 40'

140/11 (= 16 4/11 * |4×60/11| 40/11 = 21 9/11
9/11 = 960/11 = 540/11 = 49 1/11) =
16°. 21'. 49". adunque 2/11 di 160 =
32°. 43'. BE = BE.

la differenza fra ☽B = 33°. 40′
e due undecime delle sonic. = 3C. 43. 38
è 56. 22

se a questa differenza provar si potesse uguale l'arco xb; resterebbe provato che ☽x = 2/11 della semicirconferenza ☽BME.

Abbiam detto che l'ang.° ODE = 143°
e l'angolo ☽CO = 33°. 40′
dunque l'angolo DOC = 3°. 20′. Ho poi di tutti gli angoli dell'triang.° ODC, di cui mi è pur noto il lato DO = 5. dunque ne troverò [illegible] la trigonom.a gli altri due lati CO, DC
facciasi S:C . S:O :: DO. DC
55436 . 58140 :: 10000 . 1048

e facciasi S:C . S:CDO :: DO . CO
55436 . 60161 :: 10000 . 10855
CO − Ct = Ot = 10855 − Ct
= 10855 − 10000
= 855

Ob . ☽x :: 855 .
100000 . 7 : DOC :: 855
100000 . 56504 :: 855 . 49 4/5

855
9150
9150
6590
49,795

Trovo ☽x = 33°. 51′
Semic. = 33°. 43′. 38
differ. = 7. 22

33°. 40′
49′
33°. 51′
33°. 43′. 38
7. 22

44

143
33. 40
336. 40
1 60 . 20
3. 20

S. di BCO = 55436
S. di DOC = 5814
S. di CDO =

5814000.00 | 55436
7040 | 1048
4650
4307 0

60161 0000 | 55436
4745 : : | 1048
3960 44
396 0

60161 0000 | 55436
4745 : : | 10855
3940
3520

1 | 11 | 49
7. 22 | 49
9 4
9 4
1078 | 7. | 154
22 | 154

$Cd = Cd = 5$; e fatto $Cd = 10$; sarà
Cd, tangente dell' angolo
$Cdd = 10$; e però l'angolo
$Cdd = 45°$
ma rapporto al circolo
BUMe, il raggio $Ce = 4\frac{1}{n}$
facciasi tanto

$4\frac{1}{n} \cdot 10000 :: 5.$
$9 \cdot 10000 :: 10. \frac{100000}{9} = 11111$

Cd tangente dell'angolo CCd
$= 11111$, cui corrisponde
l'angolo $CCd = 47°$.
Sarà tanto l'arco $Cv = 47°$
ma non si cerca Cv; si cerca
Cz. Bisogna tanto vedere
a cosa sia uguale vz da
aggiungersi a $47°$.
$dc = 1048$

$s.dCc \cdot s.Cdd :: Cd \cdot Cd$
$3489 \cdot 100000 :: 1048$
$104800000 \mid 3489$
$00013 \quad 30057$
-907

$CC - CR = 49443 - 10000$

~~d tangente di $45° = 141421$~~
Cd, tangente di $47° = 149447$
adunque $Cd - Cv = 100000$
49447

$CV \cdot Vz :: 49447$
$100000 \cdot 7 : Cd :: 49447$
$100000 \cdot 3490 :: 49447 \cdot 1726$
$Vz = 1726$

$\frac{3}{11}$ di $180° = 49° 5' 27''$
differ. $47° 0' 0'' - 27 =$

$CCd = 47°$
$dCd = 133°$
$Cdd = 45°$
178
$dCC = 0°$

$s.dCc \quad s.Cdd :: Cd \cdot Cd$
$3489 \cdot 70710 :: 1048$
1048
5656800
4184
70710
$7414840 \mid 3489$
$2124 \quad 2124$
4455
1976
1776
49447
3490
98894
44500
98894
44500
19784
14663
$17260 \mid 6894$



$\angle r = 48°$

$\angle y = 45$

$\angle M = 90$

$\angle N = 90$

$5\frac{1}{2} \cdot 6 :: 45$

$11 \cdot 12 :: 45$

12 / 90 / 45 / 540 / 60 / 49

Ma $\angle N$ prova via $\angle MNV = \angle M + MV$

$90 + 48° 10' 54''$

600 / 11 / 54

$\frac{1}{11}$ di $60 = 16° \cdot \frac{4}{11}$

$\frac{1}{12}$ di $60 = 8° \frac{2}{11} = 8° \frac{120}{11} = 8° 10' \frac{10}{11}$

$90 \cdot 98° 10' 54'' :: 45°$

90 / 60 / 5400 / 60 / 5880 / 5890 / 4200 / 41230000 / 1178 / 15903000 / 54000 / 60 / 2945 / 54 / 49 · 5' / 3 / 1427 / 3

o 6 $\widehat{bg}$ 37°

Anche 6660 $\widehat{ang}$ 353° 40'

180 / 37 / 143

180 / 47 / 133

Serie armonica, i di cui divisori fanno la serie aritmetica de' n.i comuni, in inversa de' denominini della serie armon.a

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{15} \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{19} \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{21} \cdot \frac{1}{22} \cdot \frac{1}{23} \cdot \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{29} \cdot \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{31} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{33}$ &c.

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12 · 13 · 14 · 15 · 16 · 17 · 18 · 19 · 20 · 21 · 22 · 23 · 24 · 25 · 26 · 27 · 28 · 29 · 30 · 31 · 32 · 33 · 34 · 35 · 36 · 37 · 38 · 39 · 40 · 41 · 42 &c.

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6

6 · 8 · 9 · 10 · 12

12 · 15 · 16 · 17 · 20

20 · 24 · 25 · 26 · 30

30 · 32 · 36 · 37 · 42

42 · 48 · 49 · 50 · 56

56 · 63 · 64 · 65 · 72

72 · 80 · 81 · 82 · 90

90 · 99 · 100 · 101 · 110

110 · 120 · 121 · 122 · 132

132 · 143 · 144 · 145 · 156

156 · 168 · 169 · 170 · 182

1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6

6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12

12 · 13 · 14 · 15 · 16 · 17 · 18 · 19 · 20

20 · 21 · 22 · 23 · 24 · 25 · 26 · 27 · 28 · 29 · 30

30 · 31 · 32 · 33 · 34 · 35 · 36 · 37 · 38 · 39 · 40 · 41 · 42

42 · 43 · 44 · 45 · 46 · 47 · 48 · 49 · 50 · 51 · 52 · 53 · 54 · 55 · 56

56 · 57 · 58 · 59 · 60 · 61 · 62 · 63 · 64 · 65 · 66 · 67 · 68 · 69 · 70 · 71 · 72

72 · 73 · 74 · 75 · 76 · 77 · 78 · 79 · 80 · 81 · 82 · 83 · 84 · 85 · 86 · 87 · 88 · 89 · 90

90 · 91 · 92 · 93 · 94 · 95 · 96 · 97 · 98 · 99 · 100 · 101 · 102 · 103 · 104 · 105 · 106 · 107 · 108 · 109 · 110

110 · 111 · 112 · 113 · 114 · 115 · 116 · 117 · 118 · 119 · 120 · 121 · 122 · 123 · 124 · 125 · 126 · 127 · 128 · 129 · 130 · 131 · 132

132 · 133 · 134 · 135 · 136 · 137 · 138 · 139 · 140 · 141 · 142 · 143 · 144 · 145 · 146 · 147 · 148 · 149 · 150 · 151 · 152 · 153 · 154 · 155 · 156

156 · 157 · 158 · 159 · 160 · 161 · 162 · 163 · 164 · 165 · 166 · 167 · 168 · 169 · 170 · 171 · 172 · 173 · 174 · 175 · 176 · 177 · 178 · 179 · 180 · 181 · 182

1 · 2 · 3 · 4 · 6 | 1 · 6 :: - - - - - 1 · 3

6 · 8 · 9 · 12 | 6 · 12 :: 1 · 2

12 · 15 · 16 · 20 | 12 · 20 :: - - - - - - 3 · 5

20 · 24 · 25 · 30 · 20 · 30 :: 2 · 3

30 · 35 · 36 · 42 | 30 · 42 :: - - - - - 5 · 7

42 · 48 · 49 · 56 | 42 · 56 :: 3 · 4

56 · 63 · 64 · 72 | 56 · 72 :: - - - - 7 · 9

72 · 80 · 81 · 90 | 72 · 90 :: 4 · 5

90 · 99 · 100 · 110 | 90 · 110 :: - - - 9 · 11

110 · 120 · 121 · 132 :: 5 · 6

132 · 143 · 144 · 156 :: 11 · 13

156 · 168 · 169 · 182 :: 6 · 7

La 1ª colonna a 6 · 12 · 20 &c

cresce de' n.i pari 4 · 6 · 8 · 10 &c

La 2da, 3za, e 4ª Colonna crescono de' n.i impari 3 · 7 · 9 · 11 · 13 &c

La ultima colonna cresce de' n.i pari 6 · 8 · 10 · 12 &c

con questa osservazione continuar si possono quanto uno vuole, le proporz.i Geometriche dichete con tutti i suoi medij armonici, e contrarmonici, e colla serie de' n.i pari 2 · 4 · 6 · 8 · 10 · 12 · 14 cresce come la serie naturale 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12 · 13 · 14 · 15 · 16 · 17 · 18 · 19 · 20 · 21 · 22 · 23 · 24 · 25 · 26 · 27 · 28 · 29 · 30 · 31 · 32 · 33 · 34 · 35 · 36 · 37 · 38 · 39 · 40 · 41 · 42 · 43 · 44 · 45 · 46 · 47 · 48 · 49 · 50 · 51 · 52 · 53 · 54 · 55 · 56 · 57 · 58 · 59 · 60 · 61 · 62 · 63 · 64 · 65 · 66 · 67 · 68 · 69 · 70 · 71 · 72 · 73 · 74 · 75 · 76 · 77 · 78 · 79 · 80 · 81 · 82 · 83 · 84 · 85 · 86 · 87 · 88 · 89 · 90 · 91 · 92 · 93 · 94 · 95 · 96 · 97 · 98 · 99 · 100 · 101 · 102 · 103 · 104 · 105 · 106 · 107 · 108 · 109 · 110 · 111 · 112 · 113 · 114 · 115 · 116 · 117 · 118 · 119 · 120 · 121 · 122 · 123 · 124 · 125 · 126 · 127 · 128 · 129 · 130 · 131 · 132 · 133 · 134 · 135 · 136 · 137 · 138 · 139 · 140 · 141 · 142 · 143 · 144 · 145 · 146 · 147 · 148 · 149 · 150 · 151 · 152 · 153 · 154 · 155 · 156 · 157 · 158 · 159 · 160 · 161 · 162 · 163 · 164 · 165 · 166 · 167 · 168 · 169 · 170 · 171 · 172 · 173 · 174 · 175 · 176 · 177 · 178 · 179 · 180 · 181 · 182

Tolti i n.i pari dalla serie, restano gl' impari 1 · 3 · 5 · 7 · 9 · 11 · &c

Tutti i medij aritmetici son quadrati 4 · 9 · 16 · 25 &c

Tutti gli armonici sono gli aritmetici meno uno } cioè tutti i medij armonici son la differa, e

Tutti i medij contr'armonici sono gli aritmetici più uno } tutti i contr'armonici son la somma di due quadrati; 3 = 4 − 1; 5 = 4 + 1

Nella 1ª proporz.e geometrica discreta con tutti i medij determinabi non resta fuori numero alcuno;

Nella 2da ne resta fuori uno dopo il 1º, ed uno avanti l'ultimo

Nella terza due dopo il 1º, e due avanti l'ultimo &c

Con questa osservaz.e si può continuar la serie delle proporzioni geometriche discrete quanto una vuole

La somme degli ommessi determini dopo il primo, e dell'ultimo, sono fra loro nella ragione degli esponenti della precedente proporzione. Per esempio

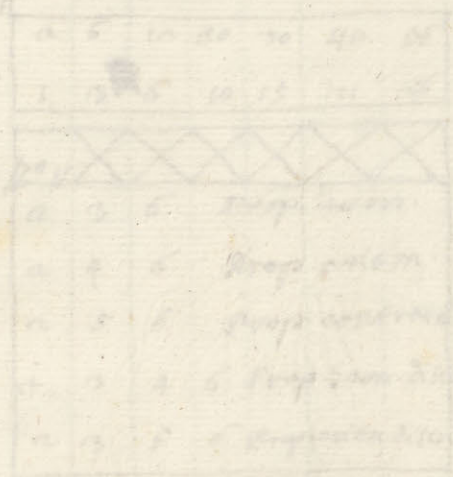
Nella 1ª proporz.a 7 · 10 + 11 :: 1 · 3 :: 2 · 6

Nella 3ª 13 + 14 · 17 + 18 + 19 :: 27 · 54 :: 1 · 2 :: 6 · 12

Nella 4ª 21 + 22 + 23 · 26 + 27 + 28 + 29 :: 66 · 110 :: 3 · 5 :: 12 · 20

Nella 5ª 31 + 32 + 33 + 34 + 35 · 37 + 38 + 39 + 40 + 41 :: 130 · 195 :: 2 · 3 :: 20 · 30

Numeri naturali	1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 · 8 · 9 · 10 · 11 · 12 · &c
Quadrati loro	1 · 4 · 9 · 16 · 25 · 36 · 49 · 64 · 81 · 100 · 121 · 144
	$\sqrt{1\times4} \cdot \sqrt{4\times9} \cdot \sqrt{9\times16} \cdot \sqrt{16\times25} \cdot \sqrt{25\times36} \cdot \sqrt{36\times49} \cdot \sqrt{49\times64} \cdot \sqrt{64\times81}$
Le proporz.i sono fra i n.i	2 · 6 · 12 · 20 · 30 · 42 · 56 · 72
n.i triangolari	1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21 · 28 · 36



10/c

Serie armonica, i di cui divisori fanno la serie aritmetica de' n.i comuni in inversa de' denominatori della serie armonica

N.o I.

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{17}$ $\frac{1}{18}$ $\frac{1}{19}$ $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{21}$ $\frac{1}{22}$ &c.

N.o II.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 &c.

20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 &c.

N.o III.

2	6	12	20	30	42	56
1	3	6	10	15	21	28

N.o IV.

2	3	4	5	6
6	8	9	10	12
12	15	16	17	18
20	24	25	26	30
30	35	36	37	42
42	48	49	50	56
56	63	64	65	72
72	80	81	82	90
90	99	100	101	110
110	120	121	122	132
132	143	144	145	156
156	168	169	170	182

N.o V.

2	3	6	Prop. arm.
2	4	6	Prop. arit.a
2	5	6	Prop. contrarm.
2	3	4	6 Prop. Geom. disc.
2	3	5	6 Prop. arit.a disc.

N.o VI

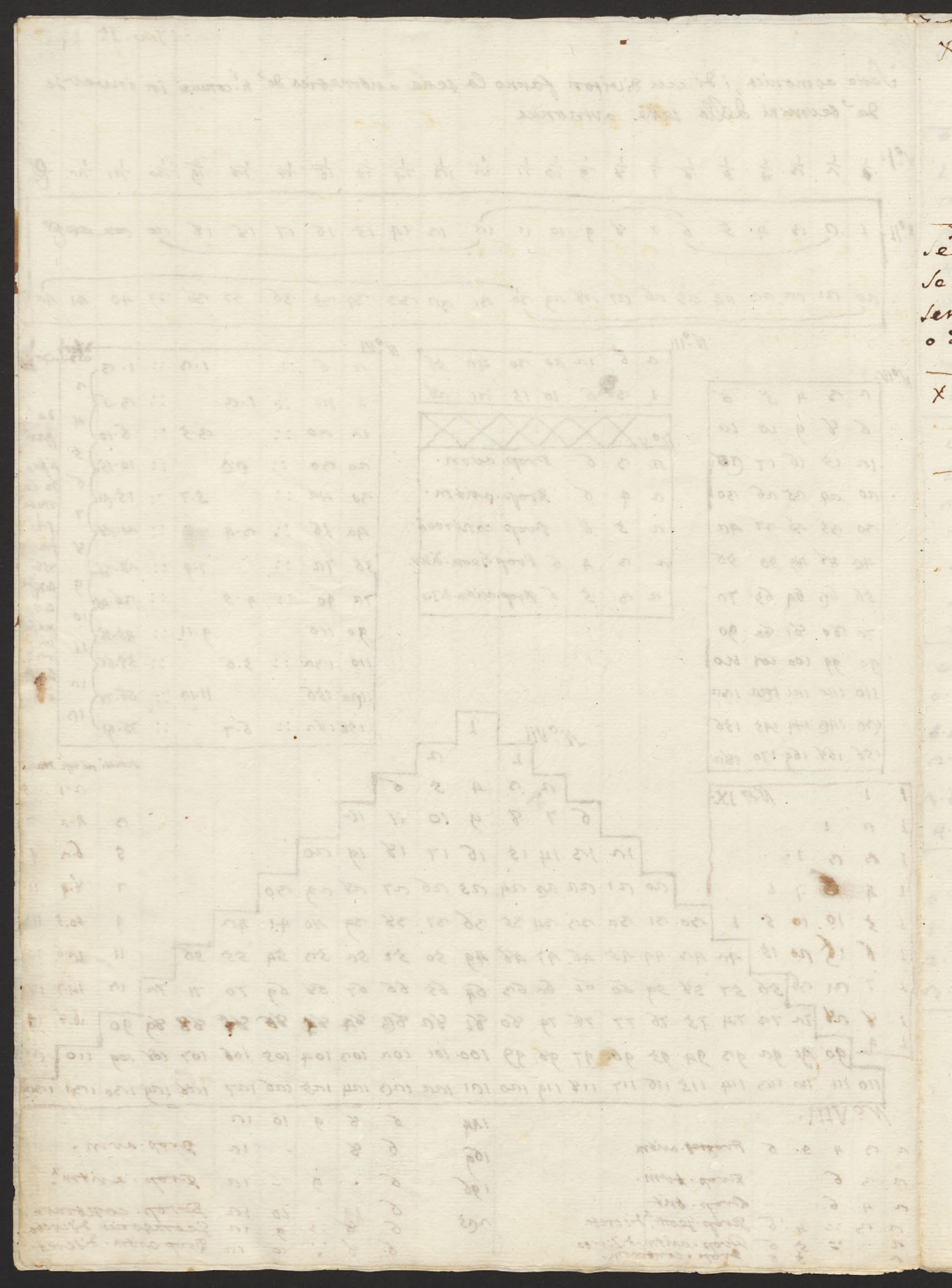
2	6	::		1.3	::	1.3	3
6	12	::	1.2		::	3.6	4
12	20	::		3.5	::	6.10	5
20	30	::	2.3		::	10.15	6
30	42	::		5.7	::	15.21	7
42	56	::	3.4		::	21.28	8
56	72	::		7.9	::	28.36	9
72	90	::	4.5		::	36.45	10
90	110			9.11	::	45.55	11
110	132	::	5.6		::	55.66	12
132	156			11.13	::	66.78	13
156	182	::	6.7		::	78.91	

Divisori

da' primi fino alla metà delli termini, cioè 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

N.o VII

| | | | | | | |



X

1 · 4 · 9 · 16 · 25 · 36

1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 9 · 12 · 15 · 16 · 20 · 24 · 25 · 30 · 35 · 36 · 42

1 · 2 · 4 | 4 · 6 · 9 | 9 · 12 · 16 | 16 · 20 25 | 25 · 30 · 36

XI

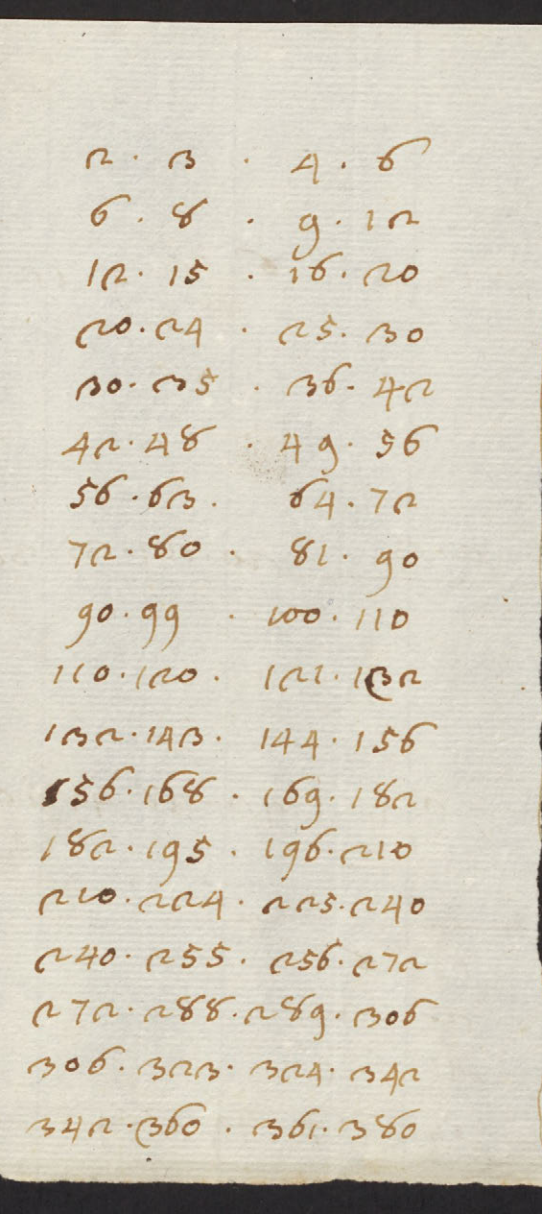
Serie p^a.	1 · 2 · 3 · 6	4 · 6 · 8 · 12	9 · 12 · 15 · 20	16 · 20 · 24 · 30
Serie 2da	2 · 3 · 4 · 6	6 · 8 · 9 · 12	12 · 15 · 16 · 20	20 · 24 · 25 · 30
Serie congiunta o di doppio centro 2 · 3 | 3 · 4	1 · 2 · 3 · 4 · 6	4 · 6 · 8 · 9 · 12	9 · 12 · 15 · 16 · 20	16 · 20 · 24 · 25 · 30

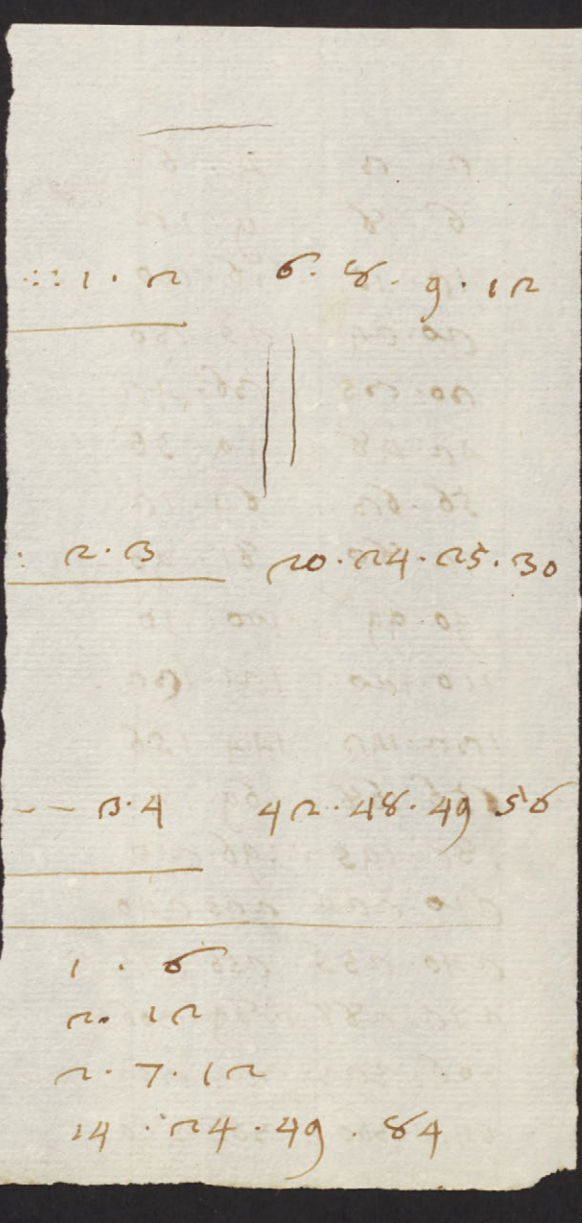
XII.

1 · 2 · 3	2 · 3 · 4	4 · 6 · 8
6 · 3 · 2	6 · 4 · 3	12 · 8 · 6

XIII.

1 · 2 · 3 · 6	4 · 6 · 8 · 12
2 · 3 · 4 · 6	6 · 8 · 9 · 12
1 · 2 · 3 · 4 · 6	4 6 · 6 · 9 · 12







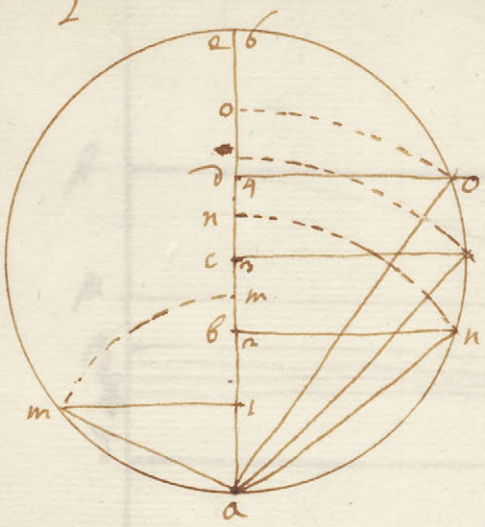
Forme di Ragioni | Forme col mezzo arit.co | Proporz.i g.d. con mezzi arm. ed arm. | Ragioni co mezzi arm.co arit.co e contrarm.co

0 . 2	0 . 1 . 2	0 . 0 . 1 . 2	0 . 0 . 1 . 2 . 2 :: 1 . 3
1 . 3	1 . 2 . 3	2 . 3 . 4 . 6	2 . 3 . 4 . 5 . 6 :: 1 . 2 ::
2 . 4	2 . 3 . 4	6 . 8 . 9 . 12	6 . 8 . 9 . 10 . 12 :: 3 . 5
3 . 5	3 . 4 . 5	12 . 15 . 16 . 20	12 . 15 . 16 . 17 . 20 :: 2 . 3
4 . 6	4 . 5 . 6	20 . 24 . 25 . 30	20 . 24 . 25 . 26 . 30 :: 5 . 7
5 . 7	5 . 6 . 7	30 . 35 . 36 . 42	30 . 35 . 36 . 37 . 42 :: 3 . 4
6 . 8	6 . 7 . 8	42 . 48 . 49 . 56	42 . 48 . 49 . 50 . 56 :: 7 . 9
7 . 9	7 . 8 . 9	56 . 63 . 64 . 72	56 . 63 . 64 . 65 . 72 :: 4 . 5
8 . 10	8 . 9 . 10	72 . 80 . 81 . 90	72 . 80 . 81 . 82 . 90
0 . 4	0 . 2 . 4	0 . 0 . 4 . 8	0 . 0 . 4 . 8 . 8 :: 1 . 5
1 . 5	1 . 3 . 5	3 . 5 . 9 . 15	3 . 5 . 9 . 13 . 15 :: 1 . 3
2 . 6	2 . 4 . 6	8 . 12 . 16 . 24	8 . 12 . 16 . 20 . 24 :: 3 . 7
3 . 7	3 . 5 . 7	15 . 21 . 25 . 35	15 . 21 . 25 . 29 . 35 :: 1 . 2
4 . 8	4 . 6 . 8	24 . 32 . 36 . 48	24 . 32 . 36 . 40 . 48 :: 5 . 9
5 . 9	5 . 7 . 9	35 . 45 . 49 . 63	35 . 45 . 49 . 53 . 63 :: 3 . 5
6 . 10	6 . 8 . 10	48 . 60 . 64 . 80	48 . 60 . 64 . 68 . 80
0 . 3 :: 0 . 6	0 . 3 . 6	0 . 0 . 9 . 18	0 . 0 . 9 . 18 . 18 :: 1 . 4
1 . 4 :: 2 . 8	2 . 5 . 8	10 . 16 . 25 . 40	10 . 16 . 25 . 34 . 40 :: 2 . 5
2 . 5 :: 4 . 10	4 . 7 . 10	28 . 40 . 49 . 70	28 . 40 . 49 . 58 . 70 :: 3 . 6 ::
3 . 6 :: 6 . 12	6 . 9 . 12	54 . 72 . 81 . 108	54 . 72 . 81 . 90 . 108 :: 4 . 7
4 . 7 :: 8 . 14	8 . 11 . 14	98 . 112 . 121 . 154	98 . 112 . 121 . 130 . 154
0 . 5 :: 0 . 10	0 . 5 . 10	0 . 0 . 25 . 50	0 . 0 . 25 . 50 . 50 :: 1 . 6
1 . 6 :: 2 . 12	2 . 7 . 12	14 . 24 . 49 . 84	14 . 24 . 49 . 73 . 84 :: 2 . 7
2 . 7 :: 4 . 14	4 . 9 . 14	36 . 56 . 81 . 126	36 . 56 . 81 . 106 . 126 :: 3 . 8
3 . 8 :: 6 . 16	6 . 11 . 16	66 . 96 . 121 . 176	66 . 96 . 121 . 146 . 176 :: 4 . 9

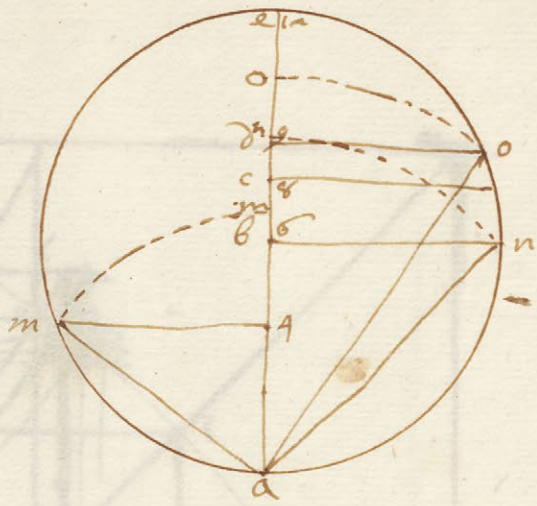
0	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6
4	5	6	7
5	6	7	8
6	7	8	9
7	8	9	10
8	9	10	11
9	10	11	12
10	11	12	13
11	12	13	14
12	13	14	15
13	14	15	16
14	15	16	17
15	16	17	18
16	17	18	19
17	18	19	20
18	19	20	21
19	20	21	22
20	21	22	23
21	22	23	24
22	23	24	25
23	24	25	26
24	25	26	27
25	26	27	28
26	27	28	29
27	28	29	30
28	29	30	31
29	30	31	32
30	31	32	33
31	32	33	34
32	33	34	35
33	34	35	36
34	35	36	37
35	36	37	38
36	37	38	39
37	38	39	40
38	39	40	41
39	40	41	42
40	41	42	43
41	42	43	44
42	43	44	45
43	44	45	46
44	45	46	47
45	46	47	48
46	47	48	49
47	48	49	50
48	49	50	51
49	50	51	52
50	51	52	53
51	52	53	54
52	53	54	55
53	54	55	56
54	55	56	57
55	56	57	58
56	57	58	59
57	58	59	60
58	59	60	61
59	60	61	62
60	61	62	63
61	62	63	64
62	63	64	65
63	64	65	66
64	65	66	67
65	66	67	68
66	67	68	69
67	68	69	70
68	69	70	71
69	70	71	72
70	71	72	73
71	72	73	74
72	73	74	75
73	74	75	76
74	75	76	77
75	76	77	78
76	77	78	79
77	78	79	80
78	79	80	81
79	80	81	82
80	81	82	83
81	82	83	84
82	83	84	85
83	84	85	86
84	85	86	87
85	86	87	88
86	87	88	89
87	88	89	90
88	89	90	91
89	90	91	92
90	91	92	93
91	92	93	94
92	93	94	95
93	94	95	96
94	95	96	97
95	96	97	98
96	97	98	99
97	98	99	100
98	99	100	101
99	100	101	102
100	101	102	103



I



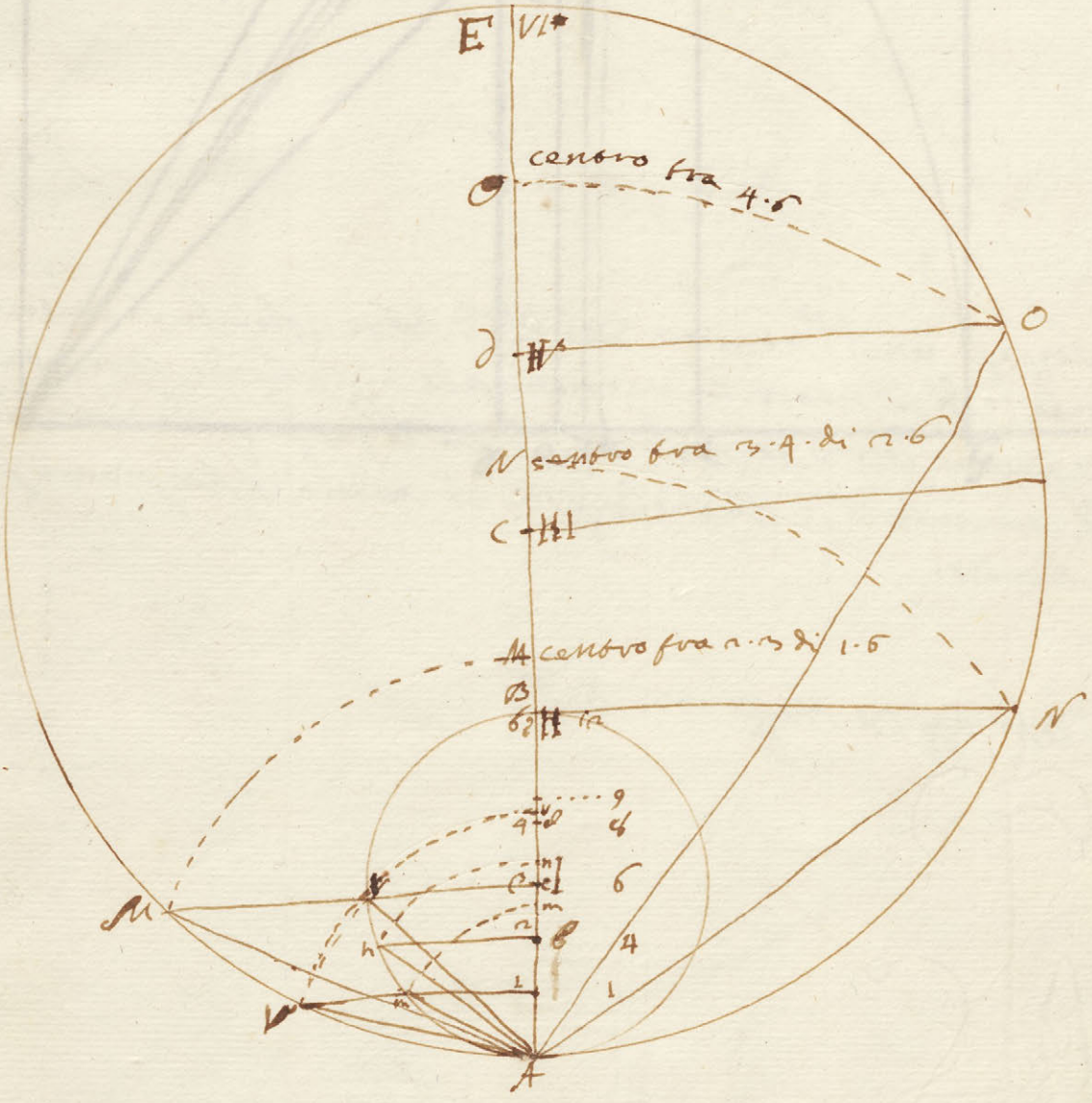
II

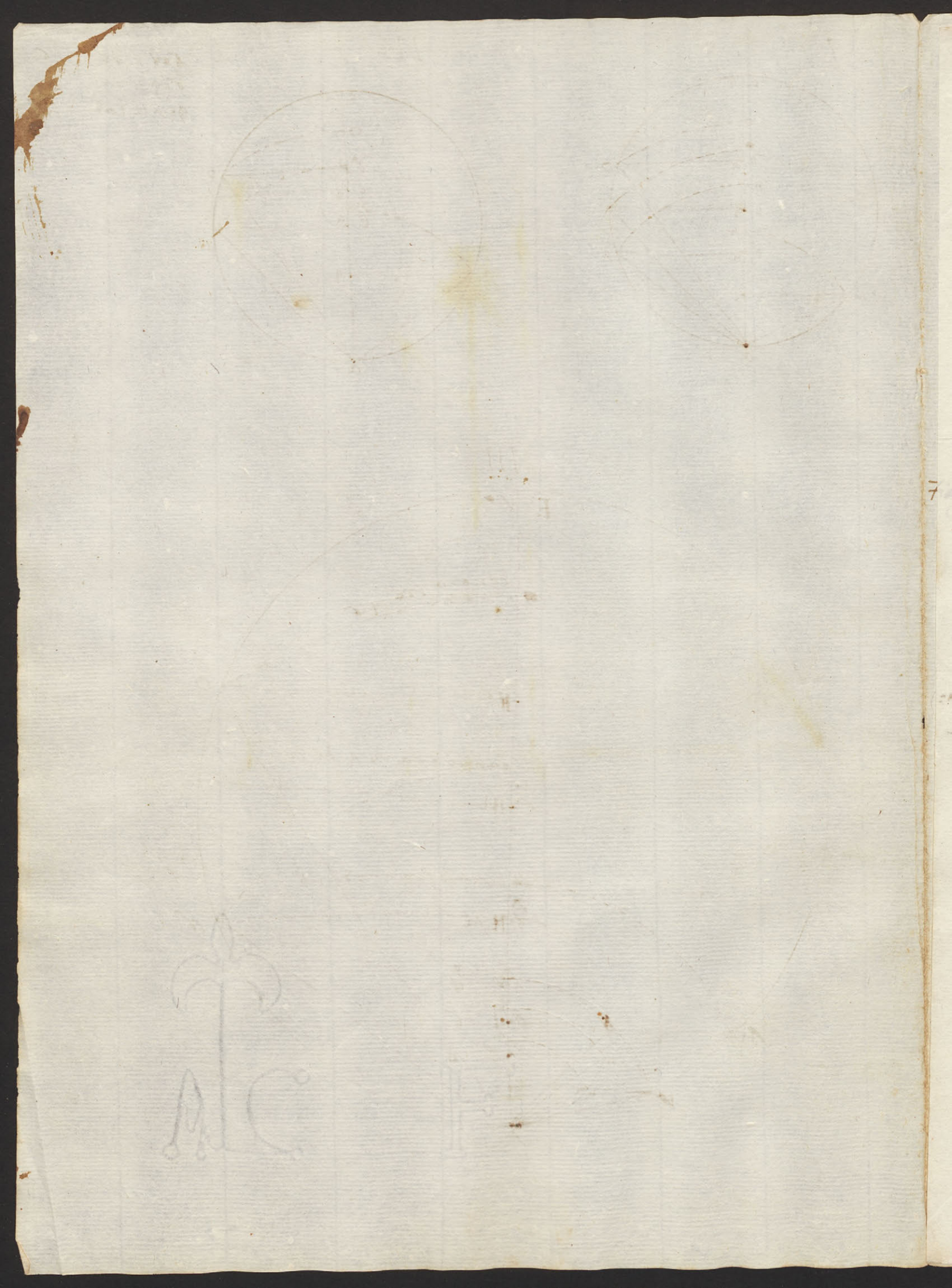


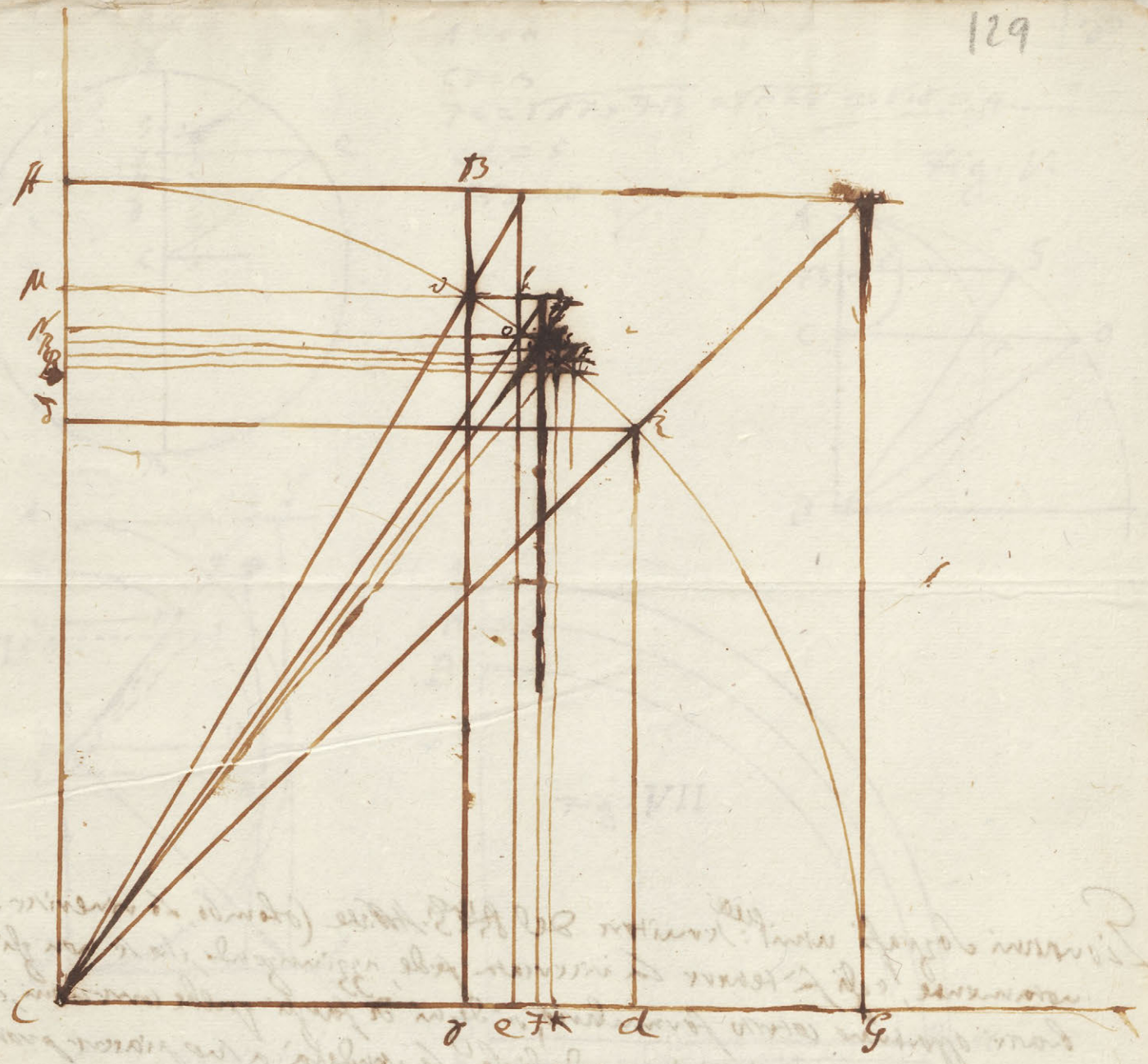
128

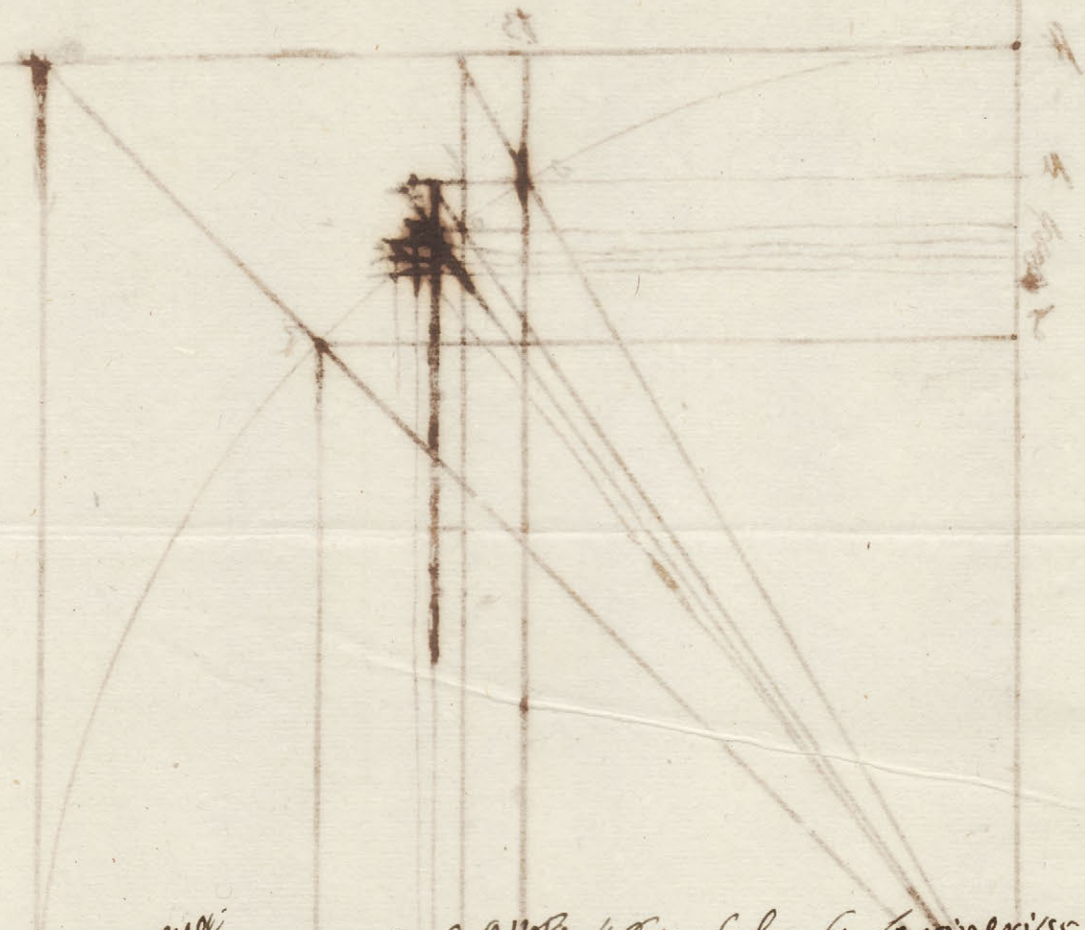
6×4 = 48 15
6×9 = 72 24
9×12 = 108 36

III





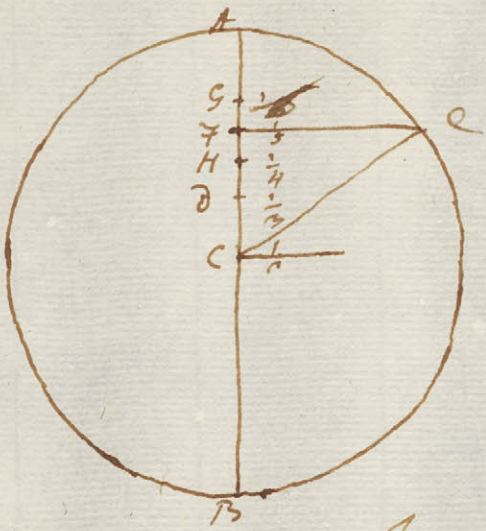

A
B
M
N
C
d
G



Giovanni Sozzi umiliss.° servitore del R.mo P. Abbate Colombo, le rinnova di-
votamente, e gli fa tenere la ricercata fede, aggiungendo, che se non gli rin-
cresce opportuno correre formulario, di degni di sapersi quelle correzioni, che
crederà commendarsi, e rimettendogliela, lo rendera a suo piacere puntual-
mente servito.

Di casa oggi 30 Maggio 1720. Giov.

IV



$A7 = a$

$C7 = b$

$7e = \sqrt{A7 \times 7B} = \sqrt{a \times b} = \sqrt{10} = 4$

$Ce = 5$

$AB = 10$

Fig. V.

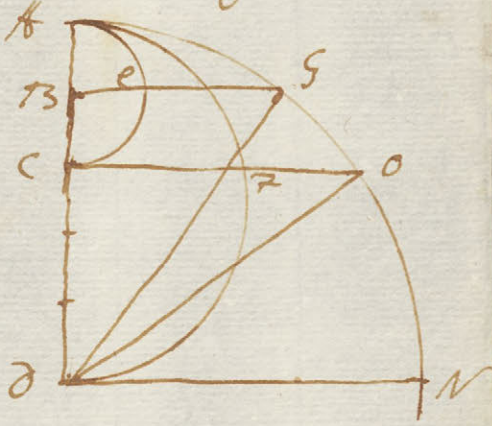


Fig. VI.

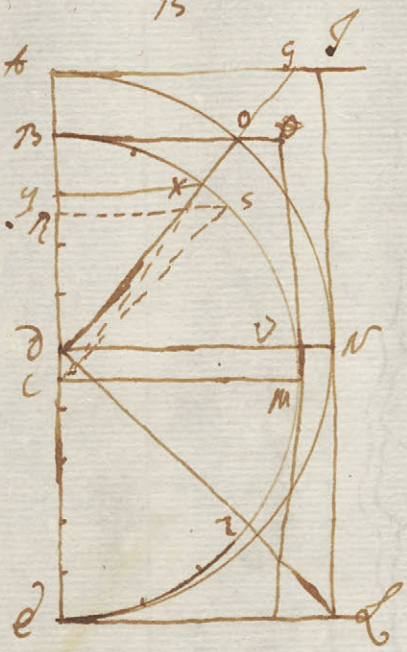


Fig. VII

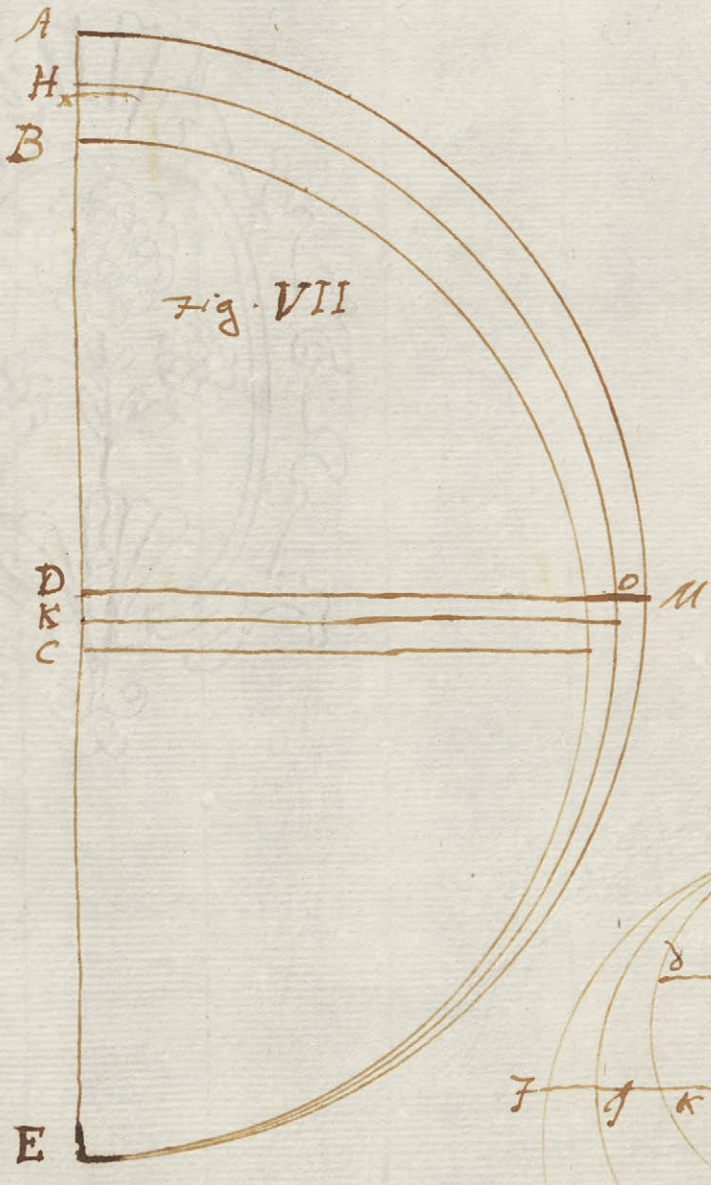


Fig. VIII

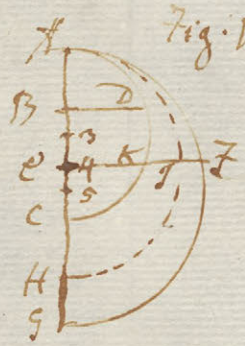
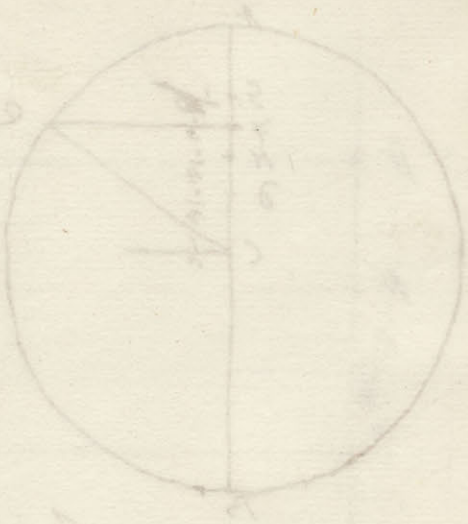
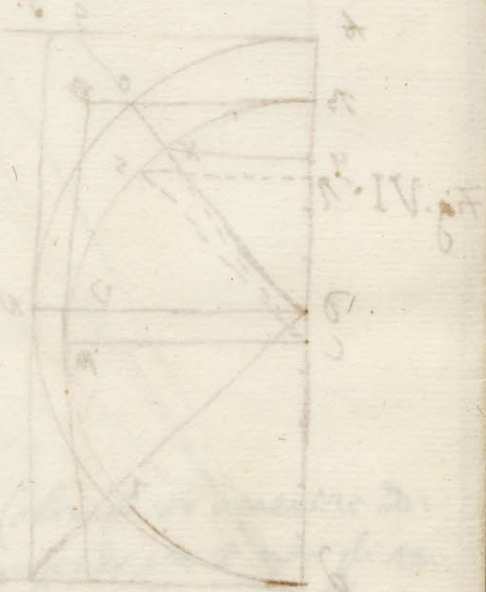


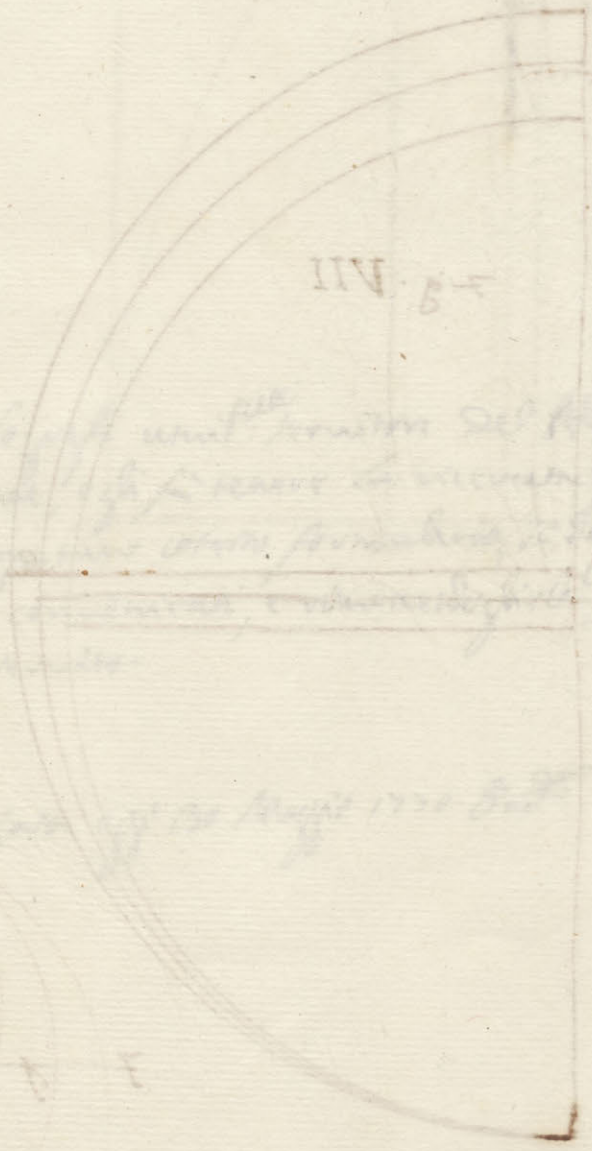
Fig. VIII

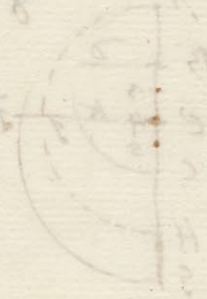












Del cubo, e sua radice.

data qualunq; somma si divida
per 6, ch'è il pr. cubo, a cui corri-
ponde nelle propor. g.d. della
serie del primo sistema il mezzo
arm.co. della duepla g.d. 6.8.9.12
come il cubo. 8. regge la divisione
della data somma in infinito,
così il mezzo arm.co 6. regge in
infinito, e misura comune
di tutti i mezzi arm.ci infiniti
dedotti dall'arm.ca serie infinita
1.2.3.4.5.6.&. Poichè della
ragione di 1.2. è mezzo
arm.co 3., di 2.3. mezzo arm.co 24;
di 3.4. mezzo arm.co 48., di 4.5
mezzo arm.co. 80; di 5.6. mezzo
arm.co. 120.

Posti in serie tutti gli mezzi
6.24.48.80.120.&, si trova
che 6. è parottore universale,
ed in oltre lo è in forza della
serie infinita approvata delle
possibili infinite ragioni,
formate da numeri impari,
e da n.i pari, cioè 1.3;
2.4; 3.5; 4.6. &
Nè vi è altra diversità senon
che il termine 6. converta
la serie approvata, ch'è in n.i p.i
6.24.48.80.120
1.3.5.10.15
2.4 3.5 4.6
Adunque principio comune
fra la natura cuba, e la
natura arm.ca, e sarà più
vero (come comune) quando
che

che si osserva nel dado, ch'è
il pr. cubo, ottenuto 6. faccie, non
6., conciche il n.o 8. deve con-
vertirsi nel n.o 6.
Nello stesso tempo si osserva, e dimo-
stra che data la quadrupla
geometrica 1.2.4; nell'arm.co
fisico sistema si converte
dimostrabilmente, e necessariam.te
nella tripla 1.2.3, ch'è il
prodotto di 2.4.8. convertiti
in 2.4.6. in n.i pr. 1.2.3.
Fatta la divisione della data
somma per 8, il risultato
si divida per la radice relativa
della qui esposta serie, la di
cui indicazione si avrà dal
risultato.

4.12.24.40.60.84.112.144.180.220
1.3.6.10.15.21.28.36.45.55
2.6.12.20.30.42 + aduq. identità
diff. 2.3.4.5.6.7.8.9.10
264.312.364.420.480.544.612
66.78.91.105.120.136.153
11.12.13.14.15.16.17

Dunque è palente la iden-
tità delle due nature,
perchè è la stessa serie infi-
nita de' mezzi arm.ci sopra
assegnati, e la stessa differ.

Memoria p la intelligenza de' due merdi delle proporz.i g.d. rispetto alla loro somma

Tripla g.d. 1.3.4.5.6. somma de' 3 merdi 3+4+5 = 12 | 3×4=12, 1×6=12

Duple g.d. 6.8.9.10.12. somma de' merdi 8+9+10 = 27 | 3×9=27
12.15.16.17.20 - - - 15+16+17 = 48 | 3×16=48
20.24.25.26.30 - - - 24+25+26 = 75 | 3×25=75
30.35.36.37.42 - - - 35+36+37 = 108 | 3×36=108

Altra serie 1×6=12, 3×9=27, 4×12=48, 5×15=75, 6×18=108
12.60.270
vadici di 1.a vag.a 1.6.18

3×4 = 12
3×9 = 27
3×16 = 48
3×25 = 75
3×36 = 108
15.90.270
vadici di 1.a vag.a 1.6.27
Resta comune 270, ove 27 = 3×9 cubo

Se si sommino 1+6+27 = 34 = 5×7 / se si sommino 1+6+18 = 25 = 5×5

5×7.5×5 :: 35.25 :: 7.5 la oss.ne adegua il rapporto
nelle vadici duple 5.7 ed alla duple g.d. corrisponde
5.6.7 la somma 27

1	6	12	20	30
3	8	15	24	35
4	9	16	25	36
6	10	20	30	42
15	33	63	99	143

15	15	somma de' 3 relativi contro arm.a
33	33	
63	63	
113	99	
	143	
	355	

1.o relativo ad 1 dim.o fra 1.00
5
10
17
26
37
95
355
450

Tredi merdi armici
15. di 12.20
33. di 30.42
63. di 56.72
99. di 90.110
143. di 132.156.

Adunq; l'arm.a nobile è del cerchio; la contrarm.a del diam.o, da cui si ha il quadrato

Questa è ottima osservaz.e dell'arm.a nobile del cerchio e della rivoluzione in se stesso denovo la seduple.

Sia 3×4=12 . 6 . 3 . 4 . si aggiunga à
in proporz.ne aritm.ca 3+4+5=12

Sia 3×5=15 . Si aggiunga il 3°. arithm.
7; sarà . 3+5+7=15

Duplicato 3. in 6. de 6×7=42; 6+7+8=21 sarà
del prodotto

Triplicato 3 in 9: Somà = 1/3 del prodotto

Quadruplicato . 3. in . 12 . Somà = 1/4 del prodotto

Dato 1 . 2 . 3 . si avrà sempre la
tripla fra la somà ed il pro-
dotto

Dato 2 . 3 . 4 si avrà sempre la
sesquialtera fra la somà
ed il prodotto, e così di tutta
la serie di cui sia capo . 2 .

Dato 4 . 5 . 6 si avrà la sesquiq.a
fra il prodotto e la somma

Non vegge più in 5 . 6 . 7

Dati i tre merzi della tripla 3.4.5 da questa
si ha la ugualità
3×4=12=3+4+5

Dati 6 . 9 . 10 da duplà, si ha 3 . 6
6×9=72 | 6+9+10=27

3 . 3
3 . 6
3 . 15
3 . 24
3 . 35
12

tutti merzi arm.ci

Dati 15 . 16 . 17 ", si ha 3 . 15
Dati 24 . 25 . 26 . si ha 3 . 24
Dati 35 . 36 . 37 ; si ha 3 . 35

1 . 1/2 . 1/3 . 1/21 . 1/5 . 1/6
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6

	merzi arm.ci	arithm.ci	conbarm.ci
2 − 1/2 = 3/2	3	3+1=4	3+2=5
3 − 2/3 = 6/3	6	6+1=7	6+4=10
4 − 1/4 = 15/4	15	15+1=16	15+2=17
5 − 1/5 = 24/5	24	24+1=25	24+2=26
6 − 1/6 = 35/6	35	35+1=36	35+2=37

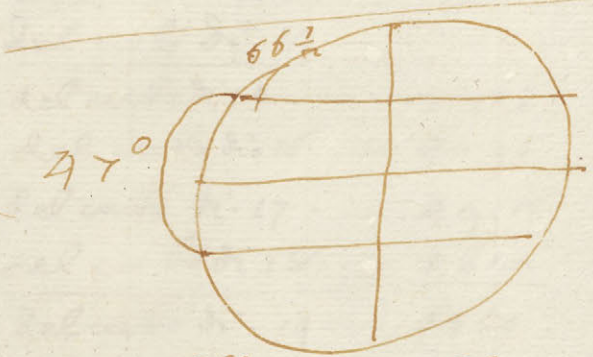
3 · 4 · radicum aritm.ca somma
n · 5 concavarum somma 7
1 · 6 · aurum.ca — — somma 7

n

3 × 7 = n1

1 · n · 4 somma 7

Vacui 7+8=15 · 10+11=n1
15 · n1 :: 5 · 7
14+15=n9 · 17+18=35
radicum duplex 7 · 10 · 1n
minima differa.
n3 + n4 = 47; n6+n7=93
47 · 93 :: 11 · 14 in minima differ.a



47 · 66 1/n :: 94 · 133

5 · 7 · 10
5 · 7
n · 17 · n4
1n · 17
n9 · 41 :: 94 · 133
n9
94
164
369
3 | 3654
3 | 1n84 2/3

n9 · 41 · 58 ·

1197
n66
3 | 3657
1n65 2/3

94 · 133
58 · 41
75 n | 133
470 | 532
545 n | 5453

41 + 58 = 99

Nel Lasero Tomo I. carte 107
Plabone indica chiaramente
la divisione del no. 4 parag:
giave la quantità delle linee
irrazionali ed assegna p
esempio . 17. che è la somma
di .8 + 9.

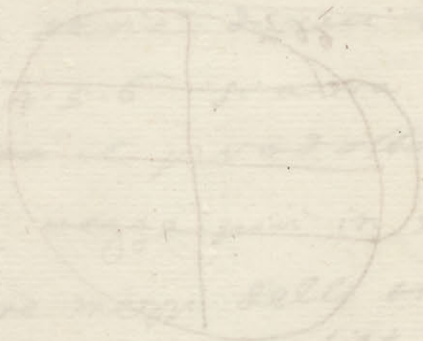


Tavola delle radici

Principio primo

	1 . 2 . 1	
	1 del cubo di 1 .	— 8
dif. 1	2 del cubo di 3 .	— 27
	3 del cubo di 4 .	— 64
	4 del cubo di 5 .	— 125
	5 del cubo di 6 .	— 216
	6 del cubo di 7 .	— 343
dif. 2	7 del cubo di 8 .	— 512
	8 del cubo di 9 .	— 729
	9 del cubo di 10 .	— 1000
	10 del cubo di 11 .	— 1331
dif. 3	11 del cubo di 12 .	— 1728
	12 del cubo di 13 .	— 2197
	13 del cubo di 14 .	— 2744
	14 del cubo di 15 .	— 3375
dif. 4	15 del cubo di 16 .	— 4096
	16 del cubo di 17 .	— 4913
	17 del cubo di 18 .	— 5832
	18 del cubo di 19 .	— 6859
dif. 5.50	di 20 .	— 8000
	di 21 .	— 9261
	di 22 .	— 10648
	di 23 .	— 12167
dif. 6.72	di 24 .	— 13824
	di 25 .	— 15625
	di 26 .	— 17576
	di 27 .	— 19683
dif. 7.98	di 28 .	— 21952
	di 29 .	— 24389
	di 30 .	— 27000
	di 31 .	— 29791
dif. 8.128	di 32 .	— 32768
	di 33 .	— 35937
	di 34 .	— 39304

dif. 9.153	del cubo di 35 .	— 42875
	di 36 .	— 46656
	di 37 .	— 50653
	di 38 .	— 54872
	di 39 .	— 59319
dif. 10	di 40 .	— 64000
	di 41 .	— 68921
	di 42 .	— 74088
	di 43 .	— 79507
dif. 11	di 44 .	— 85184
	di 45 .	— 91125
	di 46 .	— 97336
	di 47 .	— 103823
dif. 12	di 48 .	— 110592
	di 49 .	— 117649
	di 50 .	— 125000
	di 51 .	— 132651
dif. 13	di 52 .	— 140608
	di 53 .	— 148877
	di 54 .	— 157464
	di 55 .	— 166375
dif. 14	di 56 .	— 175616
	di 57 .	— 185193
	di 58 .	— 195112
	di 59 .	— 205379
dif. 15	di 60 .	— 216000
	di 61 .	— 226981
	di 62 .	— 238328
dif. 16	di 63 .	— 250047
	di 64 .	— 262144
	di 65 .	— 274625
	di 66 .	— 287496
dif. 17	di 67 .	— 300763
	di 68 .	— 314432
	di 69 .	— 328509
	di 70 .	— 343000 .

1. E quanto al 1° libro: contiene otto molte cose attinenti alle ragioni, e proporzioni; le quali cose tutte nascono, come da lor fonte, da questo Problema: Data una qualunque ragione trovare fra i termini di questa ragione, moltiplicati per 'l raggio, cioè per 'l medio aritmetico de' medesimi termini, trovare, dico, i mezzi armonico, geometrico, aritmetico, e contrario. I quali mezzi tutti ritrova l'Autore [a · b / a · v · b / av · ab :: vv · bv] anzi nel cerchio. Perchè poi il quadrato del seno è sempre il mezzo armonico fra i pezzi del diametro ℄

7

i pezzi del diametro, moltiplicati per 'l raggio, la circonferenza del cerchio si può con ragione chiamare curva armonica; lo che si conferma ancora con altre ragioni, delle quali una si è che per inscrivere i poligoni regolari nel cerchio, si divide necessariamente la circonf.a del cerchio 1. in $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ cioè in armonica progressione.

Nè è cosa arbitraria il ridurre una ragione a · b a proporzione geometrica discreta, moltiplicando le parti a · b del diametro, per il raggio. Poichè posta le parti a · b del diametro, sia il diametro, ed è necessario il mezzo del diametro e avere il raggio $\frac{a+b}{2} = v$. Questa adunque è la prima e necessaria divisione del diametro

Quando poi si fa av · ab · vv · bv il cui mezzo armonico è ab, l'aritmetico vv; la ragione arbitraria a · b si riduce in av · bv al principio non necessario, cioè al raggio. Sono in altre av · bv piani, come son piani i quadrati del seno e del raggio, che sono i medj armonico, ed aritmetico.

lib. 2do che contiene molte osservazioni appartenenti alle vazioni co' loro nerji determinati

Il lib. 2do contiene molte osservazioni pe le proporzioni ed. co' nerji determinati

1. data la serie de' quadrati de' n.i naturali 1.4.9.16.25.36 &
2. la serie delle proporzioni
g.d.2.3.4.6.8.9.12.15.16.20.24.25.30
si trova che gli esponenti di queste proporzioni sono nerji geometrici fra i quadrati

1. 4 9 16 25 36 49. 64

1.2.3.4.6.8.9.12.15.16.20.24.25.30.32.36.40.45.48.49.56.63.64.

÷ 1.2.4 | 4.6.9 | 9.12.16 | 16.20.25 | 25.30.36 | 36.42.49 | 49.56.64 |

Da queste due serie unite nasce una specie di proporzioni in cui il p.o nerjine è sempre un quadrato, e l'ultimo nerjine è sempre quello stesso della ~~subcoppia~~ proporz. soproporta ai quadrati, ed i nerji sono il p.o nerjine ed il nerjo armonico diffa. fra questi nerji il rapporto ai loro esponenti non sono nè armonici, nè aritmetici, nè contrarmonici.

Son composte queste proporz.i dalle forme prima aritmetica ed armonica { 1.2.3 / 2.3.6 } Nasce quindi una { 1.2.3.6 } terza specie di proporzioni che si chiamano ~~congiunte~~, o di doppio

1.2.3.6			
4.6.6.12	2.3.4.6		
9.12.15.20			
16.20.24.30	1.2.3		
25.30.35.40	6.3.2		
serie p.a	1.2.3.6	4.6.6.12	9.12.15.20
2da	2.3.4.6	6.6.9.12	12.15.16.20
congiunte	1.2.3.4.6	4.6.6.9.12	9.12.15.16.20

l'esperimento magg.e è lo stesso in tutte e due queste serie.
Proveremo nel libro che le proporzioni congiunte hanno luogo nel cerchio
Ecco un altra serie di proporzioni di molto uso. Queste sono proporzioni aritmetiche diverse col mezzo armonico e contrarmonico. Esporremo in un Teorema la legge con cui son fatte.
Gli esperimenti di queste proporzioni 3.6.10.15.21.66.36 sono in inversa delle differenze dell'armonica serie $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

60.30.20.15.12.10

differ. 30.10.5.3.2
1.3.6.10.15

come pure sono nella stessa ragione gli esperimenti delle g.d.

2.6.12.20.30
1.3.6.10.15

In queste proporzioni aritmetiche diverse le somme degli esperimenti, e de' mezzi sono i numeri quadrati de' numeri caffo 3.5.7. &c
Nascono ancora queste proporzioni aritmetiche diverse da quelle geometriche diverse che hanno tutti i denominatori fuorchè il mezzo aritmetico.
Si deducono da queste proporz.i a.d. alcune cose intorno alle formaz.i de' n.i quadrati

esperimenti

3.4.5.6 . . . :: 1.2
10.12.13.15 . . . :: 2.3
21.24.25.28 . . . :: 3.4
36.40.41.45 . . . :: 4.5
55.60.61.66 . . . :: 5.6

1.3.4.6
6.8.9.12
12.15.16.20
20.24.25.30
30.35.36.42

3.4.5.6	3+6=9=4+5
10.12.13.15	10+15=25=12+13
21.24.25.28	21+28=49=24+25

6.8.9.10.12	3.4.5.6
20.24.25.26.30	10.12.13.15
42.48.49.50.56	21.24.25.28
72.80.81.84.90	36.40.41.45

3. Vedi un'altra serie di proporzioni armoniche congiunta a quella, di cui abbiamo parlato finora, le quali tutte, fuori che la prima, divise a due danno la serie de' numeri.

1.√2.3 ; 6.8.10 ; 16.18.20 ; 30.32.34 ; 46.50.52 ; 70.72.74 &
3.4.5 ; 8.9.10 ; 15.16.17 ; 24.25.26 ; 35.36.37 &c

e le loro somme sono

6. 24 54 96 150 216
1. 4. 9 16. 25. 36

si pongano in ordine queste due serie

1.2.3 6.8.10 16.18.20 30.32.34
3.4.5.6 10.12.13.15 24.25.26.28 36.40.41.42.45
Radici 3 5 7 9

2.3.4.6
4.3+4.2
4.7.2

4. In ogni proporz. g. di numeri determinati armonico ed aritmetico, se si prende il doppio degli estremi, e la somma de' numeri armonico, ed aritmetico 4.7.2 il prodotto degli estremi = 46, ed il quadrato del medio 7×7=49 non hanno altra differenza che la unità. In tal caso il medio 7. si può chiamare medio geometrico razionale incompleto fra gli estremi 4.2., e la ragione 4.7 si potrà prendere reduplicata incompleta della ragione fra gli estremi 4.2 ; poiche 4×4=16 ; 7×7=49 e 16.46 :: 4.2a

ma i numeri 4. 7 danno
ancora il merzo del cerchio
le radici complesse di 4. 1a.
come dimostreremo a suo
luogo.

lib. III. dell'ordine delle cose naturali

Veniamo ora all'ordine delle
cose naturali, di cui tratta
il libro. III. Si vuol vedere
in primo luogo, se fra le
idee che abbiamo siavi la
idea generale dell'ordine, che
servire poi possa quasi di
face per investigare l'ordine
delle cose di questo universo
Ordinata è certamente la serie
armonica 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$ &
ed ordinata è pure la serie
aritmetica 1. 2. 3. 4. 5. 6 &
di queste due imagini dell'ordine
la p^a. è certamente la serie armo-
nica; imperciocchè da essa nasce
la serie aritmetica, che è
formata dai divisori dell'armonica
2. Procede l'armonica serie dall'
1. come tutto, di cui tutti i ter-
mini sono parti. Procede
la serie aritmetica dalle parti
al tutto, al quale mai non
arriva. adunque è più nobile
la serie armonica
3. Nell'armonica vi è la unione
costante, tutto è vario nell'ari-
tmetica
4. Nell'armonica a primo aspetto
tutto si vede ordinato, e
congiunto, Nell'aritmetica vi

sono de' numeri che pajono
azioni, e bisogna fare cerce
operazioni e mostravli ordi-
nati, e connessi
da armonica, serie è dato di una
idea dell'ordine che è la pri-
la principale, la più nobile
e la più chiara di quella
che dà l'Aritmetica serie.
Non parlo delle serie geome-
triche, poiché queste contengono
sempre la stessa ragione, mentre
le serie armonica, ed aritme-
tica contengono ragioni
sempre varie, relative alla
varietà delle cose, che com-
pongono l'Universo

1 · 2 · 4 · 8 · 16 / 1 · $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{4}$ · $\frac{1}{8}$ · $\frac{1}{16}$

Passiamo poi a vedere se la
stessa armonica serie che con-
tiene tutte le armoniche
proporzioni, ci dia ancora
l'ordine di questo mondo, e
della cosa, che lo compon-
gono.
Io dovrebbe certam.te se tutte le
cose fossero armonicamente
fatte, se tutte dipendessero
da un armonico principio
impresso alle cose. Questo
mondo allora sarebbe uno,
e sarebbe un tutto, le cui
parti sarebbero le cose stesse.
e la ragione delle cose fuori
loro ed al loro tutto sarebbe
espressa dall'ordine della
Armonica serie.

Resta dunque da ricevare
se fra le cose che sono, e che
si fanno, vi siano esempj
di armonica proporzione,
e se vesi speranza di poterla
ricognive in esse le cose.
che sole ricerca ~~non~~ richiede lun-
ga e difficile non sia da
porsi fra le impossibili
me lo fa credere l'autorità
di Platone, ed alcuni esempj
quanto agli esempj siano il p.°
la corda sonora, che gravita.
dà tre suoni 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$ che
sono in armonica proporz.
Questa proporz.° è nella cor-
da ~~a~~ forza di sua natura,
ne dipende da umano arbitrio
sia il 2do esempio quello
del 3.° suono. se tocco due
corde sonore lunghe come
1. 3, sendo allora i due
suoni 1. 3, anco quello di
tutta la corda, che riduce qué
due ad armonica proporzione
Dunque il 3.° suono muova
la unità o la corda tutta
divisa nelle sue parti, e
risolve il suono delle parti
nel suono del tutto. E ciò in
niun modo dipenda da
arbitrio umano.
V'è adunque un principio
armonico che fa nascere in
natura le armoniche proporz.ni
Altri esempj davero ancora de' suoni

de' pianeti, de' colori.
Se dunque l'armonico principio
ci riceva con lo prisma o
coll'arcobaleno de' colori; se ci
alletta coll'armonia de' suoni;
se con legge armonica
sono ritenuti i pianeti dalla
ovvia loro; se da principio
armonico si divide la corda
in 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$; se toccando
due corde, si sente il 3°
suono del suono armonico:
questi esempj fan nascere
la speranza che provare
una volta si possa aver
luogo questo principio an-
cora negli oggetti degli
altri sensi, ed in alcune cose
naturali, se i filosofi
rivogliessero i loro studj
a questa cosa, che finora
hanno ben troppo negletta
Quanto più esempj si andas-
sero discuoprendo, tanto
più ci avvicineressimo
a poter conoscere se
questo principio abbia luogo
in tutte le opere della Natura
e se quell'ordine delle cose
senza di cui non si possono
affatto conoscere, sia quella
stessa serie che in se com-
prende tutte le armoniche
proporzioni.

lib. IV. del Terzo piano
e del cerchio

Si due corde date sonore, le cui lunghezze siano in alcuna di queste ragioni $1 \cdot \frac{1}{2}$; $1 \cdot \frac{1}{3}$; $1 \cdot \frac{1}{4}$ &c
ovvero $1 \cdot \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$; $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ &c
ovvero $1 \cdot \frac{1}{3}$; $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}$; $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7}$ &c
se queste due corde dico ugualmente grosse, e ugualmente tese, si battino nello stesso tempo, oltre i due suoni delle due corde, se ne sente un terzo, che è sempre uguale al suono, che si avrebbe da tutta la corda.

Si sa che se si moltiplicano due frazioni $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ si ha il prodotto $\frac{1}{6}$, minore di ciascheduna ~~frazione~~ frazione moltiplicata; poichè in questa moltiplica si prende $\frac{1}{3}$ di $\frac{1}{2}$.

Ma questo prodotto $\frac{1}{6}$ significa che per dare in un solo termine la misura comune di quelle due frazioni, il tutto $1 = AB$ deve essere diviso in sei pezzi uguali, delle quali $\frac{1}{2}$ ne comprende 3, e $\frac{1}{3}$ ne comprende 2. dividendo o concependo divisa la corda AB in sei pezzi, non si muta la quantità d'essa corda. moltiplicando adunque due delle sue pezzi in due delle sue pezzi, si ha il prodotto 6.

Se A sarà le due corde siano $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} :: 3 \cdot 2$, il 3° suono è = 6

$\frac{1}{a} \times \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

$\frac{ab}{a} \times \frac{ab}{b}$

$b \times a$ $\quad ba$

10

	3.° suono
1. 2.	2
2. 3	6
3. 4	12

Se le corde siano $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} :: 4.3$
il terzo suono sarà $3 \times 4 = 12$
cioè il suono di tutta la corda

ma la stessa formola si ha nel cerchio, dividendo il diametro AB in $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c e tirando i seni e le code corrispondenti

$\overline{AC}^2 = 1 \cdot \overline{BC}^2 = 2 \cdot \overline{CB}^2 = 2$ $\quad 1.2.2$

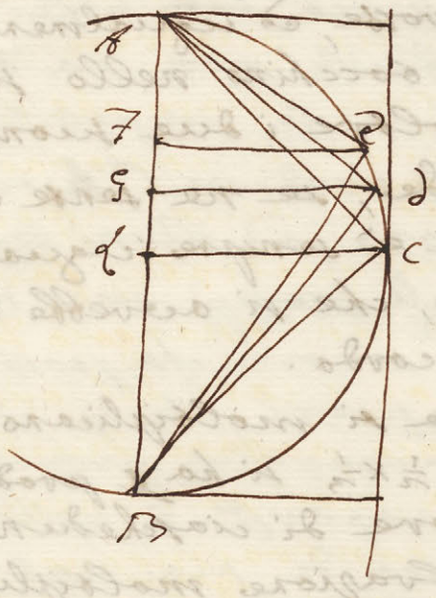
$\overline{FD}^2 = 2 \cdot \overline{AD}^2 = 3$; $3d = 6$ $\quad 2.3.6$

$\overline{ZE}^2 = 3 \cdot \overline{AE}^2 = 4 \cdot \overline{BE}^2 = 12$ $\quad 3.4.12$

Il terzo suono lo dà tutta la corda stessa sonora AB; e lo stesso è rappresentato da rv cioè dalla metà del quadrato circoscritto, come dimostreremo.

La formola del 3.° suono risolve tutte le ragioni nell'armonica unità, che è il principio di tutta l'armonica serie. Questo 3.° suono produce il basso = l'armonia, che è la congiunzione delle parti nella = unità del suo tutto

Troveremo una serie di rettangoli, tutti eguali a rv cioè alla metà del quadrato circoscritto, & i quali rettangoli si deducono dalla serie delle ragioni ridotte a geometriche proporzioni descritte co' mezzi determinati. e principalmente si deducono dai centri delle medie proporzioni.



Quanto ai triangoli Pitagorici, de' quali si tratta nel libro 5°. prima di esso dimostrerò questo Teorema: La differenza de' quadrati del mezzo armonico, e contr'armonico è sempre un quadrato.

1°. È adunque chiaro che il mezzo armonico, il contr'armonico, ch'è la proporzionale, e la radice della differenza de' loro quadrati, faranno sempre un triangolo Pitagorico

3° Che se poi i lati del triangolo Pitagorico potranno dividersi a metà, cioè se i mezzi armonico, e contr'armonico siano numeri pari: saranno i lati del triangolo Pitagorico ancora la metà del mezzo armonico e contr'armonico, ed $\overline{a+d} \times d$ poichè $\overline{a+d} \times d$, è sempre un n°. pari

4°. I quadrati cosso

$$\left.\begin{matrix} 9 \\ \square 5 \\ 49 \end{matrix}\right\} \text{ divisi in } \left\{\begin{matrix} 24 \cdot 5 \\ \square 1 \cdot \square 3 \\ \square 4 \cdot \square 5 \end{matrix}\right.$$

danno i quadrati de' numeri così divisi, la differenza de' quali dà lo stesso quadrato

$$\left.\begin{matrix} 4 \times 4 = 16 \\ 5 \times 5 = \square 5 \end{matrix}\right\} \square 5 - 16 = 9$$

$$\left.\begin{matrix} \square 1 \times \square 1 = 144 \\ 13 \times 13 = 169 \end{matrix}\right\} 169 - 144 = \square 5$$

5° I triangoli Pitagorici di questa specie, che sono quelli del n°. 3°. dipendono dalle prime

---

q.p.b.v. de' Triangoli Pitagorici

$\square \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$5 \times 5 = \square 5$

$3 \times 3 = 9$

16

$6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot \square 1$

$10 \times 10 = 100$

$8 \times 8 = 64$

36

3. 4. 5

6. 8. 10

ch'è la differa de' due quadrati del mezzo arm.co e contrarm.co

forme di ragione 1·n; n·3; 3·4 le quali ridotte a proporzioni co' mezzi determinabi, hanno sempre per mezzo armonico un quadrato di numero cioè i lati di questi triangoli 3·5·7 sono le somme delle ragioni, da cui si son dedotti i triangoli de' numeri delle quali ragioni si sono presi i doppj a trovarne il medio armonico

3 = 1+n
5 = n+3
7 = 3+4

1·n · n·3
n·4 · 4·6
n·3·4 · 4·5·6
6·8·9·10·n | 20·24·25·26·30
6·8·9·10·12 | 20·24·25·26·30
4·3·5 | 12·5·13
48·48·49·50·56
24·7·25

3·4·5·6 | 1+n·4·5 | 3·4·5
10·12·13·13 | n+3·12·13 | 40/n·12·13
12·24·25·26 | n+4·24·25 | 12/3·24·25

3·6 :: 1·n
10·15 :: n·3
12·24 :: 3·4

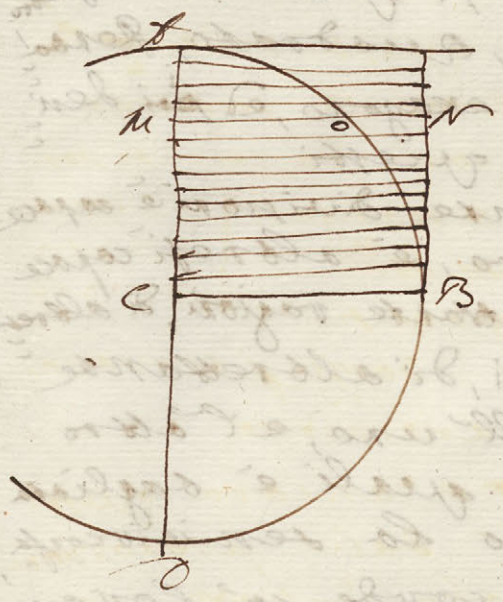
n·3·4·5·6	6-n·3·5
6·8·9·10·12	12-6·8·10
12·15·16·17·20	20+n·15·17

Si possono ancora questi triangoli dalle proporzioni armoniche dissolvere co' mezzi determinati

Si trovano ancora i triangoli Pitagorici le dove il mezzo armonico, ed il contrarmonico, si prenda il corto lato del triangolo a differenza degli esponenti

Lib. VI.

Della ragione che passa fra il diametro, e la circonferenza



la circonferenza del cerchio è una, e tutta la stessa, e sempre uniforme; poichè il raggio, o diametro ch'è la misura in qualunque punto della circonferenza. Dal che la circonfa. in ogni suo punto può avere principio, e fine

Questa unità del cerchio nasce dall'armonica proporzione con cui è costituito. Poichè la circonfa., di ogni ordinata ne taglia via parte (MO), che il quadrato di MO sia il mezzo armonico di quella ragione, in cui il seno ha tagliato il diametro, ridotta che sia quella ragione a proporz.e q. dicevasi come abbiam provato nel p.o Problema.

Il mezzo armonico del quadrato va a finire nella circonfa del cerchio ed MN (il cui quadrato è il mezzo armonico) viene determinato dal lato del quadrato. Adunque il cerchio è armonico, ed il quadrato circoscritto è armonico.

Vediamo se da questi principj inferir si possa la ragione fra il diametro, e la circonfa.

Prima di tutto osserviamo che le dimostrazioni di Archim.e

di Metio di Cuben sono fondate su i poligoni che geometricamente possono inscriversi, e circoscriversi al cerchio, i quali sono quattro triangolo, quadrato, pentagono, ed exagono, e i dieci derivati da questi

Ma di quante divisioni è capace il diametro, e altrettanto capace di altrettante ragioni, di altrettanti seni, di altrettante corde dell'uno, e l'altro arco, ne' quali è tagliata dal seno la semicirconferenza. le quali corde co' loro quadrati danno i medj proporzionali fra l'assissa ed il raggio e queste due termini di ragione si riducano a proporzione g.d. co' loro mezzi determinati

Perchè non si potrebbe adunque servirsi di questo metodo illimitato de' seni e delle corde, piuttosto che del metodo de' poligoni per ricercare la ragione fra il diametro e la circonferenza?

Se le ragioni di Archimede $\frac{22}{7}$. $\frac{223}{71}$ si riducano a comune denominatore avranno $\frac{1562}{497}$. $\frac{1561}{497}$, cioè posto il diametro = 497, sarà 1562 } maggiore
1561 } minore } della circonf.

La differenza trovo sarà $\frac{1}{497}$
che se poi $\frac{7}{22} \cdot \frac{71}{223}$ si
ridurano esse prime a
comun denominatore, saranno
$\frac{1561}{4900} \cdot \frac{1562}{4900}$. Posto
dunque la circonfa = 4900
sarà $\begin{matrix}1561\\1562\end{matrix}\}$ $\begin{matrix}\text{minore}\\\text{magre}\end{matrix}\}$ del diametro
ma sarà 497 . 1561 :: 1562 . 4900
perchè il prodotto degli
estremi è uguale a quello
de' mezzi.

Data la ragione tripla 1.o
có determinati mezzi
1 . 3 . 4 . 5 . 6, ciascun mezzo
determina la proposta
ragione 7 . 22 . fra due
mezzi delle seguenti
proporzioni, e trovata
natura di quella ragione:
Posto il diametro . 3 : si
trova la circonfa fra
9.o

7 . 22 :: 3 . 9
:: 3 . 10

7×9 . 3×22 . 7×10
63 . 66 . 70
differ. 3 4 cerco 2. tripla
da cui abbiamo 6+3+2=11
e 3+4=7

Posto il diametro = 4, la
circonfa sarà fra 12 . 13

Poichè 7 . 22 :: 4 . 12
:: 4 . 13

7×12 . 4×22 . 7×13
64 . 66 . 91
differ. 4 3

10 . 14 . 15 . 16 . 30
12 13

Quando il diametro era il medio armonico 12; la circonfa. era fra il medio aritmetico, ed il contrarmonico.
Quando poi il diametro era il medio aritmetico 4. stava la circonfa. fra il medio armonico, ed il contrarmo.
Posto il diametro = 5., si trova la circonfa. fra 15. 16
Poichè 7. 22 :: 5. 15
:: 5. 16
7×15. 5×22. 7×16
105. 110 112
differe 5 2 che sono i primi termini della serie delle contrarmonicae
2. 5. 10. 17. 26 &c
Quelle differe. 5. 2. conservano la natura contrarmonica del diametro. 5.
E' 5 = 3+2 = 1+4. Ma quando è composto da 1+4 è di natura contrarmonica essendo la somma di due quadrati.
2. 5
1×1. 2×3
1. 6
le differe. 2. 5 danno le radici seguenti 1×1. 2×3 :: 1. 6
Faremo nell'opera una simile analisi nelle proposizioni di Nerio e di Leulen, e faremo molte altre cose che qui omettiamo del tutto.
Pria di por fine a questa prefazione aggiungeremo alcune proposizioni comunemente note di cui ci serviremo

Problema 1°:

Dati due termini a. b di una proporzione armonica, trovare il terzo x

C'è adunque a. b. x una proporzione armonica. 1° Il termine che si cerca è il terzo sarà per la definizione ov debb

$a \cdot x :: b-a \cdot x-b$ se crescendo

$ax - ab = bx - ax$

$2ax - bx = ab$

$x = \frac{ab}{2a-b}$

Sia $a=2$; $b=3$; sarà

$x = \frac{2\times3}{4-3} = \frac{6}{1} = 6$

e 2. 3. 6 sarà un'armonica proporzione

2° Se la proporzione va scemando, sarà

$a \cdot x :: a-b \cdot b-x$

$ab - ax = ax - bx$

$ab = 2ax - bx$

$x = \frac{ab}{2a-b}$

Sia $a=6$; $b=3$; sarà

$x = \frac{6\times3}{2\times6-3} = \frac{18}{9} = 2$

e 6. 3. 2. sarà un'armonica proporzione

3° Se a. sarà il primo termine, e. b. il terzo, ed x quel di mezzo che si cerca sarebbe a. x. b proporzione armonica. Dunque se la proporzione va crescendo

$a \cdot b :: x-a \cdot b-x$

$ab - ax = bx - ab$

$2ab = ax + bx$

$x = \frac{2ab}{a+b}$

se la proporzione va scemando, sarà $a \cdot b :: a-x \cdot x-b$

$$ax - ab = ab - bx$$
$$ax + bx = 2ab$$
$$x = \frac{2ab}{a+b}$$

se $a=b$; $b=2$, sarà

$$x = \frac{2 \times 6 \times 2}{2+6} = \frac{24}{8} = 3$$

e $6 \cdot 3 \cdot 2$ sarà un'armonica proporzione

se $a=2$; $b=6$, sarà

$$x = \frac{2 \times 2 \times 6}{2+6} = \frac{24}{8} = 3.$$

come prima

Problema secondo

Continuare un'armonica progressione oltre il secondo termine quanto uno vuole.

Siano $\frac{c}{f} \cdot \frac{c}{f+d}$ i due primi termini di un'armonica proporzione

$$a \cdot b \cdot \frac{ab}{2a-b}$$

$$\frac{\frac{c}{f} \cdot \frac{c}{f+d} \cdot \frac{cc}{f \times f+d}}{\frac{2c}{f} - \frac{c}{f+d}}$$

$$= \frac{\frac{cc}{ff+df}}{\frac{2cf+2cd-cf}{ff+df}} = \frac{cc}{cf+2cd}$$

$$= \frac{c}{f+2d}.$$ Ecco l'armonica proporzione $\frac{c}{f} \cdot \frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d}$

Prendo di questa i due ultimi termini $\frac{c}{f+d} - \frac{c}{f+2d}$, e fo $g=f+d$ avvo $\frac{c}{g} \cdot \frac{c}{g+d}$; ma per ciò che ora si è detto $\frac{c}{g} \cdot \frac{c}{g+d} \cdot \frac{c}{g+2d}$ fanno una proporzione armonica

adunque

adunque $\frac{c}{f} \cdot \frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d} \cdot \frac{c}{f+3d}$ fanno un' armonica progressione di questa prendo i due ultimi termini $\frac{c}{f+2d} \cdot \frac{c}{f+3d}$ e fo $h = f+2d$, avrò

$\frac{c}{h} \cdot \frac{c}{h+d}$, &

di cui il terzo termine sarà $\frac{c}{h+2d} = \frac{c}{f+4d}$. adunque avrò la serie armonica $\frac{c}{f} \cdot \frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d} \cdot \frac{c}{f+3d} \cdot \frac{c}{f+4d}$ &c una serie per sempre infinita di frazioni, che abbiano sempre un medesimo antecedente ed abbiano per conseguenti i termini per ordine di un' aritmetica progressione, farà una progressione armonica. Sia $c=1=f=d$

$\frac{c}{f} \cdot \frac{c}{f+d} \cdot \frac{c}{f+2d} \cdot \frac{c}{f+3d} \cdot \frac{c}{f+4d} \cdot \frac{c}{f+5d} \cdot \frac{c}{f+6d}$ &c

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1+1} \cdot \frac{1}{1+2} \cdot \frac{1}{1+3} \cdot \frac{1}{1+4} \cdot \frac{1}{1+5} \cdot \frac{1}{1+6}$ &c

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}$ &c

Della Proporzione Conarmonica

XXIII. Si sa che la proporzione conarmonica è quella, in cui il terzo termine sta al primo, come la differenza fra il primo ed il secondo alla differenza fra il secondo, ed il terzo

Avvertenza

Problema

Dati due termini a · b
di una proporzione con-
tinua armonica, trovare
il terzo x

Sia a · b · x

$x \cdot a :: b - a \cdot x - b$

$xx - bx = ab - aa$

$xx - bx + \frac{bb}{4} = ab - aa + \frac{bb}{4}$

$x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{ab - aa + \frac{bb}{4}}$

$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{ab - aa + \frac{bb}{4}}$

Sia $a = 2 \cdot b = 5$, sarà

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{10 - 4 + \frac{25}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{6 + \frac{25}{4}}$

$= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}$

$= \frac{5}{2} + \frac{7}{2} = \frac{12}{2} = 6$

2 · 5 · 6

Se andasse scemando la

a · b · x

sarebbe $x \cdot a :: a - b \cdot b - x$

$bx - xx = ab - aa$

$xx - bx = ab - aa$

$xx - bx + \frac{bb}{4} = ab - aa + \frac{bb}{4}$

$x - \frac{b}{2} = \pm\sqrt{ab - aa + \frac{bb}{4}}$

Sia $a = 6$; $b = 5$, sarà

$x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{ab - aa + \frac{bb}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{30 - 36 + \frac{25}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-6 + \frac{25}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$

$x = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

6 · 5 · 2

Nel primo caso non ha luogo
il − √ perchè verrebbe il terzo
termine negativo $\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{2}{2} = -1$
Nel 2do caso ha luogo il − √ quando
cioè la proporzione va scemando

Se ricerca

Se si cercasse il medio proporzionale contrarmonico.

$$a \cdot x \cdot b$$

$$b \cdot a :: x-a \cdot b-x$$

$$bb-bx = ax-aa$$

$$bb+aa = ax+bx$$

$$x = \frac{bb+aa}{a+b}$$

Se $a=2$; $b=6$, sarà

$$x = \frac{36+4}{6} = \frac{40}{6} = 5$$

$2 \cdot 5 \cdot 6$

Se la proporzione andasse scemando $a \cdot x \cdot b$

$$b \cdot a :: a-x \cdot x-b$$

$$bx-bb = aa-ax$$

$$bx+ax = aa+bb$$

$$x = \frac{aa+bb}{a+b}$$

come prima

Se $a=6$; $b=2$, sarà

$$x = \frac{4+36}{6} = \frac{40}{6} = 5$$

Si osservi che la contrarmonica proporzione non può continuarsi nè in interi, nè in rotti, come può l'armonica per se.

Corollario universale

XXIV Da cui le cose premesse si deduce che fra $a \cdot b$ il medio

Armonico è $= \frac{2ab}{a+b}$

Il medio Geometrico è $= \sqrt{ab}$

Il medio aritmetico è $= \frac{a+b}{2}$

Il medio contrarmonico è $= \frac{aa+bb}{a+b}$

Adunque

1° $a \cdot \frac{2ab}{a+b} \cdot \sqrt{ab} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot \frac{aa+bb}{a+b} \cdot b$

arm. geom. arim. contrarm.

Che favò $a+b=2v$, e per tanto $\frac{a+b}{2}=v$, avevò.

1°. $a \cdot \frac{2ab}{2v} \cdot \sqrt{ab} \cdot v \cdot \frac{aa+bb}{2v} \cdot b$

e moltiplicando tutti i termini per $2v$

3°. $2av \cdot 2ab \cdot 2v\sqrt{ab} \cdot 2vv \cdot aa+bb \cdot 2bv$

e dividendo per 2, favà

4°. $av \cdot ab \cdot v\sqrt{ab} \cdot vv \cdot \frac{aa+bb}{2} \cdot bv$

Se ometteri il mezzo geometrico favebbe

5°. $av \cdot ab \cdot vv \cdot \frac{aa+bb}{2} \cdot bv$

arm. arith. contrarm.

Ommettendo poi ancora il mezzo contrarmonico, vesbevebbe la proporzione geometrica discreta

6°. $av \cdot ab :: vv \cdot bv$, in cui ab favà il medio armonico, ed vv il mezzo aritmetico.

7°. Per ridurre una qualunque vagione $a \cdot b$. a proporzione geometrica discreta co' mezzi armonico, ed aritmetico: Ritrovisi il medio aritmetico $\frac{a+b}{2}$ (che chiamo v) fra i termini della data vagione sicchè si abbia la forma

$a \cdot v \cdot b$

si moltiplichi poi il primo termine (a) per il secondo e terzo ($v \cdot b$) e si moltiplichi similmente il secondo termine (v) per il secondo e terzo ($v \cdot b$) così

$av \cdot ab \cdot vv \cdot bv$

e si avrà la proporzione geometrica discreta $av \cdot ab \cdot vv \cdot bv$ co' mezzi armonico (ab); ed aritmetico (vv) cui è facile aggiugnere il contrarmonico $\frac{aa+bb}{2}$, ed il geometrico $v\sqrt{ab}$

Libro Secondo

Delle ragioni cō' mezzi loro Determinati, Armonico, Geometrico, Aritmetico, e contr= armonico

Teorema. I.

Date ore grandezze continue proporzionali geometriche: Il quadrato della loro media è medio armonico fra le estreme, moltiplicate per la loro media aritmetica, ossia per la metà della loro somā

Siano le ore continue proporzionali geometriche

$\div\div$ a . ab . abb

sarà $a \times \frac{a+abb}{2} \cdot \frac{aabb \cdot abb \times a+aab}{2}$

cioè $\frac{aa+aabb}{2} \cdot \frac{aabb \cdot aabb+aab4}{2}$

sarà, dico, un' armonica proporzione.

Ciò sarà vero se il primo termine sarà al terzo come la differenza fra il primo, ed il secondo sarà alla differenza fra il secondo, ed il terzo. Si prova che così è

$\frac{aa+aabb}{2} \cdot \frac{aabb+aab4}{2} :: aabb - \frac{aa-aabb}{2} \cdot \frac{aabb+aab4}{2} - aabb$

$:: \frac{aabb-aa}{2} \cdot \frac{aab4-aabb}{2}$

1. bb :: 1. bb

Dunque è vero che dato ciò che si voleva dimostrare

Esempio I° 1 : $\sqrt{1\times3}$. 3

: 1 . $\sqrt{3}$. 3

$\frac{1\times1+3}{2}$. 3 . $\frac{3\times1+3}{2}$

$\frac{4\times2}{2}$: 3 . $\frac{3\times2}{2}$

2 . 3 . 6

Esempio II° 2 . 4 . 8

$\frac{2\times5}{2}$. 16 . $\frac{8\times5}{2}$

10 . 16 . 40

Corollario

Fig. I

Poichè il seno BG per la 8ava del lib. VI di Euclide, è mezzo Geometrico fra i pezzi del diametro AB . BD, sarà il quadrato del seno, cioè $\overline{BG}^2$, media proporzionale armonica fra i pezzi medesimi AB . BD, moltiplicati per il raggio AC, cioè AB × AC . $\overline{BG}^2$. BD × AC ovvero BH . $\overline{BG}^2$. BE saranno in armonica proporzione.

Sia AB = a

BD = b

AC = $\frac{a+b}{2}$ = v

sarà a × v . a × b . b × v

av . ab . bv

una armonica proporzione

Ciò si è provato al numero XXIV del lib. I. e si prova ancora così

av . bv :: ab − av . bv − ab

a . b :: ab − a × $\frac{a+b}{2}$. b × $\frac{a+b}{2}$ − ab

:: ab − $\frac{aa-ab}{2}$. $\frac{ab+bb}{2}$ − ab

:: $\frac{ab-aa}{2}$. $\frac{bb-ab}{2}$

:: a b

Esempio 1°. sia $\overline{AB} = 1$

$\overline{BD} = 2$

$\overline{BG} = \sqrt{1 \times 2}$

sarà $\div 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 2$

$1 \times \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 2 \times \frac{3}{2}$

$\frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{6}{2}$

$3 \cdot 4 \cdot 6$ armonica

Esempio 2°. sia $\overline{AB} = 1$

$\overline{BD} = 3$

$\overline{BG} = \sqrt{3}$

sarà $\div 1 \cdot \sqrt{3} \cdot 3$

$1 \times 2 \cdot 3 \quad 3 \times 2$

$2 \cdot 3 \cdot 6$ armonica

Esempio III sia $\overline{AB} = 3$

$\overline{BD} = 5$

$\overline{BG} = \sqrt{15}$

sarà $\div 3 \cdot \sqrt{15} \cdot 5$

$3 \times 4 \cdot 15 \cdot 5 \times 4$

$12 \cdot 15 \cdot 20$ armonica

Teorema II.

Date tre grandezze continue proporzionali geometriche: Il rettangolo fatto dalla somma delle estreme per la metà di essa somma meno il quadrato della loro media è mezzo proporzionale conbarmonica fra il primo termine, ed il terzo moltiplicati per la loro media aritmetica, cioè per la metà della loro somma

Siano le tre continue proporzionali geometriche

$a \cdot ab \cdot abb$

sarà $a \times a+abb \cdot a+abb \times a-abb - aabb$.
$abb \times a+abb$, cioè

$$\frac{aa+aabb}{aa+aabb} \cdot \frac{aa+2aabb+aab^4-aabb}{aa+aab^4} \cdot \frac{aabb+aab^4}{aabb+aab^4}$$

sarà, dico, questa vera
conbarmonica proporzione:
poichè il terzo termine sta
al primo come la differenza
fra il primo e secondo alla
differenza fra il secondo, ed il
terzo.

$$abb+aab^4 \cdot aa+aabb :: aa+aab^4-aa-aabb \cdot aabb+aab^4-aa-aabb$$
$$bb+b^4 \cdot 1+bb :: aab^4-aabb \cdot aabb-aa$$
$$bb \cdot 1 :: b^4-bb \cdot bb-1$$
$$:: bb \cdot 1$$

dunque è vero che dalle
tre grandezze $\mathcal{E}$. Lo che $\mathcal{E}$

Corollario I.

Si è veduto nella dimostra=
zione che il mezzo conbar=
monico è la metà della somma
dei quadrati degli estremi,
cioè $= \frac{aa+aab^4}{aa+aabb}$.

Corollario II.

Fig. I

Dato il semicerchio bFd col
semiquadrato circoscritto bE.
Il mezzo conbarmonico sarà
$bE - \overline{FJ}^2$, e gli estremi saran=
no bJ, Jd; cioè
$bF \times FJ \cdot Jb \times bH - bF \times FJ \cdot BD \times FJ$
$ar \cdot arr-ab \cdot br$
saranno in conbarmonica propor=
zione.

Poichè

Dorchè

$bv.av :: 2vv-ab-av.bv-2vv+ab$

$b.a :: 2\times\frac{a+b}{2}-ab-a\times\frac{a+b}{2}.b\times\frac{a+b}{2}-2\times\frac{\overline{a+b}^2}{2}+ab$

$:: 2\times\frac{aa+2ab+bb}{4}-ab-\frac{aa-ab}{2}.\frac{ab+bb}{2}-2\times\frac{aa+2ab+bb}{4}+ab$

$:: \frac{aa+2ab+bb}{2}-ab-\frac{aa-ab}{2}.\frac{ab+bb}{2}-\frac{aa-2ab+bb}{2}+ab$

$:: \frac{aa+bb-aa-ab}{2}.\frac{ab+bb-aa-bb}{2}$

$:: bb-ab \;.\; ab-aa$

$:: b \;.\; a$

Corollario III.

$2vv-ab=2\times\overline{\frac{a+b}{2}}^2-ab$

$=2\times\frac{aa+2ab+bb}{4}-ab$

$=\frac{aa+bb}{2}$

cioè il mezzo contrarmonico è uguale alla metà della somma de' due quadrati degli estremi, come si è osservato ancora nel cor. I.

Teorema III

Fig. 153

Date ove grandezze $bF.bF.FB$ in proporzione aritmetica continua $\div a.v.b$; dico che il quadrato del mezzo estremo $\overline{bF}^2=aa$ insieme con la media proporzionale armonica fra $bF.FB$ (la qual media è ab) vale a dire $aa+ab$, sarà il doppio del mezzo proporzionale armonico fra la vecija bF ed il raggio bF moltiplicati per la loro media aritmetica, cioè per la metà della loro somma; cioè

$a\times\frac{a+v}{2}.aa+ab.v\times\frac{a+v}{2}$

$\frac{aa+av}{2}.2av.\frac{av+vv}{2}$

B.r

Vi dee provare che $\frac{2av}{a+v}$ è il doppio del mezzo aritmetico fra $\frac{aa+av}{a}$ ed $\frac{av+vv}{v}$, e per conseguenza av sarà il medio armonico fra questi estremi

$\frac{aa+av}{a} \cdot av \cdot \frac{av+vv}{v}$ armonica

Infatti

$\frac{aa+av}{a} \cdot \frac{av+vv}{v} :: av - \frac{aa+av}{a} \cdot \frac{av+vv}{v} - av$

$a \cdot v :: \frac{av-aa}{a} \cdot \frac{vv-av}{v}$

$:: av-aa \cdot vv-av$

$:: a \cdot v$

Adunque dato ove grandezze lo che &.

Corollario

Tirata la FI perpendicolare ad AB, sicchè $FI = ab$, sarà il quadrato di $AI = aa+ab = \overline{a+b} \times a = av \times a = 2av$. Adunque $\frac{1}{2}AI$ sarà doppio del mezzo proporzionale armonico fra $AF \cdot AB$.

Teorema IV.°

Date ove grandezze aritmeticamente proporzionali $AF \cdot AB \cdot FB$ $a \cdot v \cdot b$

Fig. 13

dico che il quadrato di $AF = aa$ insieme col quadrato di $FL = vv$ sarà il doppio del medio proporzionale contrarmonico fra $AF \cdot AB$, moltiplicato per la loro media aritmetica cioè fra $\frac{aa+av}{a}$, ed $\frac{av+vv}{v}$

Poichè $\frac{aa+av}{a} \cdot \frac{aa\,vv}{av} \cdot \frac{av+vv}{v}$ sono in contrarmonica proporzione

Vedi

per i Covollarj primo, e terzo del Teorema secondo. Adunque $av+vv$ sarà il doppio di questo mezzo contrarmonico. Lo che

Covollario I.

Tirata la FL perpendicolare ad AB, ficchè $\overline{FL}^2 = vv = \overline{a+b}^2$, sarà $\overline{AL}^2 = aa+vv$, e perciò uguale al doppio del medio contrarmonico fra $BF \cdot AF$ moltiplicabe per $\frac{a+v}{2}$

Covollario II.

Abbiam provato nel terzo, e quarto Teorema, e suoi covollarj che il quadrato della corda BF è doppio del suo armonico, ed il quadrato della diagonale AL è doppio del medio contrarmonico fra la recisa BF, ed il raggio, le quali due linee si moltiplichino per la metà della loro somma. Come pure la circonferenza determina il seno FF, il cui quadrato è il mezzo armonico; ed il lato del quadrato circoscritto determinava la FL, in cui quadrato dà il mezzo armonico fra $BF \cdot FB$.

Cor. III

Adunque la circonferenza del cerchio è il luogo de' mezzi armonici, ed il lato del quadrato circoscritto è il luogo de' medj contrarmonici.

Esempj de' Teoremi III.° e IV.°

I.° Sia $\overline{AB} = 14 = a+b = rv$

$\overline{AG} = 5 = a$

$\overline{GB} = 9 = b$

$\overline{AT} = 7 = v$

5 · 9

5 · 7 · 9

5 · 7

5 · 6 · 7

30 · 35 · 36 · 37 · 4a

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,\overline{AG} = rv \times a = rar$

$14 \times 5 = 70$

doppio di 35, mezzo armonico

$\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GC}^2 = aa + vv = rs + 49$

$= 74$, doppio di 37, mezzo contrarmonico

II.° $\overline{AG} = \frac{1}{6}$ 1

$\overline{GB} = \frac{5}{6}$ 5

$\overline{AB} = \frac{6}{6}$ 6

$\overline{AT} = 3$ 1 · 5

1 · 3 · 5

1 · 3

1 · 2 · 3

2 · 3 · 4 · 5 · 6

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,\overline{AG} = rar = 6 \times 1 = 6$,

doppio del mezzo armonico 3

$\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GC}^2 = 1 + 9 = 10$,

doppio del mezzo contrarmonico 5

III.° $\overline{AG} = \frac{1}{4}$ 1

$\overline{GB} = \frac{3}{4}$ 3

$\overline{AB} = \frac{4}{4} = 2$ 4

$\overline{AT} = 1$

1 · 2

2 · 4

2 · 3 · 4

6 · 8 · 9 · 10 · 12

$\overline{AD}^2 = \overline{AB}\,\overline{AG} = 8 \times 2 = 16$, doppio di 8.

$\overline{AC}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{GC}^2 = 4 + 16 = 20$, doppio di 10

Problemal

Problema I.

Data una qualunque Ragione, o sia essa razionale, o sorda, fra due termini esprimenti questa ragione, ritrovare per mezzo del cerchio, i mezzi proporzionali, armonico, Geometrico, Ariteneo, e Contrarmonico

Costruzione.

Fig. I

Sia esposta la data ragione dalle due linee BA. BD. Queste si pongano per diritto, e circa la BD si cagli in mezzo in C, e fatto intervallo in B descrivasi il semicerchio BFD, e si tirino il raggio CF, ed il seno FE perpendicolare a BD. Si tirino poi le tre tangenti al descritto semicerchio ne' punti B, F, D, e siano BH, HK, KD, e si prolunghi il seno FE fino alla tangente in I; finalmente si faccia il quadrato FG del seno FE, e si faccia il parallelogramo CK, tirando per il punto G la parallela EG al diametro BD.

Soluzione

Dico che fra BH, EC, che stanno fra loro :: BA. BD

I°. Il quadrato del seno FE sarà il mezzo armonico.

II°. Il quadrato del raggio (CF = EI)

sarà il mezzo aritmetico.
III.° la differenza fra il rettangolo (BE) del diametro per il raggio, ed il quadrato del seno ($\overline{BG}^2$) cioè $BE^2 - \overline{BG}^2$, che vuol dire la irregolare figura GBHHGd sarà il mezzo contrarmonico.
IV.° e finalmente il rettangolo (CB) del seno per il raggio sarà il mezzo geometrico

Dimostrazione

di questi quattro mezzi

I.° Dimostreremo in primo luogo (oltre la dimostrazione del secondo primo, e suo corollario) che $\overline{BG}^2$, cioè il quadrato del seno, è mezzo proporzionale armonico fra BH · BE che stanno fra loro nella data ragione di AB · BD, cioè dimostreremo che

$$BH \cdot \overline{BG}^2 \cdot BE$$

sono in armonica proporzione.

Per provare ciò, facciasi BK = AB, e divisi KO parallela a BD, sarà $BO = \overline{BG}^2 = ABD$; e per tanto $BN = BO - CO = \overline{BG}^2 - CO = \overline{BG}^2 - BH$ e sarà $KE = BE - BO = BE - \overline{BG}^2$. Adunque

$$BN \cdot KE :: \overline{BG}^2 - BH \cdot BE - \overline{BG}^2$$

ma $BN \cdot KE :: BK \cdot KO$ perchè BN, KE anno la stessa altezza, CB = BI − BK; e, BK · KO :: AB · BD :: BH · BE adunque $BH \cdot BE :: \overline{BG}^2 - BH \cdot BE - \overline{BG}^2$

Adunque

Adunque BH · $\overline{BG}^c$ - BE sono in armonica proporzione, poichè il primo termine sta al terzo come la differenza fra il primo ed il secondo sta alla differenza fra il secondo, ed il terzo.
Il quadrato del seno per tanto è medio proporzionale armonico fra BH · BE, che stanno come AB · BD; lo che è ciò che in primo luogo si dovea dimostrare

II° Passiamo ora a dimostrare il secondo punto, cioè che il quadrato del raggio è mezzo proporzionale aritmetico fra BH · BE, ch' eguagliano la ragione data fra AB · BD.
Fra BH · CH · BE regna la stessa differenza BF; adunque BH · CH · BE sono in aritmetica proporzione, ossia $\overline{CH}$, cioè il quadrato del raggio ($\overline{CF}^c$) è medio aritmetico fra BH · BE :: AB · BD; lo che in secondo luogo dovea dimostrare

$\div$ AB · AC · BD
$\div$ AB × AC · $\overline{AC}^c$ · BD × AC
$\div$ BH · $\overline{AC}^c$ · BE

III° Si proverà in terzo luogo che il mezzo contrarmonico fra BH · $\overline{BE}^c$ sia BE - $\overline{BG}^c$, cioè che BH · BE - $\overline{BG}^c$ · $\overline{BE}^c$ sono in contrarmonica proporzione

e ciò oltre la dimostrazione del Rovena secondo, e suo corollario secondo

Lo sovranno se il secondo sovrinse sia al primo come la differenza fra il primo ed il secondo sia alla differenza fra il secondo ed il terzo. Essendo adunque BC. BH :: BE − $\overline{BG}$ − BH. BE − BE + $\overline{BG}^2$. ma BE − BH = BE ed BC − BE = − BH ; adunque deve essere

BE. BH :: BC − $\overline{BG}$. $\overline{BG}^2$ − BH.

ma così è infatti come si è dimostrato nel primo punto di questo Problema ; adunque BE − $\overline{BG}^2$ è il mezzo contravarmonico fra BH. BE che stanno come $\overline{BD}^2$. BD ; lo che in terzo luogo si dovea dimostrare.

IV. Resta da provarsi in quarto ed ultimo luogo, che il rettangolo del seno per il vaggio è il mezzo Geometrico fra BH. BE che stanno :: $\overline{BD}^2$. BD. Per la 8ª del VI° lib. di Eucl. ÷ $\overline{BD}^2$. BG. BD adunque moltiplicando per il vaggio ÷ AB × CF . BG × CF . BD × CF ovvero ÷ BH . BG × CF . BE ; lo che in quarto luogo si dovea dimostrare

Adunque fra due termini esprimenti una qualunque vaggione o sia razionale, o sorda, si loro trovati

trovasi i mezzi armonico, aritmetico, contrarmonico e Geometrico; lo che si era proposto di fare.

Corollario I.

Essendo per il Problema I. ora provato

$\overline{BH} \cdot \overline{BS} : BS \times CT . \overline{CT} . \overline{AE} - \overline{BS} . BZ$

aven. Geom. armon. contrarm.

$AB \times CT . AB \times BD . \overline{CT} \parallel AB \times BD . \overline{CT} . \overline{CT}$

$- AB \times BD . BD \times CT$; se fosse $AB = a . BD = b . CT = \frac{a+b}{2} = v$, sarà

av. ab. vvab . vv . 2vv − ab . bv

I due estremi adunque a. b si sono moltiplicati per il raggio, lo che era necessario per poter avere il mezzo armonico uguale al quadrato del seno di quel cerchio, pel cui raggio si sono moltiplicati gli estremi.

Lib. I. XXIV. n.° 4.°

Corollario II

Prendendo gli estremi co' soli mezzi armonico, ed aritmetico, si avrebbe av. ab :: vv. bv cioè essendo $= a . v . b$; i due primi de' quattro termini (av. bv) avrebbero il primo, moltiplicato per il secondo, (v) e per il terzo (b); ed i due altri termini (vv. bv) avrebbero il secondo. v. moltiplicato similmente per il secondo, e per il terzo; e per tanto

av . ab :: vv . bv

è una proporzione geometrica discreta, i cui mezzi sono il mezzo armonico . ab . ed il mezzo aritmetico . vv . fra i due estremi della ragion data moltiplicati pe'l raggio, cioè per la media aritmetica fra essi estremi

Corollario III

Chiameremo a . v . b la forma della proporzione av . ab :: vv . bv e la formola ne darà la moltiplica del primo estremo per il secondo, e terzo della forma ; e poi del secondo estremo della forma per il secondo, e terzo della medesima . a . v . b

a x v . a x b . v x v . v x b

av . ab :: vv . bv

Corollario IV.

Se volessi per esempio ridurre la ragione 1 . 3 di numero a numero, a proporzione geometrica discreta, ne troverei il mezzo aritmetico . 2 . per avere la forma 1 . 2 . 3 e poi farei 1 x 2 . 1 x 3 . 2 x 2 . 2 x 3

2 . 3 :: 4 . 6

e della ragione triplа 1 . 3 ovvero 2 . 6 , sarebbe . 3 . il mezzo armonico, e . 4 . il mezzo aritmetico ; e la ragione

di . 3

1·3, ovvero 2·6, sarebbe ridotta alla proporzione geometrica diretta in numeri interi 2·3 :: 4·6

Covallario V

Se volessi ridurre la ragione 1·3· a proporzione geometrica diretta senza cambiarla in 2·6, farei così: dividerei per 2 tutti i termini 2·3 :: 4·6, ed avrei

$$1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot 3$$

$2\frac{3}{2}$ sarebbe il mezzo armonico fra 1·3; ma dovendosi far sparire la frazione si ridurrebbe a·2·3 :: 4·6

Covallario VI·

C'chiaro per la formola che il mezzo aritmetico deve essere sempre un quadrato - vv· del mezzo aritmetico della forma a·v·b; ed è pur chiaro che il mezzo ~~aritmetico~~ degli estremi ab· è sempre il quadrato della forma stessa a·v·b

Covallario. VII·

Se la data numerica ragione fosse fra due numeri, il cui mezzo aritmetico fosse una frazione, essa frazione si farà sparire moltiplicando tutti e due i termini della forma per il divisore del mezzo aritmetico di essa

Per esempio . 1 . r

$1 \cdot \frac{3}{r} \cdot r$

$r \cdot 3 \cdot 4$

$rx3 \cdot rx4 \cdot 3x3 - 3x4$

$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1r$

Vero è per altro che si potrebbe a dirittura adoperare per forma $1 \cdot \frac{3}{r} \cdot r$, facendo

$1x\frac{3}{r} \cdot 1xr \cdot \frac{3}{r}x\frac{3}{r} \cdot \frac{3}{r}xr$

$\frac{3}{r} \cdot r \cdot \frac{9}{4} \cdot 3$

ma egli è altresì vero che volendo ora far sparire le frazioni, moltiplicando tutto per . 4 . si avrebbe come prima $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1r$

Ancor qui il mezzo armonico . 9 . della proporzione geometrica discreta, è il quadrato del medio aritmetico della forma . r . 3 . 4 ; ed il mezzo aritmetico . 8 . è il prodotto degli estremi rx4 di essa

Corollario VIII

Se si avesse una proporzione geometrica discreta $r \cdot 3 :: 4 \cdot 6$ nata dalla forma $1 \cdot r \cdot 3$ per la solita formola ; ricchè 3 . fosse il mezzo armonico, e . 4 . il mezzo aritmetico fra gli estremi ; e si volesse aggiugnervi il mezzo contrarmonico : Basta esprimere co' numeri il valore di esso, che è $rv - ab$

$r x 4 - 1 x 3 = 8 - 3 = 5$

ovvero il valore $\frac{aa+bb}{r}$

per

per i corollarj I, e III del Teorema II. $\frac{aa+bb}{2} = \frac{1+33}{2} = \frac{10}{2} = 5$

Bastarebbe ancora, per trovarlo, moltiplicare il primo termine della forma per il secondo, ed al prodotto aggiugnervi il terzo così $av+b = 1\times 2+3 = 5$

e ciò quando fra i termini della forma vi corre differenza 1.

Ma se fra i termini della forma vi corresse la differenza 2., come in 1. 3. 5, da cui nasce la proporzione geometrica discreta $1\times 3 - 1\times 5 :: 3\times 3 . 3\times 5$

$3 . 5 :: 9 . 15$

Bisognerebbe al prodotto av. aggiugnervi il doppio del terzo termine, così

$av + 2\times b$

$1\times 3 + 2\times 5 = 3+10 = 13$

onde avere 3. 5. 9. 13. 15

Se la differenza fra i termini della forma fosse 3. come in 1. 4. 7 da cui viene $4 - 7 :: 16 . 25$, bisognerebbe al prodotto av. aggiugnere il triplo del terzo termine così $av + 3b = 1\times 4 + 3\times 7 = 25$ per avere

4. 7. 16. 25. 28

E generalmente posta nella forma a. v. b. la differenza d, sicchè sia a. a+d. a+2d, sarà sempre il mezzo contrarmonico

L. 0. 7 - XXIV

$av + bd$, cioè uguale al prodotto de' due primi termini della forma, più il terzo termine della forma stessa, moltiplicato per la differenza della medesima forma. Poichè il mezzo contrarmonico è

$rvv - ab = \frac{aa+bb}{r} = \frac{aa + \overline{a+rd}^2}{r}$

$= \frac{aa + aa + 4ad + 4dd}{r} = aa + rad + rdd$

ma $av + db = a \times \overline{a+d} + dx\overline{a+rd}$

$= aa + ad + ad + rdd =$

$aa + rad + rdd$. adunque

$rvv - ab = av + db$.

Covollario IX

Perchè $a+b = rv$ (lib. I. XX), sarà $\overline{a+b} \times v = rvv$; levato di comune ab, risulta $av + bv - ab = rvv - ab$ = al mezzo contrarmonico (cov. I). Si troverà adunque il mezzo contrarmonico, che nella proporzione geometrica discreta $av . ab :: vv . bv$, dalla somma del primo ed ultimo termine $av + bv$ si trovi il secondo che è il mezzo armonico.

$r . 3 :: 4 . 6$

$r + 6 - 3 = 8 - 3 = 5$

Covollario X.

Perchè i primi due termini della proporzione geometrica discreta, vengono dal prodotto del primo termine per ciascuno de' due ultimi della forma, di cui il terzo termine b.

è uguale

al secondo più la differenza
cioè b = a+d : Le sarà data
una proporzione geometrica di-
creta, per esempio · 10 · 15 · 16 · 20,
e si voglia far nota la forma,
da cui essa proporzione sia
nata ; Basterà rinvenire
il massimo comun divisore
3 · de' due primi termini, e
per esso dividere il primo
10, ed al coziente · 4 · aggiu-
gnere la differenza · 1 · che passa
fra il divisore · 3 · ed il cozien-
te 4 ; e si avrà la forma

3 · 4 · 5

producente quella proporzione

10 · 15 :: 16 · 20

Covollario · XI ·

Si osservi, che avvicinati alla
forma a · b · 4, possiamo tro-
vare tutti i mezzi, moltipli-
cando questi ove termini
della forma per la differen-
za che regna in essa, così

a · b · 4

1×a · 1×b · 1×4

a · b · 4

e poi fra gli estremi

a×b = 6 b×4 = 10

si hanno i mezzi, aggiungendo
al primo · 6 · que' prodotti così

6 · 6+a · 6+b · 6+4 · 10

6 · 6 · 7 · 8 · 10

Dorichè la forma a · v · 6
dà a · a+d · a+2d

aa. ab .. vv. cvv − ab . bv

a×a+d . a×a+rd . a+d r . raa+dr − a×a+rd . a+d×a+rd

aa +ad . aa+rad . aa+rad+dd . raa+rad+rdd . aa+2ad+rdd
− aa − rad

aa +ad . aa+rad . aa+ rad+dd . aa+rad+rdd . aa+2ad+dd

differenze dal primo ad . ad+ dd ad+r dd . ad

rad . a+d×r . a+rd×d

r×1 . 2×1 . 4×1

6 + r×1 . 6+2×1 . 6+4×1

6 . 9 . 10 . 16

Corollario XII.

Le differenze poi da seconde a seconde sono ad; dd, dd, ad dunque se al primo si aggiugne ad; al secondo dd; al terzo ancora dd; al quarto ad; si ha la proporzione

r . 2 . 4

r×2 2×4

6 . 6+r×1 . 6+1×1 . 9+1×1 . 16

6 . 8 . 9 . 10 . 16

Corollario XIII.

Si possono ancor ritrovare tutti i mezzi di una ragione espressa per frazioni

1 . ~~1 1/r~~ 1/r

1 . 1+1/r / r . 1/r

1 . 3/4 . 1/r

1×3/4 . 1×1/r . 3/4×3/4 . 3/4 × 1/r

3/4 . 1/r . 9/16 . 3/8

si levano le frazioni, moltiplicando tutto per 16; si avrà

12-8

12. 6. 9. 6

in cui 6 è mezzo armonico, e 9 aritmetico. Il contrarmonico si trova, come ne' corollarij antecedenti.

Corollario XIV

Nelle proporzioni trovate ne' precedenti modi, cioè nelle ragioni co' loro mezzi determinati, armonico, aritmetico, e contrarmonico, per esempio in 2. 3. 4. 5. 6 si trovano tutte le seguenti cose

2. 3. 4. 5. 6. ragion tripla co' mezzi determinati

2. 3. 6. proporzione armonica

2. 4. 6. proporzione aritmetica

2. 5. 6. proporzione contrarmonica

2. 3 :: 4. 6. proporzione geometrica discreta

2. 3 :: 5. 6 proporz. aritmetica discreta

3. 4. è il centro della Geometrica discreta, il cui prodotto dà il mezzo ~~armonico~~ geometrico fra gli estremi 2. 6

Corollario XV

Quando il mezzo armonico è minore del quadrato che è il mezzo aritmetico, altrettanto è di questo maggiore il mezzo contrarmonico. La differenza è 9. quadrato della differenza della forma. Poichè come si è osservato nel Cor. XII; le differenze

de' termini sono
ad . dd . dd . ad
cioè al mezzo armonico si deve aggiugnere dd, quadrato della differenza della forma per avere il mezzo aritmetico; ed al mezzo aritmetico si deve aggiugnere parimenti dd per avere il mezzo contr-armonico

1 . 6
1 . 4½ . 6
2 . 9 . 16 differenza
per avere i mezzi armonico e contrarmonico fra
2×9 9×16
facciasi il quadrato del mezzo aritmetico della forma $9^2 = 81$, da cui tolgasi 49 si avrà 32, mezzo armonico dello stesso quadrato 81 aggiungasi 49 quadrato della differenza, e si avrà 130, mezzo contrarmonico
16 . 32 . 81 . 130 . 147

Corollario XVI

Quindi s'intende che il mezzo armonico è sempre la differenza di due quadrati; ed il contrarmonico ne è la somma; e che per avere il mezzo contrarmonico in una proporzione geometrica discreta, bisogna aggiugnere sempre al mezzo aritmetico
quadrato

quanto di esso è minore il mezzo armonico, cioè BD, quadruplo della differenza della forma.

Corollario XVII

Del mezzo geometrico qui non si parla, perchè non si ha in un termine solo, ma è indicato da due, cioè dai mezzi armonico, ed aritmetico, fra i quali si trova

Scolio

Si vuole osservare che in tutte le operazioni indicate di sopra per trovare i mezzi armonico, aritmetico, e contrarmonico fra due numeri indicanti una data ragione, per esempio 1 . 2

2 . 4

2 . 3 . 4

2×3 . 1×4 . 3×3 . 3×4

6 . 8 . 9 . 12

Non solo non vi è alterata la ragione, trovando i mezzi fra 6 . 12, ma neppure se ne sono alterati i termini poichè siano le due quantità $\frac{AB \cdot CD}{BD}$ :: 1 . 2 : Che restano le stesse, sebbene io concepisca la AB divisa in sei parti, e la CD in 12.

delle medesime parti 883, ed sono ancora le stesse di prima. Il mezzo armonico 8. contiene 6. di quelle parti, nelle quali si son divise 883, ed; Il mezzo aritmetico ne contiene 9; Il mezzo contrarmonico 10.

Chi non vede che 6. 8. 9. 10. 12 dan le stesse ragioni che $\frac{6}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{6}$ ovvero che $1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$ ma $\frac{4}{3}$ è medio armonico fra $1 \cdot 2$; $\frac{3}{2}$ è medio aritmetico fra $1 \cdot 2$; $\frac{5}{3}$ è medio contrarmonico fra $1 \cdot 2$. ora riducendo a comun denominatore

$$1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$$

si ha $\frac{16}{16} \cdot \frac{24}{16} \cdot \frac{27}{16} \cdot \frac{30}{16} \cdot \frac{36}{16}$

che stanno come 16. 24. 27. 30. 36 cioè come 6. 8. 9. 10. 12

Solo è da osservarsi, che in questa ultima operazione si sottintende che tutti i numeri 6. 8. 9. 10. 12 sono altrettante sesse parti della unità

Il numero di parti, in cui vien divisa la unità, è indicato dalle operazioni cioè avevamo $1 \cdot 2$; e lo abbiam ridotto a $2 \cdot 4$; adunque abbiam diviso la unità in 2 parti; ma poscia $2 \cdot 3 \cdot 4$ abbiam moltiplicato 2×3; adunque ciascuna unità è restata divisa in 12 parti

delle

delle quali i mezzi ~~arm~~
armonico, arionetrico, contrarmonico
6 . 9 . 10
ne contengono 8.9.10
Similmente 2.3
4 6
4.5.6
4×5 . 4×6 . 5×5 . 5×6
20 . 24 . 25 . 26 . 30
quando il due è ridotto
al 4, e poi al 10 si vede
che le due unità non diven-
gano $\frac{20}{10}$, delle quali decine
i mezzi arm. arion. contrarm
ne contengono 24 . 25 . 26
Cioè quando nelle operazioni
si moltiplica l'uno, in al-
trettante parti bisogna
concepirlo diviso, e così
non ne resta punto alte-
rata la quantità, e si
hanno i mezzi non solo
della data ragione, ma
ancora fra i dati termini
perchè si viene a ot-
tenere con la divisione,
quella mutazione che
~~era introdotta nei termini~~
con la moltiplicazione
si era introdotta nei ter-
mini della ragione

Per ridurre la cosa a formola
generale, siano i dati
termini a . a+d ; si ponga
il mezzo arionetrico a+b così

5r

$a \cdot a+d \cdot a+rd$

e si facciano le solite operazioni ; si avrà

$aa+ad \cdot aa+rad \cdot aa+rad+rdd \cdot aa+rad+rdd$

Ma se poi si volessero trovare i mezzi precisamente fra i due termini dati: bisognerebbe distinguere due casi, cioè I°. quando fra i termini dati la differenza è un numero caso, come fra $1 \cdot r$; $1 \cdot 4$; $r \cdot 5$; $3 \cdot 8$ &c e quando vi passa differenza pari, come fra $1 \cdot 3$; $r \cdot 4$; $3 \cdot 5$ &c Nel primo caso bisognadividere i termini della or descritta formola per $4A+4D$

$1 \cdot r$. $b=1, d=\frac{1}{r}$

$1 \cdot 1\frac{1}{r} \cdot r$ $a=r, d=1$

$r \cdot 3 \cdot 4$

In questo passaggio si vaddoppia il primo, ed il secondo termine dato $1 \cdot r$; per lo che il loro prodotto è quadruplo di quello sarebbe senza questa mutazione cioè $a \times a+d = aa+ad$

$= rA \times rA+rd$

$= 4AA + 4Ad$

Per lo che bisogna dividere il prodotto del primo per il secondo, cioè $aa+ad$ per il quadruplo del secondo e verrà $\frac{aa+ad}{4A+4d} = \frac{4A+4d}{4A+4d}$

$= A$, cioè verrà il primo termine

termine, e si avrà questa formola generale

$$\frac{aa+ad}{4f+4d}\cdot\frac{aa+rad}{4f+4d}\cdot\frac{aa+rad+dd}{4f+4d}\cdot\frac{aa+rad+rdd}{4f+4d}\cdot\frac{aa+rad+rrd}{4f+4d}$$

$$f \cdot f+rd$$
$$1 \cdot r$$
$$f \cdot f+d \cdot f+rd$$
$$1 \cdot 1\tfrac{1}{r} \cdot r$$
$$r \cdot 3 \cdot 4$$
$$a \cdot a+d \cdot a+rd$$

$$\frac{4+r}{4\times 1+4\times\frac{1}{r}}\cdot\frac{4+r\times r\times 1}{4+r}\cdot\frac{4+4+1}{4+r}\cdot\frac{4+4+r}{4+r}\cdot\frac{4+3\times r\times 1+rr}{4+r}$$

$$\frac{6}{6}\cdot\frac{8}{6}\cdot\frac{9}{6}\cdot\frac{10}{6}\cdot\frac{12}{6}$$

$$6 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$$

Ma nel caso, in cui le differenze de' dati termini della ragione sono pari, bisogna dividere i termini della formola per $a+d$ così

$$\frac{aa+ad}{a+d}\cdot\frac{aa+rad}{a+d}\cdot\frac{aa+rad+dd}{a+d}\cdot\frac{aa+rad+rdd}{a+d}\cdot\frac{aa+rad+rrd}{a+d}$$

$$1 \cdot 3$$
$$1 \cdot r \cdot 3$$
$$\frac{r}{a+d}\ \frac{3}{1+r}\ \frac{4}{r}\ \frac{5}{r}\ \frac{6}{r}$$
$$1 \cdot \frac{3}{r} \cdot r \cdot \frac{5}{r} \cdot 3$$

Similmente

$$1 \cdot 5$$
$$1 \cdot 3 \cdot 5$$
$$\frac{3}{a+d}\cdot\frac{5}{1+r}\ \frac{9}{3}\cdot\frac{13}{3}\cdot\frac{15}{3}$$
$$1 \cdot \frac{5}{3} \cdot 3 \cdot \frac{13}{3} \cdot 5$$

La ragione di questa divisione per $a+d$ in questo caso è

perchè si moltiplica a diritta
ova il primo a per il
secondo a+d; onde per avere
il primo a, bisogna dividere
quel prodotto aa+ad (e così
gli altri) per a+d

In tutti i due i casi il numera-
tore del mezzo aritmetico della
proporzione non ridotta, è sempre
un quadrato; Il numeratore
del mezzo armonico è sempre
minore, ed il numeratore del
mezzo contrarmonico, è sempre
maggiore del numera-
tore del mezzo aritmetico
quanto vale il quadrato
della differenza della forma
Ficchè il numeratore del
mezzo armonico è sempre
la differenza di due quadrati.
ed il numeratore del medio
contrarmonico è la somma
de' stessi quadrati

In quelle proporzioni, in cui
la differenza degli esponenti
della forma è un numero
pari: Il mezzo aritmetico
della proporzione ridotta
è un numero intiero; ed è
quello stesso della forma

$$\frac{ar}{r}\cdot\frac{ab}{r}\cdot\frac{rr}{r}\cdot\frac{2rr-ab}{r}\cdot\frac{br}{r}$$
$$a\cdot\frac{ab}{r}\cdot r\cdot\frac{2rr-ab}{r}\cdot b$$

$1\cdot 3$
$1\cdot 2\cdot 3$
$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$
$\frac{2}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{2}$
$1\cdot\frac{3}{2}\cdot 2\cdot\frac{5}{2}\cdot 3$

$2\cdot 4$
$2\cdot 3\cdot 4$
$\frac{6}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{3}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{12}{3}$
$2\cdot\frac{4}{3}\cdot 3\cdot\frac{10}{3}\cdot 4$

In valle

In quelle proporzioni poi, in cui la differenza fra il primo, e terzo termine della forma è un numero caffo; il mezzo aritmetico della proporzione ridotta è una frazione con il divisore = al quadruplo del mezzo aritmetico della forma, cioè = 4R

non

$$\frac{ar}{4R} \cdot \frac{ab}{4R} \cdot \frac{vr}{4R} \cdot \frac{rvv-ab}{4R} \cdot \frac{bv}{4R}$$

$$1 \cdot r$$

$$1 \cdot 1\tfrac{1}{2} \cdot r$$

$$A \cdot R$$

$$r \cdot 3 \cdot 4$$

$$\frac{6}{6} \cdot \frac{6}{6} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{6}$$

$$1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$$

ed il mezzo aritmetico della proporzione ridotta è quello stesso, cioè quella stessa frazione, che sarebbe il mezzo aritmetico della forma prima di farne sparire la frazione.

$$r \cdot 3$$

$$r \cdot r\tfrac{1}{2} \cdot 3$$

$$r \cdot \frac{5}{2} \cdot 3$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\frac{120}{10} \cdot \frac{24}{10} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{26}{10} \cdot \frac{30}{10}$$

$$12 \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{5} \cdot 3$$

Similmente $\cdot 1 \cdot 4$

$$1 \cdot r\tfrac{1}{2} \cdot 4$$

$$1 \cdot \frac{5}{2} \cdot 4$$

$$r \cdot 5 \cdot 6$$

$$\frac{10}{10} \cdot \frac{10}{10} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{34}{10} \cdot \frac{40}{10}$$

$$1 \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{17}{5} \cdot 4$$

Nelle proporzioni col divisore che bene conviene, i quadrati dei mezzi armonici, e armonici hanno sempre per differenza del numeratore del radice assimetrica il quadrato della differenza che regna nella forma data, come si vede nei precedenti esempj.

Problema II°

Fig. 17

Data una linea retta AB, tagliata in qualunque luogo in G, e tirata una perpendicolare GI (che chiamo y): si cerca il luogo di tutte le y tali, che y^a sia il mezzo proporzionale armonico fra AG · GB, moltiplicate per $\frac{AB}{2}$

Si vuole che, posto AG = x
AB = na
AC = a
GI = y
BG = na − x

sia ax · yy · naa − ax sia una proporzione armonica.
Sarà adunque
ax · naa − ax :: yy − ax · nax − ax − yy
x · na − x :: $\frac{y^4}{a}$ − x · na − x − $\frac{y^4}{a}$
$nax - xx - \frac{xy^n}{a} = nyy - \frac{xy^n}{a} - nax + xx$
$nax - xx = nyy - nax + xx$
$4ax - nxx = nyy$
$nax - xx = yy$
equazione del cerchio

Costruzione

Sul diametro AB = ra, si faccia un cerchio; si tagli il diametro in qualunque luogo G, sarà

$$GG = AGB$$
$$yy = rax - xx$$

Problema III.

Data una linea retta AB, tagliata in qualunque luogo G, e tirata la perpendicolare GC (che chiamo y) si cerca il luogo di tutte le y, tali che y^2 sia medio proporzionale aritmetico fra AG · GB moltiplicate per $\frac{AB}{2}$

Fig. 163

Posto AG = x ; GB = ra − x
AB = ra ; AE = a
GK = y

si vuole che ax · yy · raa − ax siano in Aritmetica proporzione

adunque raa + ax − ax = ryy

$$raa = ryy$$
$$aa = yy$$
$$a = y$$

adunque il luogo sarà una linea retta

Costruzione

Tirata Gd = y = a, e tirata per d una parallela ad AB, questa parallela, che è il lato del quadrato circoscritto al cerchio, sarà il luogo di tutte le y, cioè dire aritmeticamente ciò che si voleva fare.

Problema IV

Fig. 13

Data una linea retta AB, segliata in qualunque luogo in G, e tirata la perpendicolare GI = y, e la Ipotenusa AI: si cerca il luogo geometrico di tutti i punti I tali, che $\overline{AI}^2$ sia medio proporzionale armonico fra AG · $\frac{AB}{2}$ moltiplicate per la loro somma

Posto AG = x

AB = 2a, AF = a

si vuole $x \times \overline{a+x} \cdot \overline{AI}^2 \cdot ax+ax$

$ax+xx \cdot \overline{GI}^2 \cdot aa+ax$

siano in armonica proporzione

ma $ax+xx \cdot 2ax \cdot aa+ax$

sono in armonica proporzione, perche il primo termine sta al terzo come la differenza fra il primo, ed il secondo sta alla differenza fra il secondo al terzo

$ax+xx \cdot aa+ax :: 2ax-ax-xx \cdot aa+ax-2ax$

$:: ax-xx \cdot aa-ax$

$:: x \cdot a$

adunque $\overline{AI}^2 = 2ax$

ma $\overline{AI}^2 = xx+yy$

adunque $2ax = xx+yy$

$2ax-xx = yy$

equazione del cerchio.

Costruzione

Col diametro AB = 2a si descriva il cerchio AIB, esso sarà il luogo di tutti i punti

punti I, tali che $\overline{bg}^2$ sia il medio proporzionale armonico fra bs, ed $\frac{bB^2}{a}$ moltiplicate per la lor somma. Poiche $\overline{bg}^2 = bB \times bs$

$$xx + yy = ax$$
$$ax - xx = yy$$

lo che si volea fare.

Problema V

Fig. 103

Data la retta bB, e tagliata in un qualunque luogo in g da cui sia alzata la perpendicolare $gc = y$, e la Ipotenusa bc: si cerca il luogo di tutti i punti c tali che $\overline{bc}^2$ sia medio contr'armonico fra $bg \cdot \frac{bB}{a}$ moltiplicate per la lor somma

Posto $bg = x$

$bB = a$; $bf = a$

si vuole che $x \times a + x \cdot \overline{bc}^2 \cdot ax + xx$

$ax + xx \cdot \overline{bc}^2 \cdot aa + ax$

siano in contr'armonica proporzione

ma $ax + xx \cdot aa + xx \cdot aa + ax$ sono in contr'armonica proporzione, perchè il terzo termine sta al primo come la differenza fra il primo ed il secondo sta alla differenza fra il secondo ed il terzo

$aa+ax \cdot ax+xx :: aa+ax-ax-xx \cdot aa+ax-aa-xx$

$aa-xx \cdot ax-xx$

$a \cdot x :: a \cdot x$

Adunque $\overline{bd}^2 = aa+xx$

ma $\overline{bd}^2 = yy+xx$

adunque $aa+xx = yy+xx$

$aa = yy$

$a = y$

Costruzione

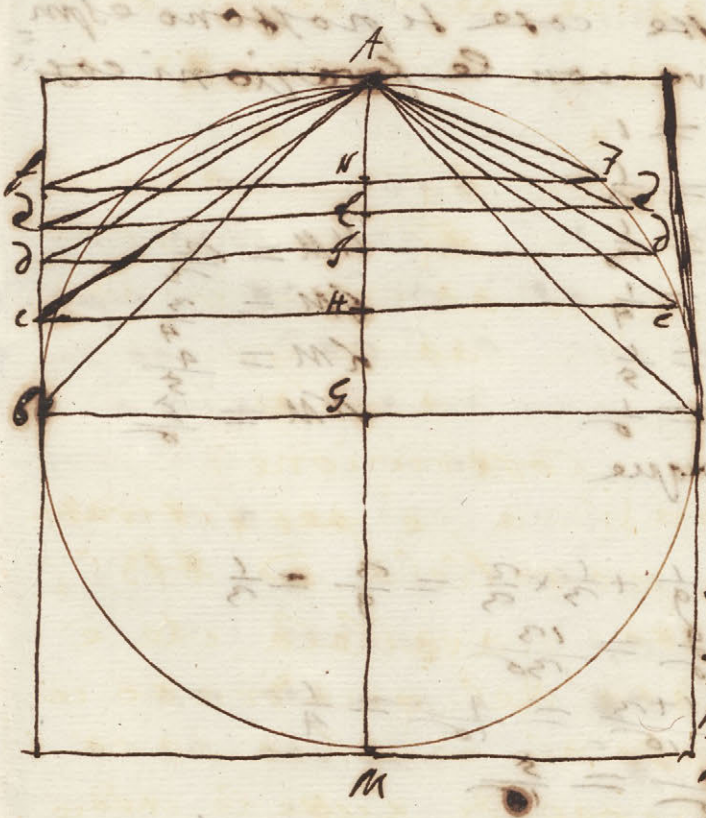
Fatta $bd = a$, e per d tirata una parallela ad bB; questa parallela, che è il lato del quadrato circoscritto al cerchio sarà il luogo di tutte le medie contrarmoniche ricercate lo che si volea trovare

Corollario I

De' merri armonici è sempre il luogo il cerchio, fatto col diametro bB; e de' merri aritmetici e contrarmonici il luogo è sempre la retta che serve di lato del quadrato circoscritto al medesimo cerchio. Ecco un nuovo riscontro del cerchio sempre armonico, e della retta non mai armonica, ma o aritmetica, o contrarmonica

Corollario II

Corollario II



Sia $AM = 100$

$bG = 60$ $\quad HM = 80$

$bH = 40$ $\quad IM = 90$

$bI = 30$ $\quad LM = 96$

$bd = 24$ $\quad NM = 100$

$bN = 20$

Dovà

$\overline{AB}^2 = \overline{bb}^2 = \overline{bG}^2 + \overline{bG}^2 = 3600 + 3600 = 7200$

$\overline{Ac}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{Hc}^2 = \overline{40}^2 + AHM = 1600 + 40 \times 80 = 4800$

$\overline{Ae}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{He}^2 = \overline{40}^2 + \overline{60}^2 = 1600 + 3600 = 5200$

$\overline{bd}^2 = \overline{bI}^2 + \overline{ID}^2 = \overline{30}^2 + bIM = 900 + 30 \times 90 = 3600$

$\overline{bd}^2 = \overline{bI}^2 + \overline{I2}^2 = \overline{30}^2 + \overline{60}^2 = 900 + 3600 = 4500$

$\overline{bc}^2 = \overline{bL}^2 + \overline{Lc}^2 = \overline{24}^2 + bLM = 576 + 24 \times 96 = 2880$

$\overline{Ae}^2 = \overline{bd}^2 + \overline{de}^2 = 576 + 3600 = 4176$

$\overline{bF}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NF}^2 = \overline{20}^2 + ANM = 400 + 20 \times 100 = 2400$

$\overline{Af}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{Nf}^2 = 400 + 3600 = 4000$

Dunque

$\overline{AB}^2 . \overline{bb}^2 :: 7200 . 7200$

$\overline{bC}^2 . \overline{bc}^2 :: 4800 . 5200 :: 12 . 13 :: 24 . 26$

$\overline{AD}^2 . \overline{bd}^2 :: 3600 . 4500 :: 4 . 5 :: 8 . 10$

$\overline{Ac}^2 . \overline{Ae}^2 :: 2880 . 4176 :: 20 . 29 :: 40 . 58$

$\overline{AF}^2 . \overline{bf}^2 :: 2400 . 4000 :: 3 . 5$

$20 . 24 . 25 . 26 . 30$

$6 . 8 . 9 . 10 . 12$

$24 . 40 . 49 . 58 . 70$

$2 . 3 . 4 . 5 . 6$

Gli estremi di queste quattro proporzioni sono $2 . 3$; $2 . 4$; $2 . 5$; $2 . 6$

Dunque relativamente ai quadrati delle corde che appartengono al circolo, ed ai quadrati delle Ipotenuse che appartengono al quadrato circoscritto: Si trova il quadrato circoscritto di Natura contrarmonica, ed il circolo inscritto di Natura armonica.

Le stesse cose si possono esprimere con le frazioni così

$AM = 1$
$AS = \frac{1}{2}$
$AH = \frac{1}{3}$ $\quad HM = \frac{2}{3}$
$AJ = \frac{1}{4}$ $\quad JM = \frac{3}{4}$
$Ad = \frac{1}{5}$ $\quad dM = \frac{4}{5}$
$AN = \frac{1}{6}$ $\quad NM = \frac{5}{6}$

Adunque

$\overline{AB}^2 = \overline{Ab}^2 = \overline{AS}^2 + \overline{SB}^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
$\overline{AC}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{HC}^2 = \frac{1}{9} + AH \times HM = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
$\overline{Ac}^2 = \overline{AH}^2 + \overline{Hc}^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{4+9}{36} = \frac{13}{36}$
$\overline{Ad}^2 = \overline{bJ}^2 + \overline{Jd}^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1+3}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$
$\overline{Ad}^2 = \overline{Jg}^2 + \overline{Jd}^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1+4}{16} = \frac{5}{16}$
$\overline{Ae}^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{de}^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{25} + \frac{4}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
$\overline{Ae}^2 = \overline{Ad}^2 + \overline{de}^2 = \frac{1}{25} + \frac{1}{4} = \frac{4+25}{100} = \frac{29}{100}$
$\overline{AF}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{NF}^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
$\overline{Af}^2 = \overline{AN}^2 + \overline{Nf}^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{4} = \frac{1+9}{36} = \frac{10}{36}$

Adunque

$\overline{AB}^2 : \overline{Ab}^2 :: \frac{1}{2} : \frac{1}{2} :: 1 : 1$
$\overline{AC}^2 : \overline{Ac}^2 :: \frac{1}{3} : \frac{13}{36} :: 1 : \frac{13}{12} :: 12 : 13 :: 24 : 26$ | 12 · 24 · 25 · 26 · 27
$\overline{Ad}^2 : \overline{Ad}^2 :: \frac{1}{4} : \frac{5}{16} :: 1 : \frac{5}{4} :: 4 : 5 :: 8 : 10$ | 6 · 8 · 9 · 10 · 12
$\overline{Ae}^2 : \overline{Ae}^2 :: \frac{1}{5} : \frac{29}{100} :: 1 : \frac{29}{20} :: 20 : 29 :: 40 : 58$ | 28 · 40 · 49 · 58 · 70
$\overline{Af}^2 : \overline{Af}^2 :: \frac{1}{6} : \frac{10}{36} :: 1 : \frac{10}{6} :: 6 : 10 :: 3 : 5$ | 2 · 3 · 4 · 5 · 6

Tutto come prima

Scolio

Che se alcuno dicesse, che il seno è medio geometrico fra i versi del diametro: si avverta che nasce il seno dalla ragione 1 · 3, il prodotto de' quali

1×3 = 3, quadrato del seno è medio armonico di detta ragione ridotta a proporzione geometrica diseveta; Per avere poi il seno in linea, bisogna estrarre la radice di 3, e questa $\sqrt{3}$ è = alla linea HC, cioè al seno.

Prima di tutto adunque si ha la ragione; 2°. poi si hanno i termini che la esprimono; 3°. si ha il prodotto di questi termini, cioè il quadrato del seno, medio armonico della ragione; 4°. si ha la radice di quel prodotto, cioè il seno, medio geometrico fra i pezzi del diametro. Il cerchio adunque è prima armonico, che geometrico

Corollario III.

Le ragioni si riducono a proporz.ni

1 · 2	6 · 8 :: 9 · 12
1 · 3	8 · 15 :: 4 · 6
1 · 4	10 · 16 :: 25 · 40
1 · 5	3 · 5 :: 9 · 15

Se il quadrato del raggio sia 30×30 = 900, le ridette proporzioni saranno

600 · 800 :: 900 · 1200
450 · 675 :: 900 · 1350
360 · 576 :: 900 · 1440
300 · 500 :: 900 · 1500

Fig. 10

$\overline{OC}^2 . \overline{OH}^2 :: 900 . 1600 :: 1 . r$

$\overline{OD}^2 . \overline{OH}^2 :: 600 . 1600 :: 1 . 3$

$\overline{OE}^2 . \overline{OA}^2 :: 450 . 1600 :: 1 . 4$

$\overline{OF}^2 . \overline{OH}^2 :: 336 . 1600 :: 1 . 5$

$\overline{OG}^2 . \overline{OH}^2 :: 300 . 1600 :: 1 . 6$

Sarà adunque il quadrato $\overline{OB}^2$ del raggio = 900, sarà dico la misura delle vagioni ed $\overline{OC}^2 = 1600$; cioè

$\overline{OB}^2 . \overline{OC}^2 :: 900 . 1600 :: 1 . r$

ma $\div \overline{OB}^2 . \overline{OC}^2 : \overline{OH}^2$; sarà adunque $\overline{OC}^2 . \overline{OH}^2 :: 900 . 1600$.

Paragonando adunque ad $\overline{OH}^2$ gli estremi delle sopra poste vagioni, si avrà la seguente serie

	divisa il diametro
$\overline{OC}^2 . \overline{OA}^2 :: 900 . 1600 :: 1 . r$	
$\overline{OD}^2 . \overline{OH}^2 :: 1200 . 1600 :: r . 3$	1 . r
$\overline{OE}^2 . \overline{OH}^2 :: 1350 . 1600 :: 3 . 4$	1 . 3
$\overline{OF}^2 . \overline{OH}^2 :: 1440 . 1600 :: 4 . 5$	1 . 4
$\overline{OG}^2 . \overline{OH}^2 :: 1500 . 1600 :: 5 . 6$	1 . 5

Adunque la risultata serie è uguale alla serie delle vagioni delle differenze armoniche; le quali vagioni sono formate dalla somma rispettiva per rapporto all'estremo, che è il diametro

Poiche serie armonica

60 . 30 . 20 . 15 . 12 . 10

differ 30 . 10 . 5 . 3 . 2

somme 40 . 45 . 46 . 50

Ecco le vagioni stesse della serie qui sopra esposta

40 . 60 :: r . 3

45 . 60 :: 3 . 4

46 . 60 :: 4 . 5

50 . 60 :: 5 . 6

Coroll. IV

Corollario IV.

Facciasi $\overline{0A} \cdot \overline{0B} \cdot \overline{0H} \cdot \overline{0J} \cdot \overline{0K} \cdot \overline{0M}$
:: $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$
saranno :: $\overline{0A}^2 \cdot \overline{0C}^2 \cdot \overline{0D}^2 \cdot \overline{0E}^2 \cdot \overline{0F}^2 \cdot \overline{0G}^2$
perchè i quadrati delle corde stanno come i seni versi. Adunque
$\overline{0A} \cdot \overline{0C} \cdot \overline{0D} \cdot \overline{0E} \cdot \overline{0F} \cdot \overline{0G}$
saranno :: $1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}}$
in reduplicata inversa de' numeri naturali
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6
i cui quadrati sono
1 . 4 . 9 . 16 . 25 . 36
E saranno
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$
cioè come i seni versi
15 . 30 . 40 . 45 . 48 . 50

Poichè	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$
per 4	1	$\frac{4}{2}$	$\frac{6}{3}$	3	$\frac{16}{5}$	$\frac{20}{3}$
per 3	3	6	8	9	$\frac{48}{5}$	20
per 5	15	30	40	45	48	50

Adunque
$\overline{AC}^2 \cdot \overline{FD}^2 \cdot \overline{AE}^2 \cdot \overline{BF}^2 \cdot \overline{AJ}^2$
$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$
30 . 40 . 45 . 48 . 50
I quadrati cioè delle corde de' supplementi ad un seni cerchio stanno come le somme de' versi della serie armonica 60 . 30 . 20 . 15 . 12 . 10
i supplementi stanno :: $\overline{0A}^2 \cdot \overline{0C}^2 \cdot \overline{0D}^2 \cdot \overline{0E}^2 \cdot \overline{0F}^2 \cdot \overline{0G}^2$
cioè come i quadrati delle corde degli archi

delle proporzioni Geometriche discrete.

	esponenti	
2 · 3 :: 4 · 6	1 · 3	:: 1 · 3
6 · 8 :: 9 · 12	1 · 2	:: 3 · 6
12 · 15 :: 16 · 20	3 · 5	:: 6 · 10
20 · 24 :: 25 · 30	2 · 3	:: 10 · 15
30 · 35 :: 36 · 42	5 · 7	:: 15 · 21
42 · 48 :: 49 · 56	3 · 4	:: 21 · 28

I nervi o centri sono

di 1 · 3 · 3 · 4

3 · 6 8 · 9

6 · 10 15 · 16

10 · 15 24 · 25

15 · 21 35 · 36

30 · 40 · 45 · 48 · 30

cioè i centri sono come le somme de' vetri della serie armonica; e gli esponenti

1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21 · 28 · in

inversa di 30 · 10 · 5 · 3 · 2, cioè in inversa

de' vetri della serie armonica

cioè 3 · 4 :: 30 · 40	1 · 3 :: 10 · 30
8 · 9 :: 40 · 45	3 · 6 :: 5 · 10
15 · 16 :: 45 · 48	6 · 10 :: 3 · 5
24 · 25 :: 48 · 50	10 · 15 :: 2 · 3

Corollario V

Fig. 15

Fatto centro in O, e spazio del diametro OA, con gl' intervalli OC, OD, OE, OF, OG che stiano :: $V\frac{1}{2} \cdot V\frac{1}{3} \cdot V\frac{1}{4} \cdot V\frac{1}{5} \cdot V\frac{1}{6}$ e descritti gli archi CM, DN, EP, FQ, GR: le linee OA · OM · ON · OP · OQ · OR saranno :: $1 \cdot V\frac{1}{2} \cdot V\frac{1}{3} \cdot V\frac{1}{4} \cdot V\frac{1}{5} \cdot V\frac{1}{6}$.

Ora col raggio OA si descriva

il cerchio

il cerchio VAB; di cui parleremo poi.

Le aree de triangoli

BOB · MOB · NOB · QOB · ROB trovansi

:: 1 · $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{3}$ · $\frac{1}{4}$ · $\frac{1}{5}$

giacchè tutti questi triangoli avendo la base comune OB stanno come le altezze l.a. dell'ut; I quadrati poi delle Ipotenuse di que' triangoli, cioè $\overline{BB}$ · $\overline{MB}$ · $\overline{NB}$ · $\overline{PB}$ · $\overline{QB}$ · $\overline{RB}$ saranno:: 100 · 90 · 60 · 75 · 72 · 70, inverse di 30 · 40 · 45 · 48 · 50, che sono prive le somme delle differenze della serie armonica. Queste ragioni sono inverse in quel modo, in cui dell'armonica progressione è inversa la progressione aritmetica

Teorema V

Se nel semicerchio BAU, il cui raggio è OA, si prolunghino le Ipotenuse de' triangoli, cioè le BM · BN · BP · BQ · BR fino al cerchio, ricchè si abbiano le BAd · BNe · BPf · BQg e per i punti d, e, f, g, si tirino i seni ds, es, fx, gR dico che sarà UB · Uo · Us · Ut · Ux · Uz come 1 · $\frac{1}{2}$ · $\frac{1}{3}$ · $\frac{1}{4}$ · $\frac{1}{5}$ · $\frac{1}{6}$

Dimostrazione

Poichè posta questa serie armonica del diametro BU, sarà $\overline{Bd}^2 = \overline{BS}^2 + \overline{Sd}^2 = \frac{2}{3}^2 + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

ma la BMd tirata per M, fino che incontra la Sd, tirata da S, cioè BS = $\frac{2}{3}$BV, essa pure dà $\overline{Bd}^2 = \frac{2}{3}$; poichè

$\overline{BO}^2 \cdot \overline{BM}^2 :: \overline{BS}^2 \cdot \overline{Bd}^2$

60 · 90 :: $\overline{\frac{2}{3}}^2 \cdot \overline{Bd}^2$

6 · 9

2 · 3 :: $\frac{4}{9} \cdot \overline{Bd}^2 = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

dunque BMd incontra il cerchio, e la Sd nel medesimo punto, in cui il cerchio è incontrato dalla Sd, cioè tirato dal punto S, in cui BS = $\frac{2}{3}$BV

Nello stesso modo si dimostra lo stesso delle altre linee BE · BF · BG ; poichè posta la sezione armonica del diametro BV, sarebbe

$\overline{BE}^2 = \overline{BF}^2 + \overline{FE}^2 = \overline{\frac{3}{4}}^2 + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{9}{10} + \frac{3}{16} = \frac{12}{16}$

$= \frac{3}{4}$

ma BNe, tirata per N, fino che incontri il seno Je, dà ancor essa $\overline{BE}^2 = \frac{3}{4}$; perchè

$\overline{BO}^2 \cdot \overline{BN}^2 :: \overline{BF}^2 \cdot \overline{BE}^2$

60 · 60 :: $\overline{\frac{3}{4}}^2 \cdot \overline{BE}^2$

3 · 4 :: $\frac{9}{10} \cdot \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$

dunque BNd incontra il seno Je nel medesimo punto, in cui questo seno incontra il cerchio

Corollario I.

Le BA · Bd · Be · BF · BG daranno

$\overline{BA}^2 \cdot \overline{Bd}^2 \cdot \overline{Be}^2 \cdot \overline{BF}^2 \cdot \overline{BG}^2$ ::

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6}$

3 · 4

6 · 9/15 · 16

24 · 25

Ma 60 . 120 . 160 . 180 . 192 . 200

2 . 2

3 . 4

6 . 9

15 . 16

24 . 25

Ma . 3 . 6 sono gli estremi della
duplà, et 6 . 9 ne sono i mezzi
e 3 . 6 . 8 . 9 hanno per differenze

3 . 2 . 1

che sono i numeri decrescenti

Covollario 11°

Quadrati delle Ipotenuse

$\overline{AB}^2 = 120$

$\overline{MB}^2 = 90$

$\overline{NB}^2 = 60$

$\overline{PB}^2 = 75$

$\overline{QB}^2 = 72$

Media Quadratabile delle corde

$\overline{AB}^2 = 120$

$\overline{DB}^2 = 160$

$\overline{CB}^2 = 180$

$\overline{FB}^2 = 192$

$\overline{SB}^2 = 200$

Quindi si deduce la seguente Serie

			estremi in radice
120 .	120 . 120		AB . AB :: 1 . 1
90 .	120 . 160		MB . DB :: 3 . 4
60 .	120 . 180		NB . CB :: 2 . 3
75 .	120 . 192		PB . FB :: 5 . 8
72 .	120 . 200		QB . SB :: 3 . 5

Scolio . 1.

La inscrizione delle rettilinee regolari figure nel cerchio porta necessariamente alla divisione armonica della circonferenza in . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$

Fig. 16

Sia la circonferenza ADB; si tiri il diametro AB; la circonferenza sarà divisa in due parti uguali; ma il solo diametro non basta alla formazione di una rettilinea regolare figura si divida la circonferenza per terze in tre parti uguali, in que

in cinque, in sei: la corda di $\frac{1}{3}$ della circonferenza sarà il lato del triangolo equilatero, e questa sarà la prima rettilinea figura regolare che può inscriversi nel cerchio
la corda di $\frac{1}{4}$ della circonferenza sarà il lato del quadrato inscritto, seconda figura regolare inscrivibile al cerchio
la corda di $\frac{1}{5}$ della circonferenza sarà il lato del pentagono regolare, terza figura inscrivibile al cerchio
la corda di $\frac{1}{6}$ della circonferenza, sarà il lato dell'esagono regolare, quarta figura inscrivibile al cerchio.
È adunque manifesto che la determinazione de' lati delle figure regolari dipende per serie da $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$ · della circonferenza. ma questa serie è di fatto la armonica; dunque per conoscere la serie delle rettilinee regolari figure inscritte nel cerchio, deve dividersi la circonferenza per l'armonica continua serie.
Si vuole osservare che quando si è avvicinato ad $\frac{1}{6}$ della circonferenza, si ha il lato dell'esagono, uguale al raggio del cerchio, onde si ritorna da capo al cerchio. In quel modo

modo che nel prendere tutte le vagioni co' mezzi determinabi, la vagione dupla è il principio della serie, ma non fa proporzione, e 5.7 è il fine della serie. ma 5.7 danno le radici della vagione dupla, come proveremo a suo luogo; tornano adunque le vagioni da capo alla dupla

1. 2	1. 2	
1. 2. 3	2. 3. 4. 5. 6	1. 3
2. 3. 4	6. 8. 9. 10. 12	2. 4
3. 4. 5	12. 15. 16. 17. 20	3. 5
4. 5. 6	20. 24. 25. 26. 30	4. 6
5. 6. 7	30. 35. 36. 37. 42	5. 7

La prima regolare rettilinea figura che è il triangolo equilatero, è determinata dalla vagion tripla varionale nel suo principio primo, che è $\frac{1}{3}$ della circonferenza, e nel suo effetto, che è il diametro AB, divito dal seno CE in modo che BE = 1, ed AE = 3, che è la vagion tripla; ed in oltre il quadrato di AC è uguale a tre quadrati del raggio, che è pure vagione tripla; e si nobi la natura delle due tripla, armonica nella circonferenza 1. $\frac{1}{3}$, perchè è per divisione; ed aritmetica nel diametro perchè è per somma.

Fig. 19.

Se poi si considerino la due vette
$bB3 \cdot bC$, diametro, e lato del
triangolo equilatero: Queste
sono fra loro come le
radici della sesquialtera. Perchè
il quadrato del diametro è uguale
a quattro quadrati del raggio,
ed il quadrato del lato del tri-
angolo equilatero è uguale a
tre quadrati del raggio
onde $\overline{bB3}^2 - \overline{bC}^2 :: 4 \cdot 3$; ed
$bB3 \cdot bC :: \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} :: 2 \cdot \sqrt{3}$
Si sa che 3. 4 ~~fra~~ sono i mezzi
o sia il centro della tripla
$1 \cdot 3 :: 4 \cdot 6$

Dalle cose fino a qui esposte
pare si possa dedurre, che la
ricerca della ragione che passa
fra il diametro, e la circon-
ferenza trasportar si possa
dai poligoni inscritti e circo-
scritti, alla serie armonica,
da cui nascono quei poligoni:
e precisamente alla ragion
tripla co' mezzi armonico,
ed aritmetico $1 \cdot 3 :: 4 \cdot 6$, accanto
dell'armonica natura del
cerchio, e della tripla, princi-
pio primo delle rettilinee
regolari figure, e prima
di tutte le armoniche pro-
porzioni $6 \cdot 3 \cdot 2$; $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$; la
qual proporzione $1 \cdot 3 :: 4 \cdot 6$
è inseparabile dall'armonica
natura del cerchio. Poichè
poichè il primo poligono regolare

(cioè

(cioè il triangolo equilatero) è determinato dal cerchio armonicamente diviso nella tripla 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$; e da questo primo poligono si risolve il diametro nella ragion tripla 1. 3 :: BE. Cf; ed i due quadrati del diametro, e del lato del triangolo equilatero si risolvono nella ragion sesquiterza $\overline{BB}$. $\overline{BC}$ :: 4. 3; e tutto ciò si risolve, e si racchiude come in suo principio primo nella tripla, ridotta a proporzione geometrica diceva 2. 3 :: 4. 6; i di cui estremi 2. 6 sono in tripla ragione, ed i cui mezzi 3. 4 formano il centro della proporzione, sono in ragion sesquiterza, cioè di. 4. mezzo aritmetico, e di. 3. mezzo armonico; ed in oltre $\overline{CE}^2$ = DeB = 3×1 = 3, ed il quadrato del raggio = 4, mezzo aritmetico di questa proporzione 2. 3 :: 4. 6, di cui. 3. è il mezzo armonico. Non si vuole far caso per ora della materiale indicazione del lato dell'esagono BC = al raggio del cerchio, nè della tripla indicata da 7. 22. del diametro alla circonferenza.

Si vuole bensì osservare che

dovendo assegnarsi per diametro 7. somma di 3+4, centro della tripla geometrica diceva: questo termine si assume come medio aritmetico fra 3.4, che è = 3½ in 3.3½.4, e vadoggiando otto .6.7.8.

In 1.3.4.6, 4 è medio aritmetico, (3. armonico); e fra 3.4. il medio aritmetico è = 3½. Il centro della tripla geometrica diceva 1.3::4.6, è la sesquiterza 3.4. ed il diametro deve essere di aritmetica ragione, adunque non può essere che 3½ ma la circonferenza è indicata nel suo principio primo dalla tripla armonica 1.½.⅓; 6.3.2 adunque sarà 6+3+2=11, da cui resta escluso il medio aritmetico 4.

ma 3½.11::7.22; e questa appunto è la ragione indicata, e dimostrata da Archimede co' Poligoni. Adunque è bene riconvenire alla tripla 1.3::4.6 per cercare il rapporto fra il diametro, e la circonferenza che facemmo a suo tempo nel settimo libro.

Scolio II.

Il rapporto una data ragione a proporzione geometrica diceva non è

non è un arbitrio, ~~poichè~~
ma una necessità. Poichè egli
è impossibile il costruire un
cerchio con l'apertura del com-
passo senza fare una ragione
suddupla fra l'apertura
del compasso, ed il diametro
Prima adunque di dividere il
diametro in qualunque delle
possibili ragioni, vi è antece-
dentemente nel diametro la
ragion dupla, inerente per
modo al diametro medesimo,
che quando non vi sia, non
è, nè può essere diametro
Quando adunque si divide il
diametro, si divide la ragion
dupla, che è inseparabile dal
diametro, in una ragione
diversa, ch'è arbitraria, e
posteriore alla dupla. In
conseguenza egli è impossibile
il separare la relazione
della ragione arbitraria alla
ragione necessaria costitutiva
del diametro.

Da ciò ne viene, che dalla
necessaria relazione delle
due ragioni, cioè della
dupla ch'è di natura del
diametro, e della formata
ad arbitrio, debba risultare
una terza forma di ragione,
che geometricamente le con-
giunga, ed in cui sia evidente
che la prima forma è sempre

la vagione dupla.
Sia per esempio la riduzione della
Fig. 27 vagione ☐B. BD
a . b
a proporzione geometrica
discreta. Per ridurla è necessa
la somma de' due dati secmini
a+b, e però bisogna ribovnare al
diametro BD. di questa somma
bisogna prendevne la metà a+b/2
che fa = r; e per conseguenza si
viene al vaggio, o sia all'apertura
del compasso, con cui si fovma
il civcolo; ed eccoci avvivati
ai secmini della prima vagione
che è la dupla fra il diametro,
ed il vaggio, il quale è sempre
il mezzo avmonico necessario
fra i pevpi del diametro. Ova
poi si fa a.ab. v.bv; edè
fovmata la proporzione geometrica
discreta della vagione a . b,
ossia a.bv; di cui il mezzo
avmonico è ab; e l'aritmetico v
la vagione adunque avbitvaria
a-b, si vidue con queste
opevazioni all'apertura del
compasso facendolo a.bv,
cioè si vidue al suo prin=
cipio indipendente dal nostvo
avbitvio; e così a.bv sono
piani, e però del medesimo
genere de' quadvati del tevzo
e del vaggio, che sono i mezzi
avmonico, ed aritmetico, che altvimen=
ti non potvebbevo ritvovarsi

Fine del Lib. II. Lib. III

Libro Terzo

Osservazioni su le ragioni co' Covo mezzi determinati, armonico, aritmetico, e Contrarmonico.

Osservazione I.

1. Si prendano tutti i suddetti mezzi fra i numeri alternativamente presi nella serie antenetica, cioè fra 1.3; 2.4; 3.5; 4.6; 5.7 &c

Ragioni	Le medesime co' l mezzo aritm.co	Proporzioni aa tab / a a b b	Ragioni fra gli estremi		esponenti
a . b	a . r . b	a . ab . bb . rr . ab . bb			
1 : 3	1 . 2 . 3	2 . 3 . 4 . 5 . 6	:: 1 . 3	:: 1 . 3	1
2 . 4	2 . 3 . 4	6 . 6 . 9 . 10 . 12	:: 1 . 2	:: 3 . 6	3
3 . 5	3 . 4 . 5	12 . 15 . 16 . 17 . 20	:: 3 . 5	:: 6 . 10	6
4 . 6	4 . 5 . 6	20 . 24 . 25 . 26 . 30	:: 2 . 3	:: 10 . 15	10
5 . 7	5 . 6 . 7	30 . 35 . 36 . 37 . 42	:: 5 . 7	:: 15 . 21	15
6 . 8	6 . 7 . 8	42 . 48 . 49 . 50 . 56	:: 3 . 4	:: 21 . 28	21

2. Si osservi che in queste proporzioni vi sono ancora quelle de' numeri consecutivi 1.2; 2.3; 3.4 &c. Giacchè adunque nelle proporzioni dedotte dai numeri alternativamente presi, vi sono comprese ancor quelle de' numeri consecutivi: parlerem delle sole

prima, cioè di quelle dodeche dà
numeri alternativamente pari.
3. In esse proporzioni tutti i mezzi
aritmetici sono quadrati 4. 9. 16. 25
I mezzi armonici sono i quadrati
detti meno 1. che è il quadrato
della differenza della forma, cioè
i mezzi armonici sono 3. 8. 15. 24. 35
ed i mezzi contrarmonici sono
i quadrati detti, cioè i mezzi
aritmetici +1; eccoli 5. 10. 17. 26. 37
La prima colonna va crescendo
con l'ordine de' numeri pari
4. 6. 8. 10. 12 &c; e l'ultima di
6. 8. 10. 12. 14 &c. le colonne
intermedie, cioè la seconda,
terza, e quarta crescono de'
numeri caffo 5. 7. 9. 11. 13 &c
Si possono adunque continua-
re, quanto uno vuole, le pro-
porzioni stesse.
4. Se si ordinassero scrivendo con lo
stesso ordine tutte le colonne,
avremmo una proporzione
anteriore 0. 0. 1. 2. 2, in
cui fra 0. 2. il mezzo
armonico sarebbe 0; il mezzo
aritmetico sarebbe 1. ed il
contrarmonico sarebbe 2.

2	0. 0. 1. 2. 2	
	2. 3. 4. 5. 6	4
4	6. 8. 9. 10. 12	6
6	12. 15. 16. 17. 20	8
8	20. 24. 25. 26. 30	10
10	30. 35. 36. 37. 42	12

Sicchè il primo fra tutti i mezzi
armonici

armonici sarebbe 0, cioè
= al mezzo aritmetico 1 ~~meno~~
meno 1; 1−1=0; Il mezzo
aritmetico sarebbe 1. ch'è un
quadrato, come tutti gli altri
mezzi aritmetici, ed è il primo
di tutti i quadrati; Il primo
mezzo contrarmonico sarebbe
2, uguale al mezzo aritme-
tico +1.

La prima, ed ultima colonna
hanno le differenze de' loro
termini come i numeri
naturali, ma la prima co-
lonna incomincia dall'1., la
seconda dal 2.

prima	seconda
2.4.6.8.10	4.6.8.10.12
1.2.3.4.5	2.3.4.5.6

5° Abbiamo osservato finora le
proporzioni dedotte dai numeri,
fra i quali passa differenza 2
cioè fra 1.3; 2.4; 3.5 &c, onde
ricavabone il mezzo aritmetico
vegna fra i termini della
forma 1.2.3; 2.3.4; 3.4.5 &c
la differenza 1; le quali pro-
porzioni abbraccian ancora
quelle che nascono dalle ra-
gioni de' numeri consecutivi
1.2; 2.3; 3.4 &c

Osserviamo ora quelle proporz-
zioni che danno i mezzi fra
due numeri, fra i quali
ricavato il mezzo aritmetico,
vegni nella forma la differenza 2

a.b	a.r.b	ar.ab.rr.ab.br
0.4	0.2.4	0.0.4.8.8
1.5	1.3.5	3.5.9.15.25
2.6	2.4.6	8.12.16.20.24
3.7	3.5.7	15.21.25.29.35
4.8	4.6.8	24.32.36.40.48
5.9	5.7.9	35.45.49.53.63

2.3.4.5.6

6.8.9.10.12 [illegible]

In queste proporzioni si osserva che i mezzi aritmetici sono anco qui quadrati; il mezzo armonico è minore, il contrarmonico è maggiore del mezzo aritmetico quanto vale il quadrato della differenza 2. della forma

Si osserva in oltre che la prima ed ultima colonna contengono i mezzi armonici delle proporzioni del numero I; ma la prima colonna principia dal 3., e la ultima dal 15. cioè due doppi valendo con l'ordine de' numeri impari in tutte cinque le colonne si trova 4. il primo mezzo aritmetico; il primo mezzo armonico = 4 − 4 = 0; il primo mezzo contrarmonico = 4 + 4 = 8

6°. Si osservino ora i mezzi fra quei numeri, fra i quali trovato il mezzo aritmetico, regni fra i termini della forma la differenza 3.

0.6	0.3.6	0.0.9.18.18
1.7	1.4.7	4.7.10.25.28
2.8	2.5.8	10.16.25.34.40
3.9	3.6.9	18.27.36.45.54
4.10	4.7.10	28.40.49.58.70

Anco

Ancor in queste i merzi armonici sono quadrati; il merzo armonico è minore, e il merzo controarmonico è maggiore del merzo aritmetico quanto vale il quadrato della differenza 2. della forma

La prima colonna cresce così
4. 6. 8. 10. 12 &
2. 3. 4. 5. 6 & la albina così
10. 12. 14. 16. 18
5. 6. 7. 8. 9; cioè le lor differenze sono come i numeri razionali; ma la prima principia dal 4; l'altra dal 10; lasciandone fuori 2; cioè 6. 8
Le due colonne di mezzo crescono come i numeri caffo, principiando dal 7.
Ancor qui il primo merzo armonico è 0.

7° Le proporzioni, le cui forme hanno per differenza 4; hanno esse pure i merzi aritmetici quadrati, la differenza fra i merzi armonico, aritmetico, e controarmonico = al quadrato della differenza della forma.
Il primo merzo armonico ancor qui è 0. La prima colonna è fatta dai merzi armonici del n°. 5°.; e la albina dai medesimi, lasciatine fuori

0. 8	0. 4. 8	0. 0. 16. 32. 32
1. 9	2. 5. 9	5. 9. 25. 41. 45
2. 10	2. 6. 10	12. 20. 36. 52. 60
3. 11	3. 7. 11	21. 33. 49. 65. 77

8°. Nelle proporzioni del numero primo i numeri esprimenti le ragioni sono

2 · 6 · 12 · 20 · 30 · 42

1 · 3 · 6 · 10 · 15 · 21

I mezzi armonici pari sono

8 · 24 · 48 · 80 · 120

1 · 3 · 6 · 10 · 15

Questi numeri a due a due presi danno i quadrati de' numeri naturali, i quali si hanno ancora dalla somma de' numeri caffo.

1 + 3 = 4 = 1 + 3

3 + 6 = 9 = 1 + 3 + 5

6 + 10 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7

10 + 15 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9

I mezzi armonici dispari sono

3 · 8 · 15 · 35 · 63 · 99

I numeri impari sono la somma de' termini delle ragioni prime

3 = 1 + 2 ; 5 = 2 + 3 ; 7 = 3 + 4 e

Nelle proporzioni del numero 5°. gli estremi sono 3 · 15 · 35 · 63 · 99

i mezzi armonici pari 12 · 32 · 60 · 99

3 · 8 · 15 · 24

che sono i mezzi armonici del numero I. I mezzi armonici dispari 3 · 21 · 45 · 77

Li lascia di fare altre osservazioni, potendo farle da ognuno che voglia. Tale sarebbe l'osservare che i primi termini del primo e secondo numero crescono per numeri pari ma nel secondo e quarto, cioè i numeri crescono per impari & altre

Osservazione II.ª

1. Le proporzioni del n.º 1.º osservazione I osservar si vuole I.º che gli esponenti loro sono 2. 6. 12. 20. 30. 42.
1. 3. 6. 10. 15. 21
che nascono per somma dai numeri naturali come nella 1 colonna verga
1 . . . seguente
1 . 1
1 . 2 . 1
1 . 3 . 3 . 1
1 . 4 . 6 . 4 . 1
1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1
1 . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 . 1
1 . 7 . 21 . 35 . 35 . 21 . 7 . 1
Essi nascono ancora dai numeri naturali in un altro modo
Eccolo

Numeri naturali	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Loro quadrati	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Radici de' loro prodotti	$\sqrt{1\times4}$	$\sqrt{4\times9}$	$\sqrt{9\times16}$	$\sqrt{16\times25}$	$\sqrt{25\times36}$	$\sqrt{36\times49}$	$\sqrt{49\times64}$	$\sqrt{64\times81}$	
	2	6	12	20	30	42	56	&c	
	1	3	6	10	15	21	28		

2. Nelle proporzioni del n.º 1.º osservazione 1.ª (Tav. I. N.º 1.º) osservinsi le ragioni degli esponenti nella prima verga, quindi le proporzioni alternativamente prese degli esponenti stanno come i numeri caffo 1 : 3 ; 3 . 5 . 5 . 7 ; 7 . 9 ; 9 . 11 &c ; e le ragioni

degli esponenti della 1ª, 4ª, 5ª proporzione stanno come i numeri naturali 1.2; 2.3; 3.4; 4.5; 5.6 &c. Sempre s'intende che le ragioni si riducano a numeri primi.

3º. Si osservi inoltre che nella prima proporzione tutti i numeri sono di seguito 2.3.4.5.6. nè ve n'è alcuno di ozioso, ossia ommesso, come non appartenente alla proporzione

Tav. I. nº III. e nº VII

Nella seconda proporzione

6. 8. 9. 10. 12

vi sono due vani, cioè fra 6.8; e fra 10.12, fra i quali vi stanno 7.11; i quali se vi si frapponessero, quanto alla proporzione, rimarrebbero oziosi.

Nella terza proporzione

12. 15. 16. 17. 20

fra 12.15 vi sono due gradi vani, o sia due numeri oziosi 13.14; e fra 17.20 ve ne sono altri due 18.19

Nella quarta proporzione

20. 24. 25. 26. 30

fra 20.24 vi sono 3 vani 21.22.23; ed altri 3 vani vi sono fra 26.30, cioè 27.28.29 &c

Sono oziosi quei numeri, ma non lo sono. sono arbitrari, non già per quella proporzione, da cui sono

rischiesti

vinchiusi, ma per il legame della stessa proporzione con le precedenti, e suseguenti, e per la relazione delle somme rispettive de' termini delle proporzioni, e di tutti quei numeri che riempiono i vani delle rispettive proporzioni, come ora si viene mostrato

4. La prima proporzione che ammette vacui di numeri è la dupla 6. 8. 9. 10. 12
7 11
In questa trovandosi mancanti 7. 11, vi si supporgano, e posto da una parte il 7. e tornato dall'altra parte l'11 col mezzo consonantico. 10. si ha. 12. Quindi nasce la forma dupla 7. 12 :: 1. 2 :: 2. 6, e sarem della precedente proporzione

2. 3. 4. 5. 6

Nella susseguente proporzione 12. 15. 16. 17. 20. si tornino i due mancanti fra 12. 15. 16, cioè 13+14=27. e si tornino 18+19 co'l consonantico. 17. n'avrà 54; e quindi la forma 17. 54 :: 1. 2 :: 6. 12, e sarem della precedente proporzione

6. 8. 9. 10. 12

Nella seguente 20. 24. 25. 26. 30 tornati i mancanti 12+24+13 =66, e tornati pure gli altri due mancanti col mezzo con-

contravvarmonico $n6+n7+n8+n9$ $= 110$, si avrà la forma $66 \cdot 110 :: 3 \cdot 5 :: 12 \cdot 20$, essovvi della precedente proporzione

$12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 20$

segue l'altra proporzione

$30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 40$

formabi $31+32+33+34 = 130$

e $37+38+39+40+41 = 195$

si ha la forma $130 \cdot 195 :: 2 \cdot 3 :: 20 \cdot 30$, essovvi della precedente

È chiaro da tutto questo che nella seconda è contenuta la prima; nella terza è contenuta la seconda; nella quarta è contenuta la terza e così sempre

$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
$2 \cdot 4$	$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$
$3 \cdot 5$	$12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 20$
$4 \cdot 6$	$20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 30$
$5 \cdot 7$	$30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 40$

È chiaro ancora che non dan luogo qui le frazioni, tutto essendo legato a determinata serie di ragioni e proporzioni

ed è finalmente chiaro, non essevvi nella indefinita aritmetica serie $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ & alcun numero ozioso, tutti avendo rapporto al legame delle ragioni e proporzioni, poiché in ciascuna proporzione si trova la forma della precedente

precedente proporzione.

5.° Si vuol' osservare che nella prima, che ha gli esponenti in ragione tripla 1.3.4.5.6, non essendovi vacuo di numerazione, rimane solo senza rapporto il mezzo contrarmonico 5.

Nella seconda proporzione

6.8.9.10.12

si trova ne' numeri separati la forma tripla 1.3. della prima proporzione, e si trova per somma.

Si sommino i cinque seminini della tripla 2+3+4+5+6 = 20 ed i due seminini della forma tripla posteriore 7+11 = 18, si ha 20.18 :: 5.7

Continuando per serie la operazione, si sommino i cinque seminini della duplo

6+8+9+10+12 = 45

e si sommino i due seminini della forma duplo posteriore 27+54 = 81, si avrà fra 45.81 la ragione di 5.9

Sommati i seminini della seguente 12+15+16+17+20 = 80 e si sommino pure i due della forma 3.5 posteriore

66+110 = 176

si avrà 80.176 :: 5.11 e

adunque si ha 5.7

5.9

5.11

5.13

20.40

le somme 20.40 :: 1.2
danno la forma dupla -
vi è adunque il legame delle
ragioni anteriori con le pro=
porzioni posteriori, e delle
ragioni posteriori con le pro=
porzioni anteriori, cioè il
legame di serie universale
di ragioni, e proporzioni nella
serie di proporzioni corri=
spondenti dai numeri pari, e
cioè 1.3; 2.4; 3.5; 4.6 e
6.°Si
vuole inoltre osservare
che sommando da una parte
i termini della proporzione
senza il mezzo contrarmonico
e dall'altra il mezzo con=
trarmonico con i numeri
esclusi dalla proporzione,
risulta la serie seguente

Della dupla 6+8+9+12 ═══ 35
de' termini esclusi 7+10+11 ═══ 28
Della seguente 12+15+16+20 ═══ 63
de' termini 13+14+17+18+19 = 81
Della 20+24+25+30 ═══ 99
de' termini 21+22+23+26+27+28+29 = 176
Della 30+35+36+42 ═══ 143
degli esclusi 31+32+33+34+37+38+39+40+41 = 315

Ecco la serie 35.28 :: 5.4
63.81 :: 7.9
99.176 :: 9.16
143.315 :: 11.25

Esaminata questa serie, si
trova, che è formata dagli
impari per differenza 2; cioè
5-7-9-11, e dai numeri quadrati
4-9-16-25

Fig. VI

Se $AE = 10$

$BO^2 = AB \times BE = 1 \times 9 = 9$

$BO = 3$

$BD = 4$

$DO = 5$

$EF = AE \times AF = 5 \times 10 = 30$

$DE\,d = \frac{DE \times Ed}{2} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2} = 12\frac{1}{2}$

$DAG = \frac{DA \times AG}{2} = \frac{5 \times \frac{15}{4}}{2} = \frac{75}{8} = 9\frac{3}{8}$

poichè $DB : BO :: DA : AG$

$4 : 3 :: 5 : \frac{15}{4}$

$DEd : DAG :: 12\frac{1}{2} : 9\frac{3}{8} :: 4 : 3$

$\frac{4}{37\frac{1}{2} = 37\frac{1}{2}}$

$DEd + DAG = 12\frac{1}{2} + 9\frac{3}{8} = 21\frac{7}{8}$

$EF - DEd - DAG = 30 - 21\frac{7}{8} = 8\frac{1}{8}$

$DEd + DAG : EF - DEd - DAG ::$

$21\frac{7}{8} : 8\frac{1}{8} :: 7 : 9$

$\frac{9}{169\frac{6}{8}} \quad \frac{7}{196\frac{7}{8}}$

$196\frac{7}{8}$

Se $AE = 10$

$BO^2 = AB \times BE = 4 \times 16 = 36$

$BO = 6$

$BD = 8$

$DO = 10$

$EF = AE \times AF = 10 \times 10 = 100$

$DEd = \frac{DE \times Ed}{2} = \frac{10 \times 10}{2} = 50$

$DAG = \frac{DA \times AG}{2} = \frac{10 \times 7\frac{1}{2}}{2} = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}$

poichè $DB : BO :: DA : AG$

$8 : 6 :: 10 : \frac{60}{8} = 7\frac{1}{2}$

$DEd : DAG :: 50 : 37\frac{1}{2} :: 100 : \frac{75}{2} :: 4 : 3$

$\frac{3 \quad 4}{150 = 150}$

$DEd + DAG = 50 + 37\frac{1}{2} = \frac{100 + 75}{2} = \frac{175}{2}$

$EF - DEd - DAG = 100 - \frac{175}{2} = \frac{400 - 175}{2}$

$= \frac{225}{2}$

$DEd + DAG : EF - DEd - DAG ::$

$\frac{175}{2} : \frac{225}{2} :: 175 : 225 :: 7 : 9$

$\frac{9 \quad 7}{1575 = 1575}$

4. 9. 16. 25. ma ovvero evidentemente mancante dalla serie de' quadrati perchè manca il primo quadrato, che è la unità; e la serie de' numeri caffo per differenza 2. incominciando cui dal numero 5., che certamente non è il primo della serie: non pare la cosa originale

ma si osservi che nella precedente operazione non essendo inclusa la tripla 2. 3. 4. 5. 6, prima proporzione di tutto il complesso, in essa vi sono infatti il quadrato 1. ed il numero caffo 3, poichè 2+3+4+6=15; ed il contrario monico 5. Cioè adunque 15. 5 :: 3. 1

ma sommati insieme gl' impari insieme, ed insieme pure i quadrati, le somme si risolvono nella ragione 7. 11, cioè del quadrato inscritto al cerchio circoscritto

3+5+7+9+11=35

1+4+9+16+25 = 55

e 35. 55 :: 7. 11

adunque la operazione qui sopra indicata conduce al cerchio.

Tav. I. N°. IV

7° Se nella prima colonna, presa dal basso all' alto 30. 20. 12. 6. 2 si ha le differenze 10. 8. 6. 4

si seguita a scemare i numeri con la stessa legge, sopra il 2. si trova lo zero. così se nella seconda colonna presa pure dal basso all'alto 35. 24. 15. 8. 3 con le differenze 11. 9 7. 8 si seguita a scemare i numeri con la stessa legge de' numeri caffo, sopra il 3. si trova lo zero; Nella terza colonna, sopra il 4. si trova l'. 1. Nella quarta colonna sopra il 5. si trova il 2. e nella ultima si trova pure il 2. Adunque 0. 0. 1. 2. 2 è una proporzione con tutti i merri, armonico, aritmetico, e contrarmonico fra. 0. 2. cioè. 0. è il merro armonico; 1. il merro aritmetico; 2. il contrarmonico. ma questo 0. 0. 1. 2. 2 non può nascere se non dalla forma 0. 1. 2, che però andrà posta sopra la forma 1. 2. 3; perchè così le tre colonne della forma avran i numeri con la stessa legge

0. 1. 2	0. 0. 1. 2. 2
1. 2. 3	2. 3. 4. 5. 6
2. 3. 4	6. 8. 9. 10. 12
3. 4. 5	12. 15. 16. 17. 20
4. 5. 6	20. 24. 25. 26. 30
5. 6. 7	30. 35. 36. 37. 42.

8°

8°. I mezzi armonici pari sono (come abbiamo ancora osservato)

8. 24. 48. 80. 120. 168

1. 3. 6. 10. 15. 21 ed

2. 6. 12. 20. 30. 42 q.

I mezzi armonici dispari sono

3. 15. 35. 63. 99. 143. 195

1. 3

3. 7

5. 9

7. 11

9. 13

11. 15

I mezzi aritmetici sono quadrati 4. 9. 16. 25. 36. 49

1+3; 3+6; 6+10; 10+15; 15+21

4 = 1+3 1+2=3

9 = 1+3+5 2+3=5

16 = 1+3+5+7 3+4=7

25 = 1+3+5+7+9 4+5=9

La serie poi de' numeri pari cresce come la serie de' numeri 2. 4. 6. 8. 10. 12

1. 2. 3. 4. 5. 6 q

Tolti i pari da questa serie restano i dispari 1. 3. 5. 7 q

Tav. I. N°. IV. 9°. Il mezzo armonico della prima proporzione sta al mezzo aritmetico della seconda cioè 3. 9 come il primo estremo 2. all'altro 6. della prima proporzione, ed il mezzo aritmetico della prima proporzione sta al mezzo armonico della seconda, cioè 4. 8. come il primo estremo 6. all

altro .12. della seconda proporzione, e così sempre

3 · 9 :: 1 · 3 :: 12 · 6

4 · 8 :: 1 · 2 :: 6 · 12

8 · 16 :: 1 · 12 :: 6 · 12

9 · 15 :: 3 · 5 :: 12 · 20

15 · 25 :: 3 · 5 :: 12 · 20

16 · 24 :: 12 · 18 :: 20 · 30

24 · 36 :: 12 · 18 :: 20 · 30

25 · 35 :: 5 · 7 :: 30 · 42

10° Il mezzo armonico .3. della prima proporzione sommato col mezzo aritmetico .9. della seconda dà la stessa somma che nasce dal mezzo aritmetico della prima sommato col mezzo armonico della seconda

3 + 9 = 4 + 8

6 + 16 = 9 + 13 &c

8 il mezzo aritmetico della prima (4) sommato co'l mezzo contrarmonico (10) della seconda dà sempre la stessa somma che nasce dal mezzo aritmetico (9) della seconda col mezzo contrarmonico (5) della ~~seconda~~ prima

4 + 10 = 5 + 9

I prodotti degli estremi, ovvero de' mezzi armonico ed aritmetico danno la seguente serie 12 · 72 · 240 · 600 &c ; e le somme del mezzo armonico della prima e del mezzo aritmetico della seconda (e così sempre) sono

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{24} \cdot 40 \cdot 60$ &c

Queste due serie di somè
e prodotti danno

4

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} :: 1 \cdot 1$

$\sqrt{24} \cdot 7\sqrt{2} :: 1 \cdot 3$

$40 \cdot \sqrt{240} :: 1 \cdot 6$

$60 \cdot 600 :: 1 \cdot 10$

$84 \cdot \sqrt{1260} :: 1 \cdot 15$

Cioè i solidi $1 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15$ &c
in inversa di $1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{15}$ &c.
dedotti dalle differenze, fatte
volte ~~fa~~ osservate, dell'ar=
monica serie

$1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6}$

$60 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 12 \cdot 10$

Diff. $30 \cdot 10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2$

$1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{15}$

11°. La somà de' mezzi avmonico
e conbavmonico equivale
al doppio del mezzo anome=
rico, perche i mezzi avmonico
anomebico e conbavmonico
sono sempre in anomebica
proporzione, sano essendo
minore il mezzo avmonico
dell'anomebico, quando
il conbavmonico ne è mag=
giore. ma la soma del
primo ed ultimo ella pure
è il doppio del mezzo ano=
mebico. adunque la somà
del mezzo avmonico e
conbavmonico è eguale alla
somà degli estremi

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$3+5 = 2\times4 = 6+2$

l. 6. 1. pr. XX

Osservazione III.

Qualunque proporzione geometrica discreta si risolve nella continua, formata della ragione del primo termine al terzo della geometrica discreta. E qualunque proporzione continua si risolve nella sua discreta

1.° Sia la proporzione geometrica discreta

$$av.\ ab :: vv.\ br \;/\; r = \frac{a+b}{n}$$

questa si risolverà nella sua continua, moltiplicandone tutti i termini a due a due per ordine così $av \times ab.\ ab \times vv.\ vv \times br$

$\div\ aabv.\ abvv.\ bv^3$

$\div\ aa.\ av.\ vv$

2.° Questa continua si risolverà nella sua discreta, prendendo il terzo proporzionale aritmetico dopo i due primi termini di questa continua così $\div\ aa.\ av.\ 2av - aa$ e poi facendo come l'ultimo termine della geometrica continua (vv) all'ultimo termine della continua aritmetica ($2av - aa$) così il medio (av) al quarto proporzionale

$vv.\ 2av - aa :: av.\ \frac{2aavv - a^3v}{vv}$

$= \frac{2aav - a^3}{v}$

e quello quarto proporzionale $\left(\frac{\sqrt{aav-a^3}}{v}\right)$ ponendolo fra il primo e secondo bevmine dell'aritmetica continua così

$$aa \cdot \frac{\sqrt{aav-a^3}}{v} \cdot av \cdot \sqrt{av-aa}$$

Questa sarà la geometrica diseveta $av \cdot ab :: vv \cdot bv$

Poichè

$$aa \cdot \frac{\sqrt{aav-a^3}}{v} \cdot av \cdot \sqrt{av-aa}$$

$$a \cdot \frac{\sqrt{av-aa}}{v} \cdot v \cdot \sqrt{v-a}$$

$$av \cdot \sqrt{av-aa} \cdot vv \cdot \sqrt{vv-av}$$

$$av \cdot \sqrt{a \times a+b} - aa :: vv \cdot \sqrt{\frac{aa+ab+bb}{4}} - a \times \frac{a+b}{\sqrt{\ }}$$

$$\frac{aa+ab+bb}{\sqrt{\ }} - \frac{aa-ab}{\sqrt{\ }}$$

$$\frac{ab+bb}{\sqrt{\ }} = b \times \frac{a+b}{\sqrt{\ }} = bv$$

$$av \cdot ab :: vv \cdot bv$$

Lo che si voleva provare

esempio 1°

$$\sqrt{\ } \cdot 3 :: 4 \cdot 6$$

$$\sqrt{\ } \times 3 \cdot 3 \times 4 \cdot 4 \times 6$$

$$6 \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{24}$$

$$1 \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \text{ doppia}$$

Jo $\quad 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 3$

e poi $\quad 4 \cdot 3 :: \sqrt{2} \cdot \frac{6}{4} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$1 \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} :: \sqrt{2} \cdot 3$$

$$\sqrt{2} \cdot 3 :: 4 \cdot 6$$

Es. n°

$$1 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1 \times 3 \cdot 1 \times 5 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 5$$

$$3 \cdot 5 :: 9 \cdot 15$$

$$3 \times 5 \cdot 5 \times 9 \cdot 9 \times 15$$

$$15 \cdot 45 \cdot 135$$

$$1 \cdot 3 \quad 9 \text{ tripla}$$

Jo $\quad 1 \cdot 3 \cdot 5$

e poi $\quad 9 \cdot 5 :: 3 \cdot \frac{15}{9}$

$$1 \cdot \frac{15}{9} \cdot 3 \cdot 5$$

$$9 \cdot 15 :: 27 \cdot 45$$

$$3 \cdot 5 :: 9 \cdot 15$$

Esempio 3° 1 . 4 . 7

1×4 . 1×7 . 4×4 . 4×7

4 . 7 :: 16 . 28

4×7 . 7×28 . 16×28

28 . 112 . 448

7 . 28 . 112

1 . 4 . 16

Ho 1 . 4 . 7

e poi 16 . 7 :: 4 . $\frac{28}{16} = \frac{7}{4}$

1 . $\frac{7}{4}$. 4 . 7

4 . 7 :: 16 . 28

Quindi s'intende l'insegnamento di Platone; che data la duplа geometrica continua 1.2.4 essa duplа che andrebbe in infinito ÷ 1 . 2 . 4 . 8 . 16 &c, viene limitata e ridotta a certa legge dalla triplа geometrica discreta, diminuendo il terzo termine della continua 1.2.4 in sesquiterza, e ripovando il ripulsato al mezzo a. così

1 . 2 . 4

1 . 2 . 3

4 . 3 :: 2 . $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

1 . $\frac{3}{2}$. 2 . 3

2 . 3 :: 4 . 6

come nel primo esempio

1 . 2 . 4	4 . 6 . 9	9 . 12 . 16	25 . 30 . 36
1 . $1\frac{1}{2}$. 2 . 3	4 . $5\frac{1}{2}$. 6 . 8	9 . $11\frac{1}{4}$. 12 . 15	25 . $29\frac{1}{6}$. 30 . 35
2 . 3 :: 4 . 6	12 . 16 . 18 . 24	36 . 45 . 48 . 60	150 . 175 . 180 . 210
	6 . 8 :: 9 . 12	12 . 15 :: 16 . 20	30 . 35 :: 36 . 42

1 · 2 · 4 · 6 · 9 · 12 · 16 · 20 · 25 · 30 · 36				
1½	5½	11¼	19⅕	29⅙
½	⅓	¼	⅕	⅙
½	⅔	¾	⅘	⅚
3	4 6	9 15	16 24	25

merzi aritm.
frazioni
mancano dalla unità
centri

Osservazione IV

Delle Proporzioni congiunte

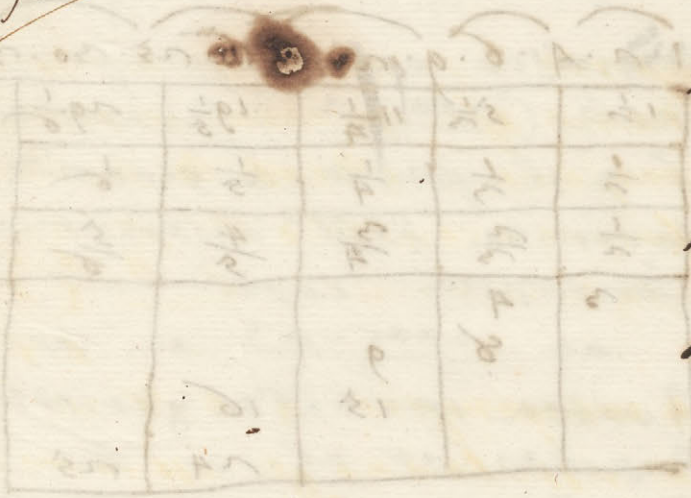
Vedi un' altra specie di proporzioni nell' anomala serie de' numeri. Data la serie de' numeri quadrati 1 · 4 · 9 · 16 · 25 · 36 &c e data la serie delle proporzioni geometriche discrete 1 · 2 · 4 · 6 · 8 · 9 · 12 · 15 · 16 · 20 · 24 · 25 · 30 si trovavano gli estremi di queste proporzioni essere i merzi geometrici de' numeri quadrati.

1 4 9 16 25 36

1 · 2 · 4 · 6 · 8 · 9 · 12 · 15 · 16 · 20 · 24 · 25 · 30 · 35 · 36 · 42

1 · 2 · 4 | 4 · 6 · 9 | 9 · 12 · 16 | 16 · 20 · 25 | 25 · 30 · 36

Da queste due serie congiunte nasce una specie di proporzioni, in cui sempre è preciso terzine un numero quadrato



e l'ultimo è sempre lo stesso della proporzione sottoposta ai numeri quadrati, ed i mezzi sono sempre il primo armonico, ed il mezzo armonico della sottoposta proporzione, ma indeterminati, cioè rispetto ai loro estremi non sono nè armonici, nè aritmetici, nè contr'armonici; se si eccetti però la sola proporzione nata dalla ragione tripla degli estremi che nella serie seguente è la seconda proporzione. 1. 12. 36.

4. 6. 9. 12
9. 12. 15. 20
16. 20. 24. 30
25. 30. 35. 42

questa tripla è la sola privilegiata 4. 6 :: 8. 12 fra tutte, avendo essa i mezzi determinati. perchè 4. 6 :: 8. 12 essendo in numeri primi 2. 3 :: 4. 6, è chiaro che 3. è mezzo armonico, e 4. mezzo aritmetico fra gli estremi 2. 6.

La forma di queste proporzioni è composta delle due semplici forme prime delle due proporzioni, aritmetica, ed armonica nel modo seguente. la prima forma aritmetica è 1. 2. 3, e la prima armonica è 2. 3. 6. queste compongono

gono 1 · 2 :: 3 · 6, e risul-
tano gli estremi in sestupla
ragione. E così la seconda
forma aniomeica è 2 · 3 · 4 /
e la armonica è 4 · 6 · 8
2 · 4 · 6
6 · 8 · 12
e componendo 4 · 6 :: 8 · 12
e risultano gli estremi in
ragion tripla
In queste proporzioni, nate
da 1 · 2 · 3 | 2 · 3 · 4 | 4 · 6 · 8 |
6 · 3 · 2 | 6 · 4 · 3 | 12 · 8 · 6 |
1 · 2 · 3 · 6 4 · 6 · 8 · 12
Il mezzo due aniomeico
della forma prima aniome-
trica (1 · 2 · 3) si converte nel-
l'estremo (2) della prima
armonica, e similmente il
mezzo armonico 3 · dell'armo-
nico (6 · 3 · 2) si converte nel-
l'estremo (3) dell'aniomeica
(1 · 2 · 3) e lo stesso si dica
ed intenda della indefinita
serie di tali proporzioni.
2. Si osservi il necessario
~~Legame~~ rapporto, e legame
di queste proporzioni, il di
cui primo termine è sempre
un numero quadrato, con
le proporzioni geometriche
discrete, posto fin da prin-
cipio formate dai due
mezzi armonico ed aniome-
trico, che unite formano
una proporzione congiunta,

Serie prima	1. 2. 3. 6	4. 6. 8. 12	9. 12. 18. 27	16. 24. 32. 48
Serie seconda	2. 3. 4. 6	6. 8. 9. 12	12. 18. 24. 36	24. 32. 36. 48
Serie congiunta o di doppio centro 2. 3 / 3. 4	1. 2. 3. 4. 6	4. 6. 8. 9. 12	9. 12. 18. 24. 36	16. 24. 32. 36. 48

della seconda serie il primo termine è sempre un numero medio geometrico fra due quadrati, come 2. fra 1. 4; e 6. fra 4. 9. l'esponente magre delle due proporzioni fra loro relative nella serie prima seconda, e terza è sempre comune. Adunque queste proporzioni hanno fra loro un necessario rapporto, e legame.

3. La seconda proporzione congiunta 4. 6. 8. 9. 12. serve a spiegare il testo del Timeo, che dice: Ora = fatti gl' intervalli sesqui = altera, sesquitertij, sesqui = ottavi; con questi legami = ne' primi spazj si adempiva = tutti i sesquiterzi col sesqui = ottavo, lasciandone una = pavoncella, la quale da i = termini di numero a nu = mero come 256. 243

4. 6. 8. 9. 12

4. 6 = sesquialtera

6. 8. = sesquiterza

8. 9. = sesquiottava

Che da questa proporzione risulti la pavoncella che si trova in ragione di 243. 256 si dimostra

4. 6. 8. 9. 12

4 · 6 · 8 · 9 · 12

A novena de' Legni si molt-
iplichino fra loro i numeri

4 × 12 = 48
6 × 9 = 54
8 × 8 = 64

48 · 54 · 64
24 · 27 · 32

I prodotti che in numeri
primi sono 24 · 27 · 32
con la stessa regola
si moltiplichino fra loro
cosi 24 × 32 = 768 div. 256
27 × 27 = 729 3 243

ma perche questa operazione
di moltiplica (proprietà
intrinseca di queste propor-
zioni) quanto è feconda,
altrettanto è significante:
si operi co' Legni in diverso
modo applicati

4 · 6 · 8 · 9 · 12

4 × 8 = 32
6 × 9 = 54
8 × 12 = 96

I prodotti 32 · 54 · 96
In numeri primi. 16 · 27 · 48
siano moltiplicati
16 × 48 = 768 div. 256
27 × 27 = 729 3 243

Non basta. Conservando
la posizione 6 · 8 · 9 · 12
il decimo 4 primo essendo
submultiplo di 12, si trasporti
in 16 ultimo essendo
triplo di 6: sarà la

Sarà la proporzione congiunta

6. 8. 9. 12. 16

si moltiplichino i numeri secondo i segni

6 × 16 = 106

8 × 12 = 96

9 × 9 = 81

I prodotti 81. 96. 106

In numeri primi 27. 32. 36

davanno

27 × 36 = 972 div. 4 243

32 × 32 = 1024 4 256

similmente operando co' segni diversamente applicati

6. 8. 9. 12. 16

6 × 9 = 54

8 × 12 = 96

9 × 16 = 144

I prodotti 54. 96. 144

dich per sei 9. 16. 27

ma 9 × 27 = 243

10 × 16 = 256

4. questa mutazione e traslazione del primo termine 4. in ultimo essendo 16, si prova così. siano due ordini di cinque lettere

a. b. c. d. e

b. c. d. e. f

e sia a. e :: b. f nel primo secondo ordine. si moltiplichino successivamente i termini ugualmente lontani dal centro, ed il centro per se stesso, o altrimenti variamente presi, fino che tutti i prodotti

in

in ciascun ordine si riducano a due: Savanno questi prodotti proporzionali, presi i secondi inversamente dai primi

Primo ordine { Prodotti de' termini, ugualm^te. distanti dal centro ae · bd · cc | acce · bdd
a · b · c · d · e { Prodotti de' termini alternativam^te. presi ac · bd · ce | acce · bdd

Secondo ordine { Prodotti degli ugualm^te. distanti dal centro bf · ce · dd | bddf · cce
b · c · d · e · f { Prodotti de' termini alternativi bd · ce · df | bddf · cce

Deve essere adunque
acce · bdd :: cce · bddf
cioè · a · b :: e · f
ovvero · a · e :: b · f
ma così è per ipotesi. adunque

Corollario. Ciò può applicarsi ai due ordini di numeri 4 · 6 · 8 · 9 · 12
6 · 8 · 9 · 12 · 16
Nel primo risultando sempre la ragione di 256 · 243; e nel secondo quella di 243 · 256

5°. Ne' due ordini di numeri
4 · 6 · 8 · 9 · 12
6 · 8 · 9 · 12 · 16
moltiplicando in croce i termini dell'ordine superiore con quelli dell'inferiore, il prodotto è sempre lo stesso

4 · 12	6 · 9	8
8 · 16	8 · 12	9
4 × 16 = 72	6 × 12 = 72	8 × 9 = 72
8 × 12 = 72	8 × 9 = 72	

Osservazione V.ª

Le cinque proporzioni congiunte si trovano nel cerchio

1 . 2 . 3 . 4 . 6
4 . 6 . 8 . 9 . 12
9 . 12 . 15 . 16 . 20
16 . 20 . 24 . 25 . 30
25 . 30 . 35 . 36 . 42

Il diametro ae si applichi la tripla 2 . 3 . 4 . 6, sicchè sia

Fig. 1ª delle Proporz.ⁱ congiunte

ab = 2
ac = 3
ad = 4
ae = 6

Questa proporzione si risolva nel suo principio primo, che è di dupla continua, moltiplicando per ordine i termini a due a due 2 . 3 . 4 . 6

2×3 . 3×4 . 4×6
6 . 12 . 24
1 . 2 . 4

Si vuole dimostrare nel cerchio questo principio di dupla continua, ch'è richiesto nella tripla, e dimostrato fatto dalla moltiplico ordinata de' termini corrispettivi della tripla 2×3 . 3×4 . 4×6

Da b, d si tirino i seni bn, do, e le corde an, ao; sarà an media geometrica fra ac . ad
3 . 4

et . ao . media geometrica fra
ad . ae
4 . 6

Poichè

Poichè per la ottava, e 17ª del lib. VI. di Eucl. $\overline{an}^2 = ab \times r6 = 1r$; adunque $an = \sqrt{1r}$. adunque $\div r. \sqrt{1r} . 6$, ovvero $\div r. \sqrt{3\times4} . 6$. adunque $\div 3. \sqrt{3\times4} . 4$ adunque $\sqrt{3\times4}$ media fra 3. 4. adunque $\sqrt{1r}$ è medio geometrico fra r e 6, lo è ancora fra 3. 4; e finalmente $\overline{ao}^2 = ad = 6\times4 = r4$. adunque $ao = \sqrt{r4}$; adunque $\div 4. \sqrt{r4} . 6$; potrò per tanto mettere queste due medie a suo luogo così

$$r . 3 . \sqrt{1r} . 4 . \sqrt{r4} . 6$$
$$\quad an \qquad ao$$

Deve esservi nel diametro un termine, da cui si formi co'l seno un triangolo, la cui ipotenusa sia medio geometrico fra $ab . ac$ la quale ipotenusa sia per tanto $\sqrt{r3}$. $= \sqrt{r\times3}$.

Abbiam dimostrato nella precedente osservazione che il primo termine r. della proporzione g. diverrà

$$r . 3 :: 4 . 6$$

è mezzo geometrico fra i due quadrati 1. 4, e però supponendo appresso il termine 1. come quadrato. si aggiunga questo termine $a1$. che è $\frac{1}{6}$ del diametro. si divida il seno lm. e la ipotenusa am

questa ipotenusa am è il mezzo geometrico fra ab. ac . e però
am = √6 = √2a1 = √1×6 = √2×3.
∴ 2.√6. 3, et 1.2.√6.3.6
giacchè il mezzo geometrico fra 1.6 lo è ancora fra 2.3. Li ha per tanto
2.√6. 3.√12.4.√24.6
am an ao
e per tanto am² : an² : ao² .
6. 12 . 24
2×3 . 3×4 . 4×6
1 . 2 . 4
Adunque si è ritrovato il necessario termine 1. primo termine della proposizione congiunta, il quale non appariva ; si è dimostrata per via del circolo la risoluzione della tripla 1.3:: 2.6 , ridotta a geometrica discreta, 2. 3 :: 4.6 nel suo principio primo di doppia continua ; si è dimostrata la origine della proposizione continua nel termine
a1 = 1 ; 1.2.3.6 2.3.4.6
1.2.3.4.6
Lo stesso succede nella duplа 1.2 ridotta a geometrica discreta 6.8 :: 9.12 , applicata al diametro ae ; in cui ab = 6 ; ac = 8 ; ad = 9 ; ae = 12 , ai cui termini si trova necessariamente aggiunto a4. primo termine della proposizione congiunta

co' mezzi am. et an.

7.g. II
2a. propoz. congiunte

congiunta 4.6.8.9.12

$\overline{an}^2 = ab = 6 \times 12 = 72$; $an = \sqrt{72}$

$\div 6.\sqrt{72}.12$

~~$\div 6.\sqrt{72}.12$~~

$6.8.\sqrt{72}.9.12$

$\overline{ao}^2 = ao = 9 \times 12 = 108$. $ao = \sqrt{108}$

$6.8.\sqrt{72}.9.\sqrt{108}.12$

Presto $a4 = 4$, di cui il lemo $4m$, e la ipotenusa am: sarà $\overline{am}^2 = a4 = 4 \times 12 = 48$.

$am = \sqrt{48}$; onde $\div 4.\sqrt{48}.12$

$\div 6.\sqrt{48}.8$

onde $6.\sqrt{48}.8.\sqrt{72}.9.\sqrt{108}.12$

am an ao

$\overline{am}^2 . \overline{an}^2 . \overline{ao}^2$

$48 . 72 . 108$

$6 \times 8 . 8 \times 9 . 9 \times 12$

$4 . 6 . 9$

ed ecco trovata nel cerchio la sesquialtera continua, nata dalla moltiplica continua de' termini della dupla ridotta a proporzione geometrica discreta co' mezzi armonico ed aritmetico $6.8 :: 9.12$ ed ancor qui si è trovato il termine 4, primo termine della proporzione congiunta $4.6.8.9.12$

lo stesso succederà in tutte le altre proporzioni geometriche discrete co' mezzi armonico, ed aritmetico, e nelle relative proporzioni congiunte

a due a due per ordine

Fig. III.
delle propos. congiunte

1° Si vuole osservare che si può ritrovare la media fra 1. 2; fra 4. 6 delle proporzioni congiunte . 1 . 2 . √6 . 3 . √12 . 4 . √24 . 6

4 . 6 . √48 . 8 . √72 . 9 . √108 . 12

am an ao

Sia il cerchio ANOCM, il cui diametro sia diviso ne' termini della prima proporzione congiunta AB . ABB . Bc . Bd . Be

1 . 2 . 3 . 4 . 6

ed in cui per conseguenza $\overline{AM}^2$. $\overline{AN}^2$. $\overline{AO}^2$ siano

6 . 12 . 24

1 . 2 . 4

Prendasi $Al = \frac{Ae}{16}$ divisi il seno LV. e la corda AV; questa sarà la media fra 3. 6, fra AE . AB ; fra 1. 2

Poichè $\overline{AV}^2 = 16 \times 1 = 18$

adunque $AV = \sqrt{18}$

$\div$ 3 . √18 . 6

1 : 3 . √18 . 6 . 18

adunque √18 è media fra 3 . 6 :: 1 . 2

Ora facciasi col diametro AB il cerchio AmRoB . Il seno IM del cerchio maggiore posto dal centro del cerchio minore e taglia in R la circonferenza dello stesso minore . Però

$AR = \sqrt{\overline{Al}^2 + \overline{lR}^2} = \sqrt{3 \times 3 + 3 \times 3}$

$= \sqrt{18}$. Adunque AR = AV .

Fatto adunque centro in A, intervallo in R, si descriva l'arco di cerchio RV ; da V. li

fini

si dini il seno vi., sarà

$\frac{bb}{16} = bl$

Dalla circonferenza BDB restando inversato il seno iv. in m. la ipotenusa Am è il mezzo geometrico fra bb. bc :: 1. 3 perchè bc è fra 1. 6. Dunque il picciolo cerchio dà in questo modo la prima proporzione congiunta

bl. bb. bc. bd. AB

bl. bB. bC. bD. bE

1. 2. 3. 4. 6

come la dava il cerchio grande

1. 2. 3. 4. 6

1. 2. V6. 3. V12. 4. V24. 6

3. 6. V54. 9. V108. 12. V216. 18

3. V18. 6. V54. 9. V108. 12. V216. 18

1. V2. 2. V6. 3. V12. 4. V24. 6

ma nel passare da

1. 2. 3. 4. 6

a 3. 6. 9. 12. 18

allora non fo che concepire la unità divisa in tre parti che non altera la quantità de' semini. Dunque questo passaggio lascia tutto ciò che era innanzi

Nell'uno, e nell'altro cerchio gli esaremi sono in sestuplo, ma nel picciolo cerchio ciascun semino è $= \frac{1}{3}$ del corrispondente semino nel cerchio grande, e così potrebbe proceder oltre indefinitamente

83°

