

G. Tartini

1. Belle ragioni e loro
mezzi determinanti
e Osser. sulle ragioni e loro
mezzi arm. aritm e cont
Arch Tar^{to} Anna A. Ser. ms
Colonis 175

Cap.

Problema. I.

Dada una qualunque ragione o sia
razionale, o sorda: fra due termini espre-
menti questa ragione ritrovare per mezzo
del cerchio i mezzi proporzionali armonici,
geometrici, aritmetici, e contrarmonici.

Costruzione

Sia espressa la data ragione dalle due linee AB, BD . Queste si pongano per diritto, e poi tutta la AD si tagli in mezzo in C , ed intervallo in A descrivasi il semicircolo $AGFD$, e si tiri il raggio CF , ed il seno BG perpendicolari ad AD . Si tirino poi tre tangenti al descritto semicerchio in A, F, D , e siano AH, HE, ED ; e si prolunghi il seno BG fino in I . Finalm.^{te} si faccia il quadrato BL del seno BG , e si faccia il parallelogramo AL , prolungando LG in P .

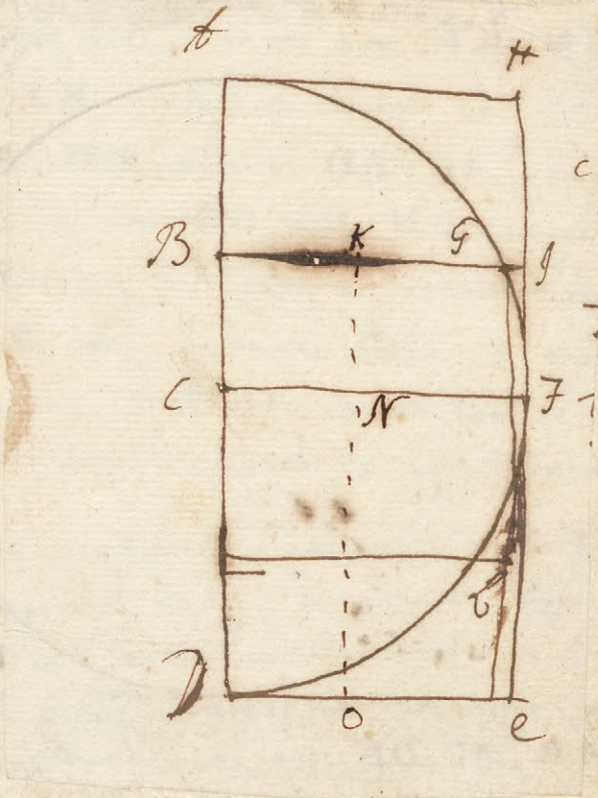
Soluzione Del Problema.

Dico, che fra BH, BE , che stanno
 come $AB:BD$, il quadrato BC^2 del seno
 sarà il mezzo armonico. Il quadrato CF^2 ,
 ovvero BI^2 sarà il mezzo aritmetico; la
 differenza tra il rettangolo del diametro per
 il raggio, ed il quadrato del seno, cioè $AE - BG^2$,
 cioè la irregolare figura $GBAHEDMLG$
 sarà il mezzo contrarmonico; e finalm^e il
 rettangolo del seno per il raggio sarà il
 mezzo geometrico.

Dimostrazione

Di tutti quattro questi mezzi.

1. Dimostreremo in 1.^o luogo, che $\overline{BG}$, cioè il quadrato del seno è messo proporzionale armonico fra BH , B , che stanno fra loro nella data ragione di $AB:BD$: cioè dimostreremo, che



2/ BH, $\overline{BG}$, BE sono in armonica, propor.
 Per provar ciò, faciasi BK = BA, e con-
 dotta KO parallela a BD. Poichè BI = CD,
 sarà il ret. BH = CD; ed essendo BH = $\overline{BG}$ (a),
 sarà BN diff. di BO, e CO la stessa,
 che quella di $\overline{BG}$, e di BH, cioè di due
 primi termini. Saremo di KE diff. di
 $\overline{BG}$, e di BE, e quella di due ultimi.

(a) Cor. I. p. 8, e p. 17 Lib. VI.

Ora questi due rettangoli, o differenze,
 BN, KE sono come le loro basi BK, KO,
 per aver uguali le altezze KI, BC, cioè
 come AB : BD, o come BH : BE.

Quare BH, $\overline{BG}$, BE sono in armonica
 proporzione; e però il quadrato del
 seno è medio armonico fra BH, BE,
 che sono come AB : BD, come in
 primo luogo si doveva dimostrare.

II. Lasciamo ora a dimostrare il 2.
 punto, cioè che il quadrato del raggio è
 mezzo proporzionale aritmetico fra BH, BE,
 ch' esprimono la ragione data di AB : BD.
 AB, AC, DB sono in aritmetica proporzione,
 poichè AB = al raggio - CB, e BD =
 al raggio + CB; adunque passa la stessa
 diff. CB fra i tre termini

$$\div AB, AC, BD$$

$$\div AB \times AC, \overline{AC}, BD \times AC,$$

Quare saranno in aritmetica proporzione

$$BH, \overline{AC}, BE$$

$$BH, \overline{BI}, BE.$$

Adunque il quadrato del raggio è mezzo
 aritmetico fra BH, BE, che stanno
 come AB : BD; il che il 2. luogo de.

III. Si proverà in terzo luogo, che il
 mezzo contrarmonico fra BH, BE sia la
 diff. AE - $\overline{BG}$, cioè che
 BH, AE - $\overline{BG}$, BE

siano in contrarmonica proporzione.

2 ³

Lo saranno, se il 3.^o sta al pr.^o, come la diff.^a fra il p.^o ed il p.^o, alla diff.^a fra il p.^o ed il 3.^o. Esser dovrebbe adunque

$$BE : BH :: AE - BG - BH : BE - AE + BG$$

Ma così è in fatti, poichè $AE - BH = BE$,

$$BE - AE = -BH \text{ adunque } AE - BG - BH :$$

$$BE - AE + BG :: BE - BG : BG - BH :: BE : BH,$$

come si è dimostrato nel p.^o punto.

Adunque $AE - BG$ è il mezzo contrarmonico

fra BH, BE , che sta come $AB : BD$.

Il che, in 3.^o luogo &c.

IV. Resta da provarsi in quarto, ed ultimo luogo, che il rettangolo del seno per il raggio è il mezzo geometrico fra $BH, BE :: AB : BD$.

Per la 4.^a e 17.^a del VI di Euclide

$$:: AB, BG, BD,$$

adunque moltiplicando tutto pel raggio

$$\text{sarà } :: AB \times CF, BG \times CF, BD \times CF,$$

$$\text{ovvero } :: AH, BG \times CF, BE. \text{ Il che}$$

in 4.^o luogo si doveva dimostrare. Adun-

que fra due termini esprimibili una

qualunque ragione si sono trovati i mezzi

armonico, aritmetico, contrarmonico, e

geometrico. Il che si era proposto

di fare.

Corollarij

I. Essendo $BH, BG, BG \times CF, CF, AE - BG, BE$

arm. geomet. arit. contrarm.

$$AB \times CF, AB \times BD, \sqrt{AB \times BD} \times CF, CF, \sqrt{CF} - AB \times BD, BD \times CF,$$

se si farà $AB = a, BD = b$, ed il raggio $CF = \frac{a+b}{2} = r$, sarà

$$ar, ab, r \times \sqrt{ab}, r^2, \sqrt{r^2 - ab}, br.$$

I due termini dunque a, b si sono moltiplicati ^{separatamente} pel raggio, il che era necessario per poter aver il mezzo armonico uguale al quadrato del seno di quel cerchio, pel

cui raggio si sono moltiplicati gli estremi.

II. Prendendo gli estremi co' soli merzi armonico, ed aritmetico, si avrebbe ar, ab, r^2 , br, cioè essendo $\div a, r, b$, i due primi de' quattro termini ar, ab sarebbero il primo a moltiplicato pel secondo r, e pel terzo b; ed i due altri termini r^2 , br sarebbero il secondo r moltiplicato similmente per il secondo, e per il terzo; e per tanto $ar : ab :: r^2 : br$, cioè sarebbe una proporzione geometrica discreta, i cui merzi sono il mezzo armonico ab, e l'aritmetico r^2 fra i due termini della ragione data moltiplicati pel raggio.

III. Chiameremo a, r, b la forma della proporzione $ar : ab :: r^2 : br$; e la formola ne sarà la moltiplica del primo termine per il secondo, e terzo della forma; e poi del secondo pel 1.^o e 3.^o della stessa formola

$$\begin{array}{c} a, r, b \\ axr, axb, rxr, rxb \\ ar, ab, r^2, br \end{array}$$

IV. Se volessi pertanto ridurre la ragione $1:3$ a proporzione geometrica discreta, ne trovari il mezzo aritmetico 2 per aver la forma

$$1, 2, 3; \text{ poi farei } 1 \times 2, 1 \times 3, 2 \times 2, 2 \times 3$$

$2, 3, 4, 6$
e della ragion tripla $1:3$, ovvero $2:6$, sarebbe 3 il mezzo armonico, e 4 il mezzo aritmetico; e la ragione $1:3$ ovvero $2:6$ sarebbe ridotta alla proporzione geometrica discreta $2:3 :: 4:6$.

V. Se volessi ridur a dritta la ragione $1:3$ a proporzione geometrica discreta senza cambiarla

cambiarla in $2:6$, farei cui, dividerei per
 2 tutti i termini $2:3::4:6$, ed avrei
 $1:\frac{3}{2}::2:3$, $\frac{3}{2}$ sarebbe il mezzo armo-
 nico fra 1, 3. Ma dovendosi far sparir
 le frazioni, si ritornerebbe a $2:3::4:6$.

VI. È chiaro per la formola, che il
 mezzo aritmetico dev'esser il quadrato del
 termine mezzo della forma $\div a, r, b:$
 e che il mezzo armonico è il prodotto
 degli estremi ab .

VII. Se fossero dati due numeri, il cui
 mezzo aritmetico fosse una frazione, si fareà
 essa svanire, moltiplicando tutti tre i ter-
 mini della forma pel divisore del mezzo
 aritmetico di essa: p. 2. dati.

$$\begin{array}{c} 1, 2 \\ 1, \frac{3}{2}, 2 \text{ si fa} \\ 2, 3, 4 \text{ indi} \\ 2 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 3, 3 \times 4 \\ 6 : 8 :: 9 : 12. \end{array}$$

Vero è per altro, che si potrebbe a drittura
 adoperare per forma

$$\begin{array}{c} 1, \frac{3}{2}, 2 \\ 1 \times \frac{3}{2}, 1 \times 2, \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \times 2 \\ \frac{3}{2} : 2 :: \frac{9}{4} : 3 \end{array}$$

Ma è altresì vero, che volendo ora far spa-
 rire le frazioni, moltiplicando tutto per 4,
 si avrebbe $3 \times 2 : 2 \times 4 :: 9 : 3 \times 4$
 $6 : 8 :: 9 : 12.$

Ancor qui si vede, che il mezzo aritmetico
 9 della proporzione geometrica descritta è
 il quadrato del medio aritmetico della forma
 ridotta, ed il mezzo aritmetico 6 è il prodotto
 degli estremi 2×4 di essa.

VIII. Se si avesse una proporzione geo-
 metrica descritta $2:3::4:6$ nata dalla forma 1, 2, 3

per la solita formola, sicchè 3 forse il
mezzo armonico, e 4 il mezzo aritmetico,
e si volesse aggiungervi il mezzo contrarmonico,
basta esprimere co' numeri il valore di
esso $2r^2 - ab$, e sarà $2 \times 4 - 1 \times 3 = 8 - 3 = 5$.
Basterebbe ancora per trovarlo moltiplicar
il 1.^o termine della forma pel secondo,
ed al prodotto aggiungervi il terzo, così
 $ar + b$, ovvero $1 \times 1 + 3 = 5$, quantor però
la diff.^a nella forma sia = 1
Ma se fra i termini della forma vi cor-
resse la diff.^a 2: come 1, 3, 5, da cui
nasce la proporzione geometrica discreta
3:5::9:15, bisognerebbe al prodotto ar
aggiungervi il doppio del terzo, così $ar + 2 \times b$,
cioè $1 \times 3 + 2 \times 5$, ovvero $3 + 10 = 13$: 3, 5, 9, 13, 15.
Se la diff.^a fra i termini della forma
fosse 3, come 1, 4, 7, da cui viene
4:7::16:28, converrebbe unire al prodotto
altr il triplo del terzo: così $1 \times 4 + 3 \times 7 = 4 + 21$
 $= 25$ &c. E general.^{te} posta la diff.^a nella
forma = d , sarà sempre il mezzo contrar-
monico = $ar + mb$, cioè equal al prodotto de'
due primi termini più il terzo moltiplicato
per la differenza m .

IX. Perchè i primi due termini della
proporzione geometrica discreta vengono dal
prodotto del primo termine per i due ultimi
della forma, di cui il terzo termine è il
secondo più la diff.^a de' due primi (XX. l'emo.)
Se dunque sarà data una propor.^{te} geometrica
discreta $12:15::16:20$, e si voglia far
cognita la forma, d'onde ella sia nata,
basterà ritrovar la massima comun differenza
3 de' due primi, e per essa divider il primo 12,
ed al quoziente 4 aggiunger la diff.^a 1 de' due
primi 3, 4, e si avrà la forma 3, 4, 5 produ-
cente quella proporzione.

X. Perché $a+b=nr$ (XX. Preno.), sarà
 $a+bxr=nr^2$, levato di comune $-ab$, risulta
 $ar-ab+br=nr^2-ab$ = al mezzo contrarmonico (Cor. I.);
 dunque si troverà questo mezzo, se nella propor-
 zione $ar:ab::r^2:br$ si sottr dall'ultimo ter-
 mine br la differenza fra i due primi, ch'è,
 $ab-ar$. Ovvero, ch'è più immediato al problema
 dalla somma del primo ed ultimo $ar+br$ si sottr
 il secondo, o mezzo armonico ab ; giacchè in
 ogni caso risulta $br-ab+ar=nr^2-ab$ = al
 mezzo contrarmonico. Così nella proporzione
 $2:3::4:6$, $6-3=3$; ovvero $2+6-3=5$.
 E nell'altra $6:8::9:12$, $12-6=6$; oppure $6+12-8=10$.

XI. Si osservi che arrivati ad una forma
 $n, 3, 4$ si possono trovare tutti i mezzi,
 moltiplicando questi tre termini della forma
 per la loro differenza: così

$$\begin{array}{ccc} n & 3 & 4 \\ 1 \times n & 1 \times 3 & 1 \times 4 \end{array}$$

e poi fra gli estremi della forma moltiplicati per il mezzo
 $n \times 3 \quad 3 \times 4$
 $6 \quad 12$

si trovano i mezzi, aggiugnendo que' prodotti,
 così $6, 6+n, 6+3, 6+4, 12$
 $6, 8, 9, 10, 12$

Sebbene non ve n'è bisogno, poichè per ve-
 rificare questo Corollario basta ricorrere al
 Prop.^o, pure chi ne volesse la immediata
 dimostrazione algebrica: eccola.

$$\begin{array}{ccccccc} n & 4 & & & & & \\ n, 3, 4 & & & & & & \\ a, r, b & & & & & & \\ a, a+d, a+nd & & & & & & \\ ar, ab, r^2, nr^2-ab, br & & & & & & \\ a \times a+d, a \times a+nd, a+d^2, r \times a+d - a \times a+nd, a+d \times a+nd & & & & & & \\ a^2+ad, a^2+rad, a^2+rad+d^2, na^2+4ad+nd^2, a^2+3ad+nd^2 & & & & & & \\ & & & & & & -a^2-rad \\ a^2+ad, a^2+rad, a^2+rad+d^2, a^2+rad+nd^2, a^2+3ad+nd^2 & & & & & & \\ a^2+ad, a^2+ad, a^2+ad & & & & & & +ad+d^2, a^2+ad \\ a=n & 1 \times n & 1 \times 3 & 1 \times 4 & & & \\ d=1 & & & & & & \end{array}$$

2x3

6, 6+2, 6+3, 6+4, 12

6, 8, 9, 10, 12

XII. Si possono ancor trovar tutti i meri di una ragione, espressa per frazioni

$$\sqrt{\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}} \quad \sqrt{\frac{3}{4}} \quad \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$1 \times \frac{3}{4}, 1 \times \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \times \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$\frac{3}{4} : \frac{1}{2} :: \frac{9}{16} : \frac{3}{8}$

si levino le frazioni, moltiplicando per 16

12 : 8 :: 9 : 6

Parimenti $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{1}{3}$

$\frac{1}{2} \times \frac{5}{12}, \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}, \frac{5}{12} \times \frac{5}{12}, \frac{5}{12} \times \frac{1}{3}$

$\frac{5}{24} : \frac{1}{6} :: \frac{25}{144} : \frac{5}{36}$

30 : 24 :: 25 : 20

Il contrarmonico si trova come ne' precedenti.

XIII. Quanto il mero armonico è minore del quadrato, ch'è il mero aritmetico, altrettanto è di questo maggiore il mero contrarmonico. La sola ispezione de' termini ar, ab, r², ar²-ab, br bastanem^{te} lo manifesta.

1, 8
1, 4½, 8
2, 9, 16

2x9, 2x16, 9x9, 9x16

18, 32, 81, 2x81-32, 144
ar²-ab

18, 32, 81, 130, 144

9x9=81 medio aritmetico

81-49=32 medio armonico

81+49=130 medio contrarmonico.

1. 2. 3.	2. 3. 4. 5. 6	5=4+1
2. 3. 4	6. 8. 9. 10. 12	10=9+1
3. 4. 5	12. 15. 16. 17. 20	17=16+1
4. 5. 6	20. 24. 25. 26. 30	26=25+1
5. 6. 7	30. 35. 36. 37. 42	37=36+1

XIV. In ognuna di queste proporzioni
così trovate co' loro meri determinati, p. 6.

2, 3, 4, 5, 6 si scorgono tutte queste cose:

2, 3, 4, 5, 6 ragion tripla, (nel nostro caso) con
tutti i suoi meri determinati

2, 3, 6 proporzione armonica

2, 4, 6 proporzione aritmetica

2, 5, 6 proporzione contrarmonica

2:3::4:6 propor. geometrica discreta

2:3::5:6 propor. aritmetica discreta.

3, 4 centro della geometrica discreta.

[Faint, illegible handwriting throughout the page, likely bleed-through from the reverse side. The text appears to be a list or series of entries, possibly related to a botanical or scientific study.]



[Faint, mostly illegible handwritten text in Italian, likely a historical document or manuscript.]



C
L
a
u
n
m
a
C
a
A
g
r
le
o
o
i
co
h
s
e
C
a
f
C
ch
e
p
f
n



Si vuol osservare, che in tutte le operazioni indicate di sopra per trovare i mezzi armonico, aritm.^{co}, contrar.^{co} fra due numeri indicanti una data ragione, p. e. $1:2$, non solo non si è alterata la ragione, trovando i mezzi fra 6, e 12, ma nemmeno se ne sono alterati i termini. Loichè siano le due quantità AB, CD : esse restano le stesse, sebbene concepisca la AB divisa in 6 parti, e la CD in 12 delle medesime parti. AB, CD sono ancora le stesse di prima. Il mezzo armonico 6 indica, che il mezzo aritm.^{co} fra 1, 2 contiene 6 di quelle parti, nelle quali si son divise AB, CD ; il mezzo aritm.^{co} ne contiene 9; ed il contrar.^{co} 10.

E chi non vede, che $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$ danno le stesse ragioni, che $\frac{6}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{12}$, ovvero che $1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$.

Ma $\frac{4}{3}$ è mezzo armon.^{co} fra 1, 2; $\frac{5}{3}$ è il suo mezzo contrar.^{co}. Ora riducendo a comun denominatore $1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{3} \cdot 2$, si ha $\frac{18}{18} \cdot \frac{24}{18} \cdot \frac{27}{18} \cdot \frac{30}{18} \cdot \frac{36}{18}$, le quali ragioni stanno come gli antecedenti $18 \cdot 24 \cdot 27 \cdot 30 \cdot 36$; e dividendo per 3, come $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$. Solo in questa ultima espressione si sottintende, che tutti i numeri $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$ sono altrettante sette parti dell'unità.

Altro esempio.

Siano $AB=2$; $CD=3$. Chi impedisce, che AB non si concepisca divisa in 10 parti, e per conseguenza CD in 30 delle stesse parti? Di queste tali parti il mezzo aritm.^{co} fra 2, 3 ne contiene 24; il mezzo aritm.^{co} ne conta 25; ed il contrar.^{co} ne comprende 26.

Se $AB = 2$ ne contiene 20, dunque l'unità
ne conta 10; e però il mezzo armonico
contiene 24 ¹⁰ dell'unità; il mezzo aritm^{co} 25;
ed il contrar^{io} 26.

Adunque in queste operazioni non solo si
trovano i mezzi della data ragione, ma
ancora fra i dati termini, i quali altro
non si fa, che concepirli divisi in quel
numero di parti, che viene indicato dallo

stessa operazione: cioè avremo 2:3,
lo abbiain ridotto 4:6; dunque abbiain
diviso le due unità del 2 ciascuna in
due parti; ma posto 4.5.6, abbiain
moltiplicato il 4x5 &c; dunque ciascuna
unità del 4 l'abbiain divisa in 5 parti.

Dunque ciascuna unità del 2 è restata
divisa in 10 parti; e 2:3 è divenuto 20:30,
delle quali decime dell'unità i mezzi aritm^{co}, arit^{co}, e
contrar^{io} ne contengono 24, 25, 26.

Così nella dupla da 5:2 passando a
2:4, l'unità si è divisa in 2 parti; ma
nel dire 2x3 ciascuna di queste parti si è
presa 3 volte; dunque l'unità si è di-
visa in 6 parti.

Cioè quanto nelle operazioni si moltiplica
l'uno, in altrettanti parti bisogna per ne-
cessità concepirlo diviso; e così non ne resta
punto alterata la quantità, e si hanno i
mezzi non solo della data ragione, ma an-
cora fra i dati termini; perchè si viene
a togliere tor via con la divisione la moltip-
licazione introdotta nei termini con la
moltiplicazione.

Per ridur la cosa a formola generale
siano i dati termini a e $a+nd$.

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 4 \times 5 \cdot 4 \times 6 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 \times 6 \\ 20 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 26 \cdot 30 \end{array}$$

$$2 \cdot \frac{24}{10} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{26}{10} \cdot 3$$

2

$$\begin{array}{r} 1 \quad 2 \\ 2 \quad 4 \\ 2 \quad 3 \quad 4 \end{array}$$

$$2 \times 3 \cdot 2 \times 4 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 4$$

$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12$$

Si ponga

13
8

Si ponga il mezzo aritmetico $a+d$, così
 $a \cdot a+d \cdot a+d \cdot a+d$, e si facciano le solite
 operazioni.

$$\begin{array}{ccccccc}
 a \times a+d & \cdot a \times a+d & \cdot a+d & \cdot a+d & - a^2 - rad & \cdot a+d \times a+d & \\
 aa+ad & \cdot aa+rad & \cdot aa+rad+d^2 & \cdot aa+4ad+add & \cdot aa+rad+ad+rad & & \\
 & & -aa-rad & & & & \\
 aa+ad & \cdot aa+rad & \cdot aa+rad+d^2 & \cdot aa+rad+add & \cdot aa+3ad+add & & \\
 \text{differ.} & ad & d^2 & d^2 & ad & &
 \end{array}$$

La quale diff^a apparisce, che il mezzo aritmetico è sempre un quadrato;
 il mezzo armonico è minore, il contrar^{io}

maggiore del mezzo aritmetico quando
 vale del quadrato della differenza

Ma se poi si volessero trovare precisamente
 i merri fra i due termini dati, bisognerebbe
 distinguere due casi; cioè 1.^o quando fra
 i termini dati passa differenza dispari, come

fra 1, 2; 1, 4; 2, 5; 3, 8 &c. 2.^o

Quando si passa diff^a pari, come fra 1, 3; 2, 4 &c.
 Nel 1.^o caso bisogna dividere i termini
 della sopraposta formola per $4A+4D$;
 poichè si viene a fare $a = 2A$; $d = 2D$,
 onde passando da $1 \cdot 1 \frac{1}{2} \cdot 2$ a $2 \cdot 3 \cdot 4$,
 si raddoppia il 1.^o ed il 2.^o termine dato,
 per lo che il lor prodotto è quadruplo di quello
 sarebbe senza questa mutazione. Dunque
 bisogna dividere il prodotto del primo per
 il secondo cioè $a \times a+d$ pel quadruplo del
 secondo $A+D$, e resterà il primo; e si
 avrà questa formola generale.

$$\frac{aa+ad}{4A+4D} \cdot \frac{aa+rad}{4A+4D} \cdot \frac{aa+rad+d^2}{4A+4D} \cdot \frac{aa+rad+add}{4A+4D} \cdot \frac{aa+3ad+add}{4A+4D}$$

Ma nel caso, in cui le differenze son pari,
 bisogna dividere i termini della formola per
 $a+d$.

$$\frac{aa+ad}{a+d} \cdot \frac{aa+rad}{a+d} \cdot \frac{aa+rad+dd}{a+d} \cdot \frac{aa+rad+add}{a+d} \cdot \frac{aa+3ad+add}{a+d}$$

La ragione di questa divisione per $a+d$ in questo secondo caso si è, perchè si moltiplica a divitura il primo a per il secondo $a+d$; onde per aver il primo a , basta divider quel prodotto $aa+rad$ per il secondo $a+d$.

In tutti due i casi il numeratore del mezzo aritmetico è sempre un quadrato; il num.^o del mezzo armonico è sempre minore, ed il numeratore del mezzo contrarmonico è sempre maggiore del mezzo aritmetico quanto vale il quadrato della differenza.

Vicchè il numeratore del mezzo armonico è sempre la differenza di due quadrati, ed il numeratore del contrarmonico è la somma di due quadrati.

$$\begin{array}{r} 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \\ a \cdot r \cdot b \\ \frac{ar}{r} \cdot \frac{ab}{r} \cdot \frac{rr}{r} \cdot \frac{rrr-ab}{r} \cdot \frac{br}{r} \\ a \cdot \frac{ab}{r} \cdot r \cdot \frac{rrr-ab}{r} \cdot 6 \\ \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{2} \\ 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ \frac{6}{3} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{9}{3} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{12}{3} \\ 2 \cdot \frac{8}{3} \cdot 3 \cdot \frac{10}{3} \cdot 4 \end{array}$$

Da questa in cui la diff.^a fra il primo, e terzo è pari, il mezzo aritm.^o è un numero intero, ed è quello terzo della forma, e nel primo esempio, 3 nel secondo.

$$1 \cdot 2 \quad 1 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$2 \cdot 4 \quad R$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4$$

$$\frac{6}{4R} \cdot \frac{8}{4 \times 1\frac{1}{2}} \cdot \frac{9}{6} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{12}{6}$$

$$2 \cdot 3 \quad 2 \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 3$$

$$4 \cdot 6 \quad R$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$\frac{20}{4R} \cdot \frac{24}{4 \times 5} \cdot \frac{25}{10} \cdot \frac{26}{10} \cdot \frac{30}{10}$$

In queste, in cui la 2^{da} fra il primo,
e terzo termine è dispari, il mezzo arit-
metico è una frazione col divisore 2,
ed è quella stessa frazione, che sarebbe
mezzo aritm.^{co} della forma prima
di farne sparire la frazione.

16

Osservazioni sulle ragioni co' loro
mezzi armonico, aritmetico, e
contrarmonico.

I. Si prendano tutti i suddetti mezzi
fra i numeri alternativamente presi della
serie aritmetica, cioè fra 1. 2; fra 2. 4; 3. 5 &c.

a . b	a . r . b	ar . ab . rr . rrr - ab . rb	
1 . 3	1 . 2 . 3	2 3 4 5 6	:: 1:3
2 . 4	2 . 3 . 4	6 8 9 10 12	:: 1:2
3 . 5	3 . 4 . 5	12 15 16 17 20	:: 3:5
4 . 6	4 . 5 . 6	20 24 25 26 30	:: 2:3
5 . 7	5 . 6 . 7	30 35 36 37 42	:: 5:7
6 . 8	6 . 7 . 8	42 48 49 50 56	:: 3:4
7 . 9	7 . 8 . 9	56 63 64 65 72	:: 7:9
8 . 10	8 . 9 . 10	72 80 81 82 90	:: 4:5
9 . 11	9 . 10 . 11	90 99 100 101 110	:: 9:11
10 . 12	10 . 11 . 12	110 120 121 122 132	:: 5:6

Si osservi, che in queste proporzioni
vi sono ancora quelle de' numeri consecutivi 1:2;
2:3; 3:4; 4:5; 5:6 &c.

Giacchè adunque nelle proporzioni de-
dotte dai numeri alternativa^{le} presi, vi
son comprese ancor quelle de' numeri
consecutivi, parleremo delle sole prime,
cioè di quelle dedotte dai numeri alter-
nativi.

In esse proporzioni tutti i mezzi arit-
metici sono i quadrati 4 . 9 . 16 . 25 . 36 &c.;
i mezzi armonici sono i quadrati inversi
men l'unità, cioè sono 3 . 8 . 15 . 24 .
35 &c., ed i mezzi contrarmonici sono
uno di più de' quadrati medesimi, cioè
de' mezzi aritmetici, cioè sono 5 . 10 . 17 . 26 . 37 &c.

La prima

La prima colonna va crescendo con l'ordine de' numeri pari 4. 6. 8. 10, e l'ultima 6. 8. 10. 12.

Le medie, cioè la seconda, terza, quarta colonna crescono de' numeri catti 5. 7. 9. 11. &c.

Se si andassero scemando collo stesso ordine, tutte le colonne, avremmo una proporzione anteriore 0. 0. 1. 2. 2, in cui fra 0. 2 il mezzo armonico sarebbe 0, il mezzo aritmetico sarebbe 1, ed il contrarmonico 2.

Sicché il primo fra tutti i mezzi armonici sarebbe zero, cioè uguale al mezzo aritmetico - 1.

Il primo fra tutti i mezzi aritmetici sarebbe 1, ch'è un quadrato, come tutti gli altri mezzi aritmetici, ed è il primo di tutti i quadrati.

Il primo fra tutti i mezzi ~~contrarmonici~~ sarebbe 2, ch'è uguale al mezzo aritmetico + 1.

Né si può andare più innanzi, perché dal 0 della prima colonna non v'è altro numero pari minor del due, che si possa sottrarre.

II. Abbiamo osservato finora le proporzioni dedotte dai numeri, fra i quali passa differenza 2, onde trovavane il mezzo aritmetico, regna fra i termini la diff.^a 1; con 1. 2. 3; 2. 3. 4 &c.

Osserviamo ora quelle proporzioni, che stanno fra due numeri, fra i quali

18

trovato il mezzo aritmetico regni la
diff. 2.

0 . 4	0 . 2 . 4	0 . 0 . 4 . 8 . 8
a . 6	a . r . b	ar . ab . rr . rrr - ab . br
1 . 5	1 . 3 . 5	3 . 5 . 9 . 13 . 15
2 . 6	2 . 4 . 6	8 . 12 . 16 . 20 . 24
3 . 7	3 . 5 . 7	15 . 21 . 25 . 29 . 35
4 . 8	4 . 6 . 8	24 . 32 . 36 . 40 . 48
5 . 9	5 . 7 . 9	35 . 45 . 49 . 53 . 63

In queste proporzioni si osserva,
che i mezzi aritmetici sono ancor qui
quadrati, il mezzo armonico e' minore,
il contrarmonico e' mag. del mezzo arit-
metico quanto vale il quadrato della
differenza 2 della forma a . r . b.

Si osserva in oltre, che la prima,
ed ultima colonna contiene i mezzi ar-
monici delle proporzioni del n.º I, ma
la prima colonna principia dal 3,
e la seconda dal 15, cioè due mezzi
dopo.

Valendo coll'ordine de' numeri im-
puri in tutte cinque le colonne, si trova
4 il primo mezzo aritmetico; $4 - 4 = 0$
primo armonico; $4 + 4 = 8$ primo mezzo
contrarmonico.

Ecco ancor qui il primo mezzo armonico = 0

III. Si osservino ora le ragioni fra que'
numeri, fra i quali trovato il mezzo
aritmetico regni fra i termini della
forma la diff. 3.

0 . 6	0 . 3 . 6	0 . 0 . 9 . 18 . 18
2 . 6	2 . 1 . 6	2 . 1 . 6 . 12 . 12
1 . 7	1 . 4 . 7	4 . 7 . 16 . 25 . 25
2 . 8	2 . 5 . 8	10 . 16 . 25 . 34 . 40
3 . 9	3 . 6 . 9	18 . 27 . 36 . 45 . 54
4 . 10	4 . 7 . 10	28 . 40 . 49 . 58 . 70
5 . 11	5 . 8 . 11	40 . 55 . 64 . 73 . 88

Ancor in queste proporzioni i merzi
aritmetici son quadrati; il mezzo armonico
è minore, il contrarmonico è maggiore del
mezzo aritmetico quanto vale, il quadrato
della differenza 3 della forma $a : r : b$
1 . 4 . 7

La prima colonna cresce così

6 . 8 . 10 . 12 . La ultima
12 . 14 . 16 . 18

3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9, cioè le
lor diff. sono come i numeri naturali,
ma la prima principia dal 6, la ultima
dal 12, lasciandone fuori 2, cioè 8 . 10 .

Le tre colonne di mezzo crescono come
come i numeri impari, principiano dal 9.

Se si sale coll'ordine memò, si ha una
proporzione superiore 0 . 0 . 9 . 18 . 18.

IV. Merzi aritmetici quadrati; diff.
fra l'armonico, l'aritmetico, e contrarm.
uqual al quadrato della differenza 4 de'
termini della forma.

Salendo si arriva a 0 . 0 . 16 . 32 . 32

Primo mezzo armonico ancor qui = 0.

La prima colonna è fatta dei merzi
armonici delle proporzioni n.º II.

0 . 8	0 . 4 . 8	0 . 0 . 16 . 32 . 32
1 . 9	1 . 5 . 9	5 . 9 . 25 . 41 . 45
2 . 10	2 . 6 . 10	12 . 20 . 32 . 52 . 60
3 . 11	3 . 7 . 11	21 . 33 . 49 . 65 . 77
4 . 12	4 . 8 . 12	32 . 48 . 64 . 80 . 96
5 . 13	5 . 9 . 13	45 . 65 . 81 . 97 . 117

V. Nelle proporzioni del num.^o primo
i numeri esprimenti le ragioni sono

2 . 6 . 12 . 20 . 30 . 42

1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21

Merri armonici pari

6 . 24 . 48 . 80 . 110 .

1 . 3 . 6 . 10 . 15

$$1 + 3 = 4 = 1 + 3$$

$$3 + 6 = 9 = 1 + 3 + 5$$

$$6 + 10 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7$$

$$10 + 15 = 25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$$

Merri armonici dispari

3 . 15 . 35 . 63 . 99 . &c.

Merri aritmetici quadrati

Numeri impari sono la somma de'

termini esprimenti le semplici ragioni

1 . 2 ; 1 . 3 ; 3 . 4 &c.

$$3 = 1 + 2$$

$$5 = 1 + 3$$

$$7 = 3 + 4 \text{ &c.}$$

Nelle proporzioni del numero II

Numeri esprimenti le ragioni dispari

3 . 15 . 35 . 63 . 99 .

Merri aritmetici pari

12 . 32 . 60 . 96

3 . 8 . 15 . 24

Merri armonici dispari

5 . 21 . 45 . 77 &c.

Nelle proporzioni del num.^o III la
prima, ed ultima colonna crescono per

i numeri 6 . 8 . 11 . 12 &c. ; le altre

tre colonne crescono per i numeri im-

pari 9 . 11 . 13 &c.

Merri armonici pari 16 . 40 . 70

8 . 20 . 35

Merri armonici dispari 7 . 27 . 55 &c.

Nelle proporzioni del numero IV,

i numeri della prima ~~ed ultima~~, ed ultima colonna

crescono

crescono per i numeri impari 7. 9. 11 &c;
 ed in quelle del num.^o II per 5. 7. 9. 11 &c.
 Le altre colonne del n.^o IV crescono
 pure per gl' impari 11. 13. 15 &c., come
 nel num.^o II per 7. 9. 11. 13 &c.

Meri armonici pari 10. 48 &c.
 impari 9. 33. 65 &c.

Si vede per tanto, che nella prima,
 ed ultima colonna de' num.ⁱ I. III,
 i termini crescono per pari; le altre
 tre colonne per impari.

Nel n.^o II, e IV tutte le colonne
 crescono per dispari.

VI. Le proporzioni, delle quali abbiamo
 parlato nell' osservazione I, sono contenute
 nella serie aritmetica de' numeri naturali

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.

Ou queste proporzioni far si vogliono
 le seguenti osservazioni.

Tavola I n.^o VII. IV. II.

VII. Gli estremi di queste proporzioni
 sono 2. 6. 12. 20. 30. 42 proporzionali
 a 1. 3. 6. 10. 15. 21, che sono i numeri
 stessi della terza colonna, i quali co-
 munemente si chiamano numeri trian-
 golari, nati per somma dai n.ⁱ naturali.

n.^o IX.

Nascono ancora dai numeri naturali
 nel seguente modo

n.ⁱ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14
 For quad.ⁱ 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. 121. 144. 169. 196.
 $\sqrt{1 \times 1}$. $\sqrt{4 \times 4}$. $\sqrt{9 \times 9}$. $\sqrt{16 \times 16}$. $\sqrt{25 \times 25}$. $\sqrt{36 \times 36}$. $\sqrt{49 \times 49}$. $\sqrt{64 \times 64}$. $\sqrt{81 \times 81}$. &c.
 2. 6. 12. 20. 30. 42. 56. 72.
 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36.

VIII. In ognuna di queste propor= zioni osservarsi quante se ne contengano.

Trovansi per esempio la prima 2. 3. 4. 5. 6

2. 3. 4. 5. 6 Progressione aritmetica in questo solo caso.

2. 3. 6 Propor. armonica

2. 4. 6 Propor. aritme.

2. 5. 6 Prop. contrarim.

2:3::4:6 Prop. geometrica discreta

2:3::5:6 Prop. arit. disc.

3. 4 Centro

N. VIII.

Il centro 3. 4 viene luogo del mezzo geometrico = $\sqrt{12}$; poichè $3 \times 4 = 12$; onde prender si possono 3. 4, come due numeri interi esprimendi il mezzo geometrico radicale.

IX. Le ragioni degli estremi di queste proporzioni 1^a, 3^a, 5^a, 7^a &c. alternat.

N. VI. IV

prese, danno come 1:3; 3:5; 5:7; 7:9 &c.;

e della 2^a, 4^a, 6^a &c. danno come

1:2; 2:3; 3:4 &c., de' pari si prenda la metà, perchè fra 1.3; 3.5 &c. la diff. è = 2; ma fra 1.2; 2.3 la diff. è 1.

X. Si osservi, che nella prima pro= gressione 2. 3. 4. 5. 6 tutti i numeri

N. VII.

sono di seguito, nè ve n'è alcuno di ommesso. Nella seconda 6. 8. 9. 10. 12

manca il 7 fra il primo, ed il secondo;

e l'11 fra il penultimo, e l'ultimo. Nella 3^a due dopo il primo, e due avanti l'ultimo

Nella quarta 3 dopo il primo, e 3 avanti l'ultimo.

In questi numeri

In questi numeri, che si omettono, e
 ch' io chiamo vacui, s'è questa regola
 costante, che la somma de' vacui dopo
 il primo alla somma de' vacui avanti.
 L'ultimo unita questa al mezzo contrar-
 monico regna sempre la ragione medesima,
 che passa fra gli estremi della proporzione
 precedente, onde ancor questi vacui, che
 pajono legati, e disordinati hanno il suo
 legame, ed il suo ordine colle proporzioni.



E v. nella seconda proporzione $7:10+11::1:3::2:6$

Nella terza proporzione $13+14:17+18+19::127:54::1:2::6:12$

Nella quarta $21+22+23:26+27+28+29::66:110::3:5::12:20$

Nella quinta $31+32+33+34:37+38+39+40+41::130:195::2:3::20:30$

e così sempre per serie infinita.

Nella 1^a, 3^a, 5^a &c. si trovano i numeri

1. 3. 5. 7. 9 &c.

Nella 2^a, 4^a, 6^a &c. si trovano 1. 2. 3. 4 &c.

XI. La 1^a colonna, 2. 6. 12 &c. cresce

de' num. pari 4. 6. 8. 10. 12 &c.

La 2^a, 3^a, e 4^a crescono de' numeri

impari 5. 7. 9. 11. 13 &c.

L'ultima colonna cresce de' numeri pari

6. 8. 10. 12. 14 &c.

Con questa osservazione continuer si
 possono quanto un vuole le proporzioni
 con tutti i suoi mezzi armonico, aritm.^{co},
 e contrarmonico.

Tutti i mezzi aritmetici son quadrati

4. 9. 16. 25 &c. Tutti i mezzi armonici

sono gli aritmetici -1 . Tutti i mezzi contrarmonici

sono gli aritmetici $+1$. Cioè tutti

i mezzi armonici son la diff.^a, ed i contrarmonici

son la somma.

7 son la somma di due quadrati, uno de' quali è il mezzo aritmetico, l'altro è il quadrato della diff.^a della forma 1. 2. 3; 1. 3. 4; 3. 4. 5 &c.

XII. Se nella prima colonna presa dal basso all'alto 30. 10. 12. 6. 2 si seguita a scemare i numeri con la stessa legge, sopra il due si trova il zero.

Se nella seconda colonna 35. 14. 15. 8. 3 si seguita a scemare i numeri colla stessa legge degli impari, sopra il 3 si trova il zero.

Nella terza colonna sopra il 4 si trova il 1. Nella 4.^a sopra il 5 si trova il 2; e nella 5.^a sopra il 6, si scorge pure il 2.

Adunque 0. 0. 1. 2. 2 è una proporzione fra 0. 2 con tutti i merzi: 0 aritm.^{co}; 2 contrar.^{co}; ma questa non può nascere, se non dalla forma 0. 1. 2, che però anderà posta sopra alla forma 1. 2. 3; poichè in fatti così le tre colonne delle forme avran i numeri colla stessa legge. E poi

0. 1. 2 0 x 1. 0 x 2. 1 x 1. 1 x 2
0. 0. 1. 2. 2

XIII. I merzi armonici pari

8. 24. 48. 80. 120. 168 ::

1. 3. 6. 10. 15. 21 ::

2. 6. 12. 20. 30. 42

I merzi armonici dispari

3. 15. 35. 63. 99. 143

Merzi aritmetici quadrati

4. 9. 16. 25. 36
1+3. 3+5. 5+7. 7+9. 9+11. 11+13.

Restano dunque

Nascono dunque i numeri quadrati dalla
somma de' numeri triangolari a due
a due presi.

Gli stessi numeri quadrati nascono
ancora dalla somma per ordine de'
numeri impari.

Ed i numeri impari, come abbiamo
osservato di sopra, nascono dalla somma
de' termini delle semplici ragioni prime.

La serie de' numeri pari $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$ cresce,
come la serie de' numeri naturali $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ &
tolti i pari dalla ^{questa} serie, restano gl'impari
 $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11$ &.

XIV. Il mezzo armo.^{co} della prima
proporzione, sta al mezzo aritmetico della
2.^a, cioè $3:9$, come il primo estremo
 2 all'altro estremo 6 della prima
proporzione. Ed il mezzo aritmetico
della prima proporzione, sta al mezzo
armonico della 2.^a, cioè $4:8$, come
il primo estremo 6 all'altro estremo
 12 della seconda proporzione, e così
sempre.

XV. Il mezzo armonico della 1.^a
propor.^{te} sommato col mezzo aritmetico della
seconda dà la stessa somma, che nasce
dal mezzo aritmetico della prima som-
mato col mezzo armonico della seconda,
e così sempre. Ed i prodotti degli
estremi, ovvero de' mezzi danno la se-
guente serie $12 \cdot 72 \cdot 240 \cdot 600 \cdot 1260$.

Il mezzo aritmetico della
prima, 4 sommato separat.^{te}
col mezzo armonico, e contras.^{so}
della seconda, 8, so la sem-
pre la stessa somma, che
nasce dal mezzo aritmetico
9 della seconda col mezzo
armonico, e contras.^{so} $3, 5$
separat.^{te} della prima. Ed

i prodotti degli estremi, ovvero de'
mezzi armo.^{co} ed aritmet.^{co} danno la seguente
serie $12 \cdot 72 \cdot 240 \cdot 600$.

26

Queste due serie delle somme de' mezzi ^{geo.} ^{ed arit.} 12, 14, 40 &c.
e de' prodotti degli estremi, ~~e de' mezzi stessi~~, 12, 72, 240 &c.,
danno 12 : 12 :: 1 : 1

$$14 : 72 :: 1 : 3$$

$$40 : 240 :: 1 : 6$$

$$60 : 600 :: 1 : 10$$

$$84 : 1680 :: 1 : 15$$

$$1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15$$

Inverse di

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \text{dedotte dalla diff.}$$

della numerica serie

$$60 \quad 30 \quad 20 \quad 15 \quad 12 \quad 10$$

$$\text{diff.} \quad 30 \quad 10 \quad 5 \quad 3 \quad 2$$

$$\text{che danno } 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15}$$

Adunque dedotte dalla serie

$$\text{armonica } 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \text{&c.}$$

$$60 \quad 30 \quad 20 \quad 15 \quad 12 \quad 10$$

Si noti, che nella colonna 4 · 12 · 24 · 40 &c.
il p.^o termine 4, ch'è solitario, e non
ha rapporto ad altro termine, deve
intendersi non già prodotto di 2×2 ,
ma dalla somma de' termini $1 + 3$ della
ragione ~~trippla~~, ~~abstratta~~, e prima
di tutte le ragioni composte ($1 \cdot 2 \cdot 3$),
la quale $1 : 3$ nasce ^{de} simil. da $1 + 2 = 3$,
la quale $1 : 2$ è la ~~sadupla~~ p.^o di
tutte le semplici ragioni.

XVI. Abbiamo osservato, che il pro-
dotto de' due mezzi armonico, ed arit-
metico è uguale al prodotto degli estremi.
I due mezzi per tanto armonico, ed
aritmetico hanno il prodotto uguale al
quadrato del mezzo geometrico, di cui
essi mezzi armonico, ed aritmetico fan le parti.
Per questo appunto chiamiamo essi mezzi

armonico

armonico, ed aritmetico 3.4; 8.9 & centro della proporzione.

XVII. La somma poi del mezzo armonico, e contrarmonico equivale al doppio del mezzo aritm^{co}, e perciò alla somma degli estremi

XVIII. In ogni proporzione co' mezzi armonico, ed aritmetico, se raddoppio il primo, e l'ultimo termine, e sommo i due mezzi armonico, ed aritmetico; indi moltiplico fra loro gli estremi, e quadrato il medio, trovo il quadrato del medio differente di un'unità dal prodotto degli estremi. Chiamar si potrà questo medio 7; 17 medio geometrico incompleto fra gli estremi 12.6, 12.24. E la ragione.

$$12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$$

$$4 \quad 7 \quad 12$$

$$4 \times 12 = 48 \quad | \quad 7 \times 7 = 49$$

$$6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$$

$$12 \quad 17 \quad 24$$

$$12 \times 24 = 288 \quad | \quad 17 \times 17 = 289$$

4:7 si potrà prender per suduplicata incompleta di 4:12; perchè $4 \times 4 = 16$.
 $7 \times 7 = 49$. 16:48 :: 4:12, adunque il 49 eccede di una sola unità: e però 4.7 sono incomplete radici di 4.12.

Simil^{te} in 5.7.10; avrò 5.7 radici incomplete della tripla 5.10; poichè $5 \times 5 : 7 \times 7 :: 25 : 49$; se fosse :: 25:50 sarebbe ragione giusta. Così pure 7.10 sono radici incomplete di 5.10; poichè $7 \times 7 = 49$, $10 \times 10 = 100$, avrebbe 50:100 la ragione giusta, onde 49:100 non scatta che di un'unità; le radici 5.7 sono mag^{ri} di 7.10 poichè $\frac{25}{49} > \frac{49}{100}$
 25.49 49.100

XIX. I merzi contrarmonici sono la somma di due quadrati, o i loro moltiplici. I merzi armonici sono la differenza di due quadrati, cioè del mezzo aritmetico, e della diff.

| | | | | | | |
|-----|-----|------|-------|-------|-------|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 |
| 1+4 | 4+9 | 9+16 | 16+25 | 25+36 | 36+49 | |
| 5 | 13 | 25 | 41 | 61 | | |
| 10 | 26 | 50 | 82 | 122 | | |

Teorema *

XX. Qualunque proporzione g. d. si risolve come in suo principio nella continua, formato dalla ragione del 1.^o al 3.^o termine della propo^{te} g. d. E qualunque proporzione continua si risolve nella sua discreta.

1.^o Sia $a : b :: c : d$; questo si risolverà nella continua $:: ab . bc . cd$, che avrà la ragione di $a : c$.

Poichè $a : b :: c : d$, sarà permutando $a : c :: b : d$; Ma $ab : bc :: a : c$; e $bc : cd :: b : d :: a : c$; dunque $ab . bc . cd$ è proporzione continua nella ragione di $a : c$ 1.^o e 3.^o termine della data geom^a dis.

2.^o Sia la continua $:: a, b, c$; si trovi il terzo aritmetico d dopo a, b , onde sia $:: a, b, d$, si faccia $c : d :: b : \frac{bd}{c}$; dico esser $a : \frac{bd}{c} :: b : d$.

Ue così è, dev'esser $ad = b \times \frac{bd}{c}$; e diviso tutto per d , sarebbe $a = \frac{bb}{c}$; ma così è per esser $:: a, b, c$. Dunque & Dunque $\frac{bd}{c}$ è il mezzo armonico fra a, d ; e b ne è il mezzo aritmetico pel supposto; onde il contrarmonico si troverà per i metodi precedenti.

Poichè

poichè $\therefore a, b, \frac{bb}{a} = c$

$\therefore a, b, a+nb-na = nb-a = d$

Sarà per tanto $a \cdot \frac{bd}{c} \cdot d$ in propor-

zione armonica; poichè $a:d :: \frac{bd}{c} - a : d - \frac{bd}{c}$

$a : nb-a :: b \times nb-a-a : nb-a-b \times nb-a$

$a : nb-a :: nabb-aab-abb : nb^3-abb-nabb+aab$
 $abb-aab \quad nb^3-3abb+aab$

Dividarsi il 3° e 4° termine per $bb-ab$

Sarà $a \cdot nb-a :: a : nb-a$

Esempio

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$

$2 \times 3 \cdot 3 \times 4 \cdot 4 \times 6$

$6 \cdot 12 \cdot 24$

$2 \cdot 4 \cdot 8$

Facciasi $2 \cdot 4 \cdot 6$

E poi $8 : 6 :: 4 : 3$

Sarà $2 : 3 :: 4 : 6$

$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

$6 \cdot 12 \cdot 24$

$1 \cdot 2 \cdot 4$

$1 \cdot 2 \cdot 3$

$4 : 3 :: 2 : \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

$1 : \frac{3}{2} :: 2 : 3$

$2 : 3 :: 4 : 6$

Il ridurre ogni disorta a continua

è comune ancora a quelle proporz.

geometriche disorte, che non hanno

i mezzi determinati, come risulta dal Teorema

$$1 : 2 :: 3 : 6$$

$$1 \times 2 \cdot 2 \times 3 \cdot 3 \times 6$$

$$2 \cdot 6 \cdot 18$$

$$1 \cdot 3 \cdot 9$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5$$

$$9 : 5 :: 3 : \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$1 : 5 :: 3 : 5$$

$$3 : 5 :: 15 : 15$$

Ma nel mutarsi la continua in
discotta, ritorna ai mezzi determinati.

Quindi si vede, che non è indifferente
secondo questo rispetto il prender l'
un per l'altro de' due rapporti, cioè
il primo termine al 2.^o, come il secondo
al 4.^o; ovvero il 2.^o al 3.^o, come il
3.^o al 4.^o. Ciò è bensì indifferente a'
Geometri, poichè essi altro non asse-
riscono, se non ciò ch'è più che vero:
cioè che se quattro grandezze sono
proporzionali, permutando restano pro-
porzionali.

È chiaro, che nella precedente ope-
razione, quando io moltiplico i ter-
mini della geom. disc. $2 : 3 :: 4 : 6$
a due a due, così

$$2 \times 3 \cdot 3 \times 4 \cdot 4 \times 6$$

$$6 \cdot 12 \cdot 24$$

$$1 \cdot 2 \cdot 4$$

mi allontanano dal 1.^o e 4.^o termine
della geom. disc.

$$1 \times 2 \cdot 2 \times 2 \cdot 2 \times 3$$

$$2 \quad 4 \quad 6$$

$$1 \quad 2 \quad 3$$

quanto il 4 è mag-

quando il 4 è mag.^o del 3.

Ritornero adunque, ove io era, se in
vece di 1. 2. 4, dirò 1. 2. 3; ed
in tal caso altro non manca, che il
secondo termine della geome. disc.

Per ritornare fo $4:3::2:\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$,

e pongo questo per secondo termine: così

1. $\frac{3}{2}$. 2. 3, levo la fraz.^o,

2. 3. 4. 6

perchè così facendo, fra gli estremi

1. 3 dati ritrovo i mezzi in ragione
semplice, come lo sono nella g. d.

Che poi il centro debba esser in sem-
plice, è chiaro; perchè il secondo ter-
mine è $= 1 \times 3$; ed il 3.^o è 2×2 .

Il centro della dupla dev'esser in sem-
plice :: 8:9, perchè il secondo
termine è $= 2 \times 4$, il 3.^o $= 3 \times 3$

Si conserva adunque, così querando, la
proporzione del centro, e degli estremi.

Da qui dipende l'insegnamento di
Platone, che data la dupla 1. 2. 4;
essa dupla, che andrebbe in infinito,
viene limitata, e ridotta a certa legge
dalla tripla g. d., diminuendo il
4 in semplice, e riportando questa
semplice nel mezzo.

Che questa sia la vera legge di queste
proporzioni, cioè di levar uno dal 3.^o
proporzionale geometrico, si proverà così.

| | si sottr. resta | quadrato |
|---------------------|-----------------|----------|
| Dupla 1+2+4=7 | 6 | ✓ |
| Semplice 4+6+9=19 | 18 | 3 |
| Semplice 9+12+16=37 | 36 | 6 |
| | | 1+3=4 |
| | | 3+6=9 |

desquid^a $16 + 20 + 25 = 61$ 60 10 $10 + 6 = 16$
lesquis^d $25 + 30 + 36 = 91$ 90 15 $10 + 15 = 25$

Ritornano dunque i quadrati al loro principio primo con la sottrazione dell' unita', e si ritornano in virtu' della ragione, a cui e' ridotta la proporzione continua con la sottr. dell' unita';

perche' da 1. 2. 4 sottratti l' unita' dal 3.^o termine continuo, resta 1. 2. 3, i di cui estremi 1:3:6:18. Da 4. 6. 9 sottratti l' unita' dal 3.^o termine conti-
nuo 4. 6. 8, i cui estremi 4:8::18:36 &c.

Dunque il rapporto essenziale della tripla g. d. e' la dupla; della dupla g. d. e' la sesquialtera, cioe' il rapporto del p.^o al 3.^o termine.

Questo giro, e legame circolare di ragioni, e proporzioni si combini con cio', che above si e' proposto, e piez-
gato della formazion de' quadrati, non colle loro radici, ma con le ragio-
ni in serie inversa delle armoniche, differenze. E si combini con quanto si e' detto delle applicazioni delle ragio-
ni, e proporzioni al cerchio: si vedra' qual sia la scienza delle ragioni, e proporzioni.

3 . 4 . 5
 $3 \times 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \times 4 \cdot 4 \times 5$
12 . 15 . 16 . 20
 $12 \times 15 \cdot 15 \times 16 \cdot 16 \times 20$
180 . 240 . 320
18 . 24 . 32
9 . 12 . 16 desquis^d
9 . 12 . 15
 $16 : 15 :: 12 : \frac{180}{16} = 11 \frac{4}{16} = 11 \frac{1}{4}$
 $9 : 11 \frac{1}{4} :: 12 : 15$
 $36 : 45 :: 48 : 60$
 $12 : 15 :: 16 : 20$
3 . 4 . 5

4 . 5 . 6
 $4 \times 5 \cdot 4 \times 6 \cdot 5 \times 5 \cdot 5 \times 6$
20 . 24 . 25 . 30
 $20 \times 24 \cdot 24 \times 25 \cdot 25 \times 30$

| | | | | |
|----------------|-------------------|-------------------|---------------------|-----------------------|
| 1 · 2 · 4 | 4 · 6 · 9 | 9 · 12 · 16 | 16 · 20 · 25 | 25 · 30 · 36 |
| 1 · 1½ · 2 · 3 | 4 · 5½ · 6 · 8 | 9 · 11¼ · 12 · 15 | 16 · 19½ · 20 · 24 | 25 · 29⅔ · 30 · 36 |
| 2 · 3 · 4 · 6 | 12 · 16 · 18 · 24 | 36 · 45 · 48 · 60 | 80 · 96 · 100 · 120 | 150 · 175 · 180 · 210 |
| | 6 · 8 · 9 · 12 | 12 · 15 · 16 · 20 | 20 · 24 · 25 · 30 | 30 · 35 · 36 · 42 |

| 1 | 2 | 4 | 6 | 9 | 12 | 16 | 20 | 25 | 30 | 36 |
|-------|----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| Dupla | | | | | | | | | | |
| | 1½ | | | | | | | | | |
| | ½ | | | | | | | | | |
| | ½ | | | | | | | | | |
| | | 4 | | | | | | | | |

Riducendo la continua geometrica a continua aritmetica, in ogni continua si passa dalla geometrica continua alla geometrica discreta nello stesso modo, che abbiain usato nelle cinque sovrapposte

$$1 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1 \times 3 \cdot 1 \times 5 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 5$$

$$3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15$$

$$3 \times 5 \cdot 5 \times 9 \cdot 9 \times 15$$

$$15 \cdot 45 \cdot 135$$

$$1 \cdot 3 \cdot 9$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5$$

$$9 : 5 :: 3 : \frac{15}{9} = 1\frac{2}{3}$$

$$1 \cdot 1\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 5$$

$$3 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 15$$

$$1 \cdot 3 \cdot 5$$

$$1 \cdot 4 \cdot 7$$

$$1 \times 4 \cdot 1 \times 7 \cdot 4 \times 4 \cdot 4 \times 7$$

$$4 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 28$$

$$4 \times 7 \cdot 7 \times 16 \cdot 16 \times 28$$

$$28 \cdot 112 \cdot 448$$

$$1 \cdot 4 \cdot 16$$

$$1 \cdot 4 \cdot 7$$

$$16:7 :: 4:\frac{28}{16} = 1\frac{3}{4}$$

$$1:1\frac{3}{4} :: 4:7$$

$$4:7 :: 16:28$$

$$1 \cdot 4 \cdot 7$$

data una discreta geometrica

$1:3 :: 4:12$ questa si riduce a continua nello stesso modo

$$1 \times 3 \cdot 3 \times 4 \cdot 4 \times 12$$

$$3 \cdot 12 \cdot 48$$

$$1 \cdot 4 \cdot 16$$

$$1 \cdot 4 \cdot 7$$

E questa continua si riduce a discreta
coi mezzi determinati nello stesso modo

$$16:7 :: 4:\frac{12}{16} = 1\frac{12}{16} = 1\frac{3}{4}$$

$$1:1\frac{3}{4} :: 4:7$$

$$4:7 :: 16:28$$

XXI. Abbiamo detto nella osservazione **XIII** cosa intendiamo per

mezzo geometrico razionale incompleto: $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 \cdot 10$

come 7 fra 5-10, onde si abbia 5-7-10.

E 5:7 sia in radduplicata di 5:10,

o sia 5:7 si possan prender per radici incomplete di 5:10. Ora osserviamo,

che queste radici incomplete si accordano sempre più alle complete con la querezione qui accanto esposta: cioè sommando il 1.^o termine col 2.^o, ed il 2.^o col 3.^o, il mezzo geometrico razionale incompleto sempre più si accorda al mezzo geometrico completo, ma irrazionale, cioè non esprimibile per numero.

XXII. Posta la ragione sesquialtera, per aver le sue radici, si raddoppi $2 \cdot 3$ in $4 \cdot 6$ per porvi il mezzo aritmetico 5; onde si abbia $4 \cdot 5 \cdot 6$. Si sommino i

termini $4+5=9$; $5+6=11$; $9 \cdot 11$; saranno le radici delle sesquialtera; poiché gl'impari $9 \cdot 11$ si sciolgano nelle ragioni prime, da cui son fatti, cioè 9 in $4 \cdot 5$; ed 11 in $5 \cdot 6$. $4 \times 5 = 20$; $5 \times 6 = 30$; e $20:30 :: 2:3$; dunque in questo senso $9 \cdot 11$ sono radici della sesquialtera $2 \cdot 3$; perché i componenti di $9 \cdot 11$ moltiplicati fra loro, danno i lor prodotti $:: 2:3$.

Ora fra $9 \cdot 11$ si ponga il mezzo

$$2 \cdot 3$$

$$4 \cdot 6$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$4+5=9 \quad | \quad 5+6=11$$

$$4 \times 5 = 20 \quad | \quad 5 \times 6 = 30$$

$9 \cdot 11$ radici sesquialtere

$$9 \cdot 10 \cdot 11$$

$$9+10=19 \quad | \quad 10+11=21$$

aritmetico 10 ; e si faccia $9 + 10 = 19$,
 $10 + 11 = 21$; $19 \cdot 21$ saranno le radici
 di $9 \cdot 11$. Sotto fra $19 \cdot 21$ il mezzo
 aritmetico 20 , sicchè si abbia $19 \cdot 20 \cdot 21$,
 sommati $19 + 20 = 39$; e $20 + 21 = 41$;
 $39 \cdot 41$ saranno le radici di $19 \cdot 21$; e
 così sempre . La prova è la medesima,
 si vedrà nel cerchio la cosa ancor
 più chiara

$9 \cdot 10 \cdot 11$
 $9 + 10 = 19 \mid 10 + 11 = 21$
 $19 \cdot 21$ radici di radici sesquialtere
 $19 \cdot 20 \cdot 21$
 $19 + 20 = 39 \mid 20 + 21 = 41$
 $39 \cdot 41$ radici di radici di radici
 sesquialtere
 $19 \times 20 = 380$
 $20 \times 21 = 420$
 19
 21
 &

Sia il diametro $AB = 9$; $AF = 11$
 Si faccia $AC = 4$; $AE = 5$
 $CB = 5$; $EF = 6$;
 sarà $CD^2 = CA \times CB = 4 \times 5 = 20$;
 ed $EG^2 = AE \times EF = 5 \times 6 = 30$
 $CD^2 : EG^2 :: 20 : 30 :: 2 : 3$.

$2 \cdot 3$ Sesquialtera
 $9 \cdot 11$ Radici di $2 \cdot 3$
 $19 \cdot 21$ di $9 \cdot 11$
 $39 \cdot 41$ di $19 \cdot 21$
 $79 \cdot 81$ di $39 \cdot 41$.

Adunque $CD : EG :: \sqrt{2} : \sqrt{3}$; Dun-
 que il diametro $AB = 9$; $AF = 11$ divisi
 nelle sue parti $4 \cdot 5$; e $5 \cdot 6$ dan i
 seni che son le radici della ragione
 $2 : 3$.

Così i diametri $13 \cdot 15$ tagliati nelle
 sue parti prime $6 \cdot 7$; $7 \cdot 8$ danno i
 seni CD , EG , che sono le radici della
 ragione $3 \cdot 4$. Queste son radici com-
 plete, non incomplete . Tutto questo
 dipende dalla 8^a , e 17^a Lib. VI di
 Euclide . In questo senso $5 \cdot 7$
 sono vere radici della dupla , perchè
 $2 \times 3 :: 3 \times 4 :: 6 : 12 :: 1 : 2$; oppure
 perchè $2 : 4 :: 1 : 2$ &c.

$5 \cdot 7$ $2 \times 3 : 3 \times 4 :: 6 : 12 :: 1 : 2$
 $11 \cdot 13$ $5 \times 6 : 6 \times 7 :: 30 : 42 :: 5 : 7$
 $2 \cdot 15$ $11 \times 12 : 12 \times 13 :: 132 : 156 :: 11 : 13$
 $47 \cdot 49$ $23 \times 24 : 24 \times 25 :: 552 : 600 :: 23 : 25$
 Ovvero
 $2 \times 3 : 3 \times 4 :: 2 : 4 :: 1 : 2$
 $5 \times 6 : 6 \times 7 :: 5 : 7$
 $11 \times 12 : 12 \times 13 :: 11 : 13$
 $23 \times 24 : 24 \times 25 :: 23 : 25$

XXIII. 5 è composto di 2+3; 7
 è composto di 3+4, i componenti
 di 5, cioè 2+3 sono in ragion sesqui-
 altera; i componenti di 7, cioè 3+4
 sono in ragion sesquiterza. I numeri
 impari 5, e 7 danno le radici della
 dupla, ch'è composta della sesquialtera
 e della sesquiterza, cioè in generale:
 i numeri impari danno le radici delle
 ragioni de' termini, di cui son composti
 essi numeri impari; cioè 5, 7 dan le
 radici della dupla, composta di 2:3,
 e di 3:4. $\sqrt{6}$, $\sqrt{12}$ son le radici
 della dupla 6:12.

$AB = 2$ diametro $AB = 5$
 $BD = 3$

$AC = 3$ diametro $AE = 7$
 $CE = 4$

$\therefore AB, BF, BD$

$2, \sqrt{6}, 3$

$\therefore AC, CG, CE$

$3, \sqrt{12}, 4$

Nella intersezione B del 2 col 3 (che
 formano il 5) nasce il seno $BF =$
 $\sqrt{2 \times 3}$. E nella intersezione ~~D~~ C del
 3 col 4 (che formano il 7), nasce il
 seno $CG = \sqrt{3 \times 4}$. I quali seni BF, CG
 (che sono $\therefore \sqrt{6} : \sqrt{12}$) sono le radici
 de' termini 6:12, termini della dupla.

Sicchè 5, 7 portando il seno a' piaz-
 zi della congiunzione de' lor componenti,
 generano, e producono le radici de' termini della dupla.

Vicchi i numeri 5, 7 dan le radici della dupla 5, 10. Onde 5, 7 indicano la sudduplicato di 5 : 50 ; e però 5 . 7 . 10 indicano tre continue proporzionali geometriche ; e 7 indica il medio proporzionale fra 5, e 10. Non è però medio rigoroso, ma medio numerico varionale incompleto. Perché se fosse medio rigoroso, dovrebbe il prodotto degli estremi 5×10 esser uguale al quadrato 7×7 . Ma 50 non è $= 49$, essendo questi prodotti differenti di un'unità.

Salva però la ragion dupla 5 . 10, si può fare, che il medio incompleto si accosti al completo quanto si vuole.

Ecco la dupla 35 . 70. Raddoppio questi termini, ed ho 70 . 140 dupla. Sommo

i merri $49 + 50 = 99$. Se 99 fosse medio rigoroso sarebbe il quadrato del 10^o al quadrato del 10^o 99 :: il 1^o al 2^o ; e però $9800 = 9801$; il che non è. Ma se prima il medio rigoroso era fra 49, e 50, ora sarà fra 9800, e 9801. Riplico l'operazione, mentr per accostarmi sempre più. Regna ancora la ragion dupla fra 6930, e 13860. Raddoppio questi termini, ed ho ancora la ragione dupla, e sommo i medi

$$\begin{array}{r} 5 \quad 7 \quad 10 \\ 1 \times 1 \\ 7 \quad 10 \\ \hline \end{array}$$

$$35 \cdot 99 \cdot 50 \cdot 70$$

$$70 \quad 99 \quad 140$$

$$\begin{array}{r} 70 \quad 99 \\ 1 \times 1 \\ 70 \quad 99 \\ \hline 4900 \quad 9801 \end{array}$$

$$4900 : 9801 :: 70 : 140 :: 1 : 2$$

$$\begin{array}{r} 70 \quad 99 \quad 140 \\ 1 \times 1 \\ 99 \quad 99 \\ \hline \end{array}$$

$$70 \times 99 \cdot 70 \times 140 \cdot 99 \times 99 \cdot 99 \times 140$$

$$6930 \cdot 9800 \cdot 9801 \cdot 13860$$

Se 19601 fosse rigoroso medio, sarebbe $13860^2 :: 19601^2 ::$ il p.^o al q.^o :: 1 : 2; ed il prodotto degli estremi sarebbe agual a quello de' medi, cioè $384199200 = 384199201$, il che non è. Ma se prima il medio rigoroso era fra 49,50, e poi fra 9800, 9801: ora esso è fra $384199200, 384199201$.

Applicando l'operazione, quando si vuole, si va rapidam.^{te} accostandosi quanto un vuole al medio geometrico rigoroso.

Prescritta la ragione a questo numero, che da essa nasce, o vi si va sempre accostandosi.

Il quadrato del p.^o termine 35 al prodotto dei due medj 49,50 come il primo 35 al q.^o 70. Adunque i due 49, e 50 tengon luogo del medio geometrico rigoroso, e fra essi due sta sempre il vero medio. Lo stesso dicasi degli altri.

Altro esempio

$$AB = 1 \quad \text{Diametro } AD = 3 \\ BD = 2$$

$$AC = 2 \quad \text{Diametro } AE = 5 \\ CE = 3$$

$$BF = \sqrt{AB \times BD} = \sqrt{1 \times 2} = \sqrt{2}$$

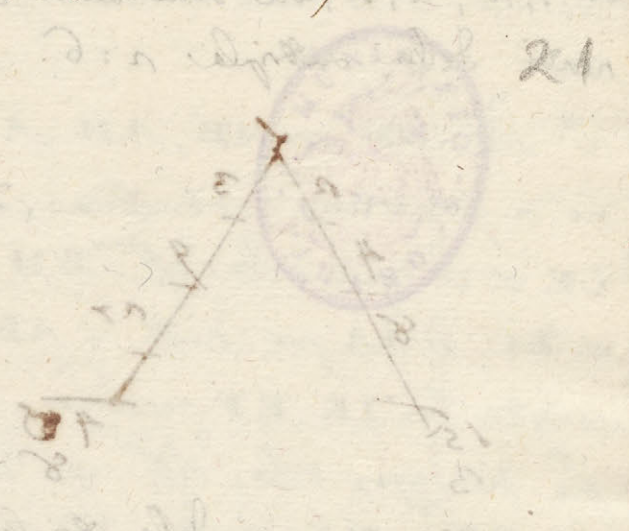
$$CG = \sqrt{AC \times CE} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{6}$$

$$BF : CG :: \sqrt{2} : \sqrt{6}, \text{ radici della}$$

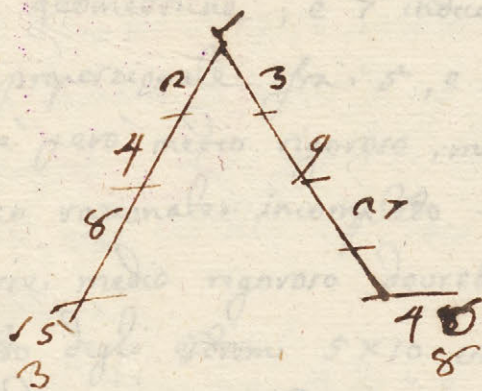
subtripla, nate dai numeri impari 3, e 5

nell' unione.

$$6930 \cdot 9800 \cdot 9801 \cdot 13816 \\ 13860 \cdot 9800 \cdot 19601 \cdot 17720$$



nell'unione B, C de' lor componenti
 $1, 2; 2, 3$, che sono ancor componen-
 ti $1, 2; 2, 3$, che sono ancor compo-
 nenti della subtripla $2:6$.



3 mezzo armonico della tripla

8 mezzo armonico della dupla

$1:2:\infty$

$1:\infty::2-1:\infty-2::1:\infty$

altri merri non si sono fra $1, \infty$
 perchè

Adunque $2:1$, ch'è lo stesso che

$1:\frac{1}{2}$ è la prima di tutte le
 ragioni, e principio di ogni propor-
 zione, e della serie $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ &c.

Problema

XXIV. Determinar in linee i merri
 di armonico, e contrarmonico.

Costruzione.

Siano AB, AC gli estremi dati,
 fra i quali si vuole trovare i merri
 armonico, e contrarmonico. Sarà la
 loro diff.^a CB. A prolunghi AC in
 I, sicchè AI = AB. Si tirì ad
 un angolo qualunque la CE = CB,

e congiunta

e congiunta IE , si divi ad era la paul-
 lela IF . Indi si tagli $BD = BE$,
 e $BG = CF$.

Soluzione

Sarà AD il mezzo armonico, ed AG il
 contraarmonico.

Dimostrazione

Poichè $IA : AC :: EF : FC :: BD : DC$,
 cioè $BA : AC :: AD - AB : AC - AD$;
 dunque AB, AD, AC è proporzione
 armonica, perchè il primo AB sta
 al terzo AC , come BD diff. fra il
 primo, ed il sec.^{do} a DC diff. fra il
 1.^o, ed il 3.^o.

E simil.^{te} $CA : AB :: CF + FE :: CD : DB$

$:: BG : GC :: AG - AB : AC - AG$;

dunque AB, AG, AC sono in contras-
 monica proporzione, perchè il terzo sta
 al primo, come la diff. fra il primo,
 ed il secondo alla diff. fra il 1.^o, ed
 il 3.^o.

Dunque AD è mezzo armonico,
 AG contraarmonico.

Corollario

Quindi può dedursi, che ogni pro-
 porzione geometrica, aritmetica, e
 contraarmonica può risolversi nell'ar-
 monica.

1. Sia $IA : AC$ la prima ragione
 della proposta proporzione geometrica
 ridotta in modo, che sia $IA < AC$;
 la sua seconda ragione potrà essere
 sempre espressa da EF, FC , la cui
 somma sia uguale alla diff. delle gran-
 derze componenti la prima ragione:

sicché



sicchè aggiungendo il 1.^o antecedente EF
al primo AI (= AB), risulta per
Teorema AD mezzo armonico fra AI,
AC.

2.^o Supponiamo che AB, AH, AC siano
in proporzione aritmetica, si ponga
CE = al doppio della diff.^a BH, cioè
= BC, e IA per intero = AB, e
condotte le IE, EF parallele, si ta-
gli dal doppio della diff.^a, cioè da BC,
la BD = EF, risulta AD mezzo
armonico fra AB, AC, come è ma-
nifesto.

3.^o Final.^{te} se AB, AG, AC saranno
in contrarmonica proporzione, sarà
 $AC : AB :: BG : GC$, ed invertendo
 $AB : AC :: CG : BG :: EF : FC :: BD : DC$,
e però $CG = BD$. Dunque se la
diff.^a CG fra il terzo, e il 1.^o si
aggiunga al primo AB, risulta AD
medio armonico fra AB, AC.

Se col diametro CI si descriva
il cerchio IMC, e si tirì la AM
perpendicolare ad IC fino che incontrì
la circonferenza; avremo ancora il
medio geometrico AM fra i dati estremi.

43
23
Data la tripla geometrica discreta
con i tre meri determinati 1. 3. 4. 5. 6,
nei cinque termini non v'è numero ozio-
so, perchè i due estremi, ed i tre
meri essendo essenzialmente necessarj alla
forma della proporzione, e la nume-
razione procedendo uguale per differenza
1, è impossibile dimostrativa^{te} in questa
proporzione vi sia luogo all'aggiunta
di un sesto termine, o alla sottrazione di
uno de' cinque, o a qualunque frazione,
che vi si voglia interporre.

Lui s'incomincia a aprire la
impossibilità delle frazioni in questo
sistema di aritmetica; giacchè nell'
esempio della tripla, la quale dal
n.º 1 fino al n.º 6 empie i gradi
della numerazione per differenza uguale
con termini tutti necessarj; la cosa
è sì evidente, che quando si dimos-
tri la stessa necessità in tutte le
proporzioni geometriche discrete della
serie, di cui la tripla qui proposta
è la prima, resta piena^{te} dimostrata
la impossibilità delle frazioni in quel

Dopo l'Osservazione X

44

sistema di aritmetica, che Platone
chiama L'aritmetica de' Filosofi.

Ma non può qui l'autore omette-
re una riflessione opportuna. Nell'arite-
metica comune non solam^e hanno, e
devono aver luogo le frazioni, ma,
in oltre, le sue materiali operazioni
più difficili, e principali versano sulle
frazioni, cosicchè per chi studia i
principj dell'arte, la massima fatica
consiste nello studio delle frazioni.

Come va la faccenda? L'aritmetica
comune, che abbracciando col n^o intero
tutte le possibili frazioni, si estende
a tanto mag^{gi}or confini del solo n^o in-
tero, si chiama da Platone Arime-
tica volgare; e quell'aritmetica,
ch'è ristretta al solo numero intero si
chiama, la chiama aritmetica de' Fi-
losofi.

Qui non v'è importanza, nè mi-
sero. Il testo di Platone su questo pro-
posito è ad litteram. Il testo stesso
è sopra un'arte la più cognita, ed usuale.

Sarà mai possibile, che Platone,
abbia senza fondamento avanzato una
tale proposizione in faccia non solo di
tanti Filosofi

145
24
tanti Filosofi; ma ancora di tanti
Atti, che con l'arte stessa potevan con-
vincerlo del contrario?

Qui non v'è mezzo. O Platone fu
un visionario, anzi un pazzo, o nell'e-
strema semplicità del numero, qual'è
per se stesso, senza le fazioni, vi è
veramente quel divino, che gli ha attribuito
Platone.

La riflessione conduce più di quello
che s'opone, perchè in tutto discorso rifonda
la pazzia, che in caso dubbioso non
può attribuirsi a Platone, su chiunque
disdegna di voler esaminare con l'estremo
della serietà, e dell'impegno come vada
questa faccenda.

Proseguendo la spiegazione dell'esempio
della dupla g. d. 6. 8. 9. 10. 12,
ch'è la seconda propor. di questa se-
rie; qui nell'aritmetica numerazione
da 6. 12 si trovano due vacui, cioè
fra 6. 8, e fra 10. 12, fra i quali
ci stanno 7. 11. Se questi vi s'inter-
pongano per la numerazione non sa-
pendosi, che abbiano a fare colla pro-
porzione, rimangono oziosi.

Nella terza proporzione 12. 15. 16. 17. 20,
fra 12. 15 vi sono due gradi vacui, o
due numeri oziosi 13. 14, fra 16. 20

e 18. 19. fra 17. 20. Nella quarta
proporzione 20. 24. 25. 26. 30, vi
sono due vacui, il primo fra 20. 24,
in cui mancano 21. 22. 23, l'altro
fra 26. 30, in cui mancano 27. 28. 29.

Raccontano azzardi que' numeri ma
non lo sono, sono anzi tutti necessari,
non già per quella proporzione, da cui
sono rinchiusi, ma per il legame della
stessa proporzione con le precedenti, e conse-
guenti, e per la relazione individuale
delle somme rispettive de' termini delle
propor. ^{qui}, e di tutti que' numeri, che
riempiono i vacui delle rispettive
proporzioni.

Sono necessari essenziali per quella
serie, e natura di ragioni, che for-
mano per se stessi, la quale costi-
tuisce di fatto la scientifica nozione
della contrarmonica natura di quan-
tita', di cui nella scienza comune si
ha idea materiale del nome, e def-
finizione, ma niuna formale della
sua intima essenza, e della
importantissima sua significazione.

Per ciò non dee recar meraviglia,

se le dimostratore

25

se le dimostrative scienze comuni, prive
affatto della scienza della sottrattiva
natura: mendace, e confuse affatto nella
scienza dell' armonica natura, si tro-
vano nella impossibilità di arrivare alla
cognizione del vero sistema universale,
e di superare le tante difficoltà, che
arrestano il loro progresso, e di decidere
le tante questioni, che tortolano per se-
coli, variando su fatti sperimentali, che
si veggono cogli occhi, e si toccano colle
mani, pure rimangono ancora indecise.

Mancando la vera scienza delle
due nature armonica, e contrarmo-
nica, la sola scienza comune delle
due quantità aritmetica, e geometrica
è insufficiente a tanto bisogno.

Se si fosse inteso il numero nel
suo vero senso, si avrebbe necessariamente
intesa l'armonica, e contrarmonica natura.

Ma ben lontani i dotti dal considerarlo
capace di tanto, non che dall' intendere,
lo hanno anzi dispregiato, ed abbandonato
quasi cosa poco degna dell' attenzione
di un intelletto sublime.

Ora bene si venga al fatto. La prima

(48)

proporzioni, che amette vacuo di numeri,
è la dupla geometrica descritta 6. 6. 9. 10. 12.

In questa ritrovandosi mancanti
nell' aritmetica numerazione 7: 11, si
si suppongano, e posto da una parte 7,
e sommato dall' altra parte 11 col mezzo
contrat.^{do} 10, si ha 21. Quindi nasce
la forma tripla 7: 21:: 1: 3.

Nella susseguente proporzione 12. 15. 16. 17. 18.
si sommino i due mancanti fra 12,
e 15, cioè $13+14=27$, e si sommino
18-19 col contrat.^{do} 17. Si avrà $17+18+19$
 $=54$, si avrà la forma dupla 27: 54:: 1: 2.

Così per ordine di serie nella
sesquialtera geom. d. 20. 24. 25. 26. 30,
sommati $21+22+23=66$, e sommati $26+$
 $27+28+29=110$, si avrà la forma
supertripariente.^{da} 66: 110:: 3: 5.

Nella supertripariente.^{da} g. d. 30. 35. 36. 37. 42,
sommati i quattro $31+32+33+34=130$,
e sommati gli altri 4 col termine con-
trat.^{do} $37+38+39+40+41=195$, quindi
la forma sesquialtera in 130: 195:: 2: 3.

segue

La aggiungerò ~~all'~~ ^{alla} ¹ ^{serie} ^{di} ^{numerazione} ^{aritm.} ^{XI}

prima delle parole: ~~ultimaria~~ ^{contrarmonica} adunque

26

Il merro contrarmonico adunque
è quello, che ne' numeri separati dalla
forma della propor. ^{ne} ^{anteriore} ^{anteriore}, di-
mostra in fatti la serie universale delle
ragioni formate dai numeri impari, e
pari. Dimostra in fatti contenersi nella
dupla g. d. la tripla forma della pro-
porzione anteriore; nella terza 12. 15. 16. 17. 20,
la dupla, forma della propor. ^{ne} ^{anteriore} ^{anteriore};
nella quarta 20. 24. 25. 26. 30 la ragione
di 3:5 forma della proporzione ante-
riore, e così sempre, dimostra in fatto la
impossibilità delle frazioni, la quale essendo
evidente ne' numeri, che costituiscono la
forma della proporzione, è nello stesso
modo evidente nei numeri, che sono ri-
chiesti fra gli estremi della proporzione,
perchè ancor questi sono obbligati a
determinata serie di ragioni, e proporzioni.

Dimostra final. in fatto non esservi
nell' indefinita aritmetica serie alcun numero
orizz. tanto in rispetto materiale all'
aritmetica numerazione, quanto in ris-
petto formale alle ragioni, e proporzioni.

Fino a qui non v'è bisogno d'altro,
perchè è fatto.

Li sviluppi

ora la dottrina del fatto fin dove si può, e lice. L'rimiera^{te} osservando, che in ciascuna proporzione si trova la forma della proporzione anteriore, si ha debito di osservare qual rapporto, e qual indicazione vi sia in questo fatto.

Nella tripla g. d. 2. 3. 4. 5. 6, ch'è la prima di questa serie non essendovi vacuo di numerazione, rimane solo senza rapporto il mezzo contram^{te} 5; e però in questa proprietà si viderà come un principio primo di unità.

Nella 2^a propor^{te}, ch'è la dupla g. d. 6. 8. 9. 10. 12, si trova ne' numeri separati la forma tripla 7. 11, forma della 1^a propor^{te}, e si trova per somma.

La indicazione creata di somma, si sommino i cinque termini della tripla propor^{te} anteriore $2+3+4+5+6=10$, ed i due termini della forma tripla posteriore $7+11=18$; si ha fra 10. 18 la ragione

5. 7. Continuando per serie L'operat^{te}, si sommino i cinque termini della dupla propor^{te} anteriore $6+8+9+10+12=45$; e si sommino i due termini della forma dupla posteriore $17+54=81$, si avrà fra 45. 81 la ragione di 5. 9.

Sommati i termini della sup^{te} di 5. 9.

proporzione anteriore

proporzione anteriore $12+15+16+17+10=60$,
e si sommino i due della forma superbiarziale
posteriore $66+110=176$, si avrà $60:176::5:11$.

Sommati final: i termini della
seguialtera $10+14+15+16+30=125$,
e sommati i due della forma sequialtera
posteriore $130+195=325$, si avrà $125:325::5:13$.

Adunque si ha la serie delle qui
esposte ragioni: $5:7, 5:9, 5:11, 5:13$,
delle quali sommati i termini, si ha in
risultato la forma dupla $10:40$.

Qui è chiaro, che si trova in realtà
di confronto, e di azione tutto il complesso
del presente sistema.

Perchè vi è il num: in tutta la estensione
materiale della numerazione, vi sono le ragioni,
e proporzioni in tutta la estensione formale
della sedupla serie; vi è il legame delle
ragioni anteriori con le proporzioni posteriori,
che in modo evidentemente circolare si reciproca
in ragioni posteriori con proporzioni anteriori,
e ch'è il legame di serie universale di ragioni,
e proporzioni, qual'è la attribuita dai numeri
pari, ed impari.

Che ne risulta da questo? Risulta
in $5:7$ come principio la ragione dupla
radicale; risulta nella somma $10:40$ la
ragione dupla effettiva; risulta nel ter-
mine o il mezzo primo contrarmonico
delle attuali proporzioni, la misura comune

della serie di quelle ragioni, nelle quali
si risolve tutto il complesso.

Quando alla dupla principio, e fine e
risultato, questa è la conferma di quan-
to si è dimostrato a pag. ed
altrove.

Quando al mezzo contrarmonico s.
principio, e misura comune della
serie, questa ugualmente è una
conferma di quanto si è veduto a
pag. , ed è fondamento di dottrina
di quanto in seguito si vedrà a suo luogo.

Proseguendo poi l'esame del fatto
sa quando succede nella stessa propor-
che rinchiude i numeri suddetti, si tro-
va, che sommando da una parte i
termini della proporzione, senza il
mezzo contrarmonico, e dall'altra il
mezzo contrar.^{co} con i numeri esclu-
si dalla proporzione, risulta la serie
seguente.

Della dupla $6+8+9+12=35$ dei
termini esclusi $7+10+11=28$

Della superbiar.^{ta} $12+15+16+20=63$ dei
termini esclusi $13+14+17+18+19=74$

Della sesquialtera $20+24+25+30=99$
dei termini esclusi $21+22+23+26+27+28+29=176$

Della superbiar.^{ta} $30+35+36+42=143$
dei termini esclusi $31+32+33+34+37+38+39+40+41=325$

ridotte le somme per il ripetuto divisor comune

Esaminata

| | | | |
|----|-----|-------|------------|
| 7 | 35 | : 28 | :: 5 : 4 |
| 9 | 63 | : 51 | :: 7 : 9 |
| 11 | 99 | : 176 | :: 9 : 16 |
| 13 | 143 | : 325 | :: 11 : 25 |

Esaminata questa serie, si trova, ch'è
formata dagli impari per $\frac{1}{2}$ in 5. 7. 9. 11;
e da n. quadrati 4. 9. 16. 25.

Ma trovandosi evidente difettosa dalla
parte dei quadrati, perchè il primo quadrato
è la unità, che qui manca, e la serie
degli impari $\frac{1}{2}$ incominciando dal
termine 5, che certam. non è il primo
della serie. Un tal risultato non pare ori-
ginale, come dovrebbe risultare da tutto
il complesso qui posto in confronto, ed in azione.

Così pare, ma non è così, perchè in
questa operazione non essendo inclusa la
trippla 1. 3. 4. 5. 6 prima propor. di tutto
il complesso, ed avendosi positiva sicurezza,
che dalla parte dei quadrati manca il
termine 1, e dalla parte degli impari il
termine 3. Si ha debito di esaminare se
nella trippla v' siano i due termini sud-
detti, e risultino col metodo della stessa operazione.

Vi sono in fatto, perchè posto da
una parte da se solo il mezzo contram.
5., che in questa propor. non ha termine
vacuo, che gli sia relativo, e dall'altro
sommati gli altri quattro termini della
trippla $1+3+4+5=15$; si ha $15:5::3:1$.

Adunque vi sono in fatto i due termini,
che mancavano alla serie, e questa
è 3. 1, 5. 4, 7. 9, 9. 16, 11. 25.

Ma sommati per colonna i termini della
serie

serie, si risolvono nella tanta volte di-
mostrata ragione $7:11$, cioè di quad.^o
inscritto, e cerchio circoscritto.

Adunque la sistematica operazione, di
tutto il complesso, fondata nel mezzo con-
tra armonico, necessaria, conduce al cerchio.

Ora riflette, e fa riflettere L'Autore
se questa, e le altre operazioni fin qui
esposte, le quali separate dalle altre,
e di fondamento diverso, siano puram.^{te} fon-
date sulle affezioni del num.^o si appor-
tino per prova della verità di questa
scienza, come scienza del cerchio; che
mai si potrebbe opporre in contraria dai
Professori delle Matematiche scienze?
Nella, e poi nulla, perchè le suddette
operazioni essendo fatti, la prova è il
fatto stesso, e contro il fatto non vi è
risposta, né opposizione.

Eppure quanto si è fin' ora esposto,
è il meno di questa scienza, perchè non
si è toccato ancora il punto della scienza,
come armonica; non si è ancor
dimostrata la realtà del numero;
non si sono ancora rivelate le
tre nature dello stesso, del diverso,
e della sostanza —

* Teorema

XX. Qualunque proporzione g. d. si risolve nella continua formata dalla ragione del p.^o termine al terzo della g. d. E qualunque propod. continua si risolve nella sua discotta

1.^a Sia la propod. g. d.

$$ar : ab :: vr : br$$

$$r = \frac{a+b}{2}$$

questa si risolverà nella sua continua moltiplicando tutti i termini a due a due per ordine,

$$\text{così: } ar \times ab \cdot ab \times vr \cdot br \times vr$$

$$aabr \cdot abrr \cdot br^3$$

$$\therefore aa \cdot ar \cdot rr$$

2.^a Questa continua si risolve nella sua discotta prendendo il terzo proporzionale aritmetico dopo i due primi termini di questa continua, così: $\therefore aa \cdot ar \cdot nar - aa$, e poi facendo l'ultimo termine della continua (rr) all'ultimo termine dell'aritmética continua

(aar - aa), così il medio (ar) al

4.^o termine $\frac{naar - a^3}{r}$, e questo

si ponga fra il 3.^o termine, ed il 2.^o dell'aritmética continua, così:

$$a \cdot b$$

$$a \cdot r \cdot b$$

$$ar \cdot ab \cdot vr \cdot rb$$

$$ar \times ab \cdot ab \times vr \cdot vr \times rb$$

$$aabr \cdot abrr \cdot br^3$$

$$\therefore aa \cdot ar \cdot rr$$

$$\therefore aa \cdot ar \cdot nar - aa$$

$$rr : nar - aa :: ar : \frac{naar - a^3}{r}$$

$$= \frac{naar - a^3}{r}$$

$$aa : \frac{naar - a^3}{r} :: ar : nar - aa$$

$$a : \frac{nar - aa}{r} :: r : nr - a$$

$$ar : nar - aa :: rr : rrr - ar$$

$$ar : \frac{naar - a^3}{r} :: rr : \frac{naar - a^3}{r}$$

$$\frac{aa + ab - aa}{4} \quad \frac{aa + nab + bb - aa - ab}{n}$$

$$ar : ab :: rr \quad \frac{ab + bb}{n} = br$$

aa. raar - ab. ar. nar - aa

questa sarà la prima geometrica,
discreta, ar. ab. rr. br. Il che
si voleva provare.

g. 2.

1. 3. 4. 6

$1 \times 3 \cdot 3 \times 4 \cdot 4 \times 6$

6. 12. 24

1. 2. 4

1. 2. 3

$$4 \cdot 3 :: 2 : \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

1. $\frac{3}{2}$. 2. 3

2. 3 :: 4. 6

g. 2.

1. 3. 5

$1 \times 3 \cdot 1 \times 5 \cdot 3 \times 3 \cdot 3 \times 5$

3. 5. 9. 15

$3 \times 5 \cdot 5 \times 9 \cdot 9 \times 15$

15. 45. 225

1. 3. 9

1. 3. 5. 15

1. $\frac{15}{9}$:: 3. 5

9. 15. 27. 45

3. 5. 9. 15.

g. 3.

1. 4. 7

$1 \times 4 \cdot 1 \times 7 \cdot 4 \times 4 \cdot 4 \times 7$

4. 7. 16. 28

$$4 \times 7 \cdot 7 \times 16 \cdot 16 \times 28$$

$$28 \cdot 112 \cdot 448$$

$$14 \cdot 56 \cdot 224$$

$$7 \cdot 28 \cdot 112$$

$$7 \cdot 28 \cdot 49$$

$$112 \cdot 49 :: 28 : \frac{1372}{112}$$

$$7 : \frac{1372}{112} :: 28 \cdot 49$$

$$784 : 1372 :: 3136 : 5488$$

$$112 : 196 :: 448 : 784$$

$$56 : 98 :: 224 : 392$$

$$4 : 7 :: 16 : 28$$

Quindi s'intende l'insegnamento di Platone, che data la dupla $1 \cdot 2 \cdot 4$, essa dupla, che andrebbe in infinito $1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 16$ &c, viene limitata, e ridotta a certa legge dalla tripla $g \cdot d$, diminuendo il 4.^o termine della continua $1 \cdot 2 \cdot 4$ in sesquiterza, e riportando questa sesquiterza al mezzo 2

$$1 \cdot 2 \cdot 4$$

$$1 \cdot 2 \cdot 3$$

$$4 : 3 :: 2 : \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$1 : \frac{3}{2} :: 2 : 3$$

$$2 : 3 :: 4 : 6$$

$$4 \cdot 6 \cdot 9$$

$$4 \cdot 6 \cdot 6$$

$$9 : 8 :: 6 : \frac{48}{9}$$

$$4 : \frac{48}{9} :: 6 : 6$$

$$36 : 48 :: 54 : 72$$

$$18 : 24 :: 27 : 36$$

$$6 : 8 :: 9 : 12$$



In fondo a car. 19.

Finisce tutto nella sedia.

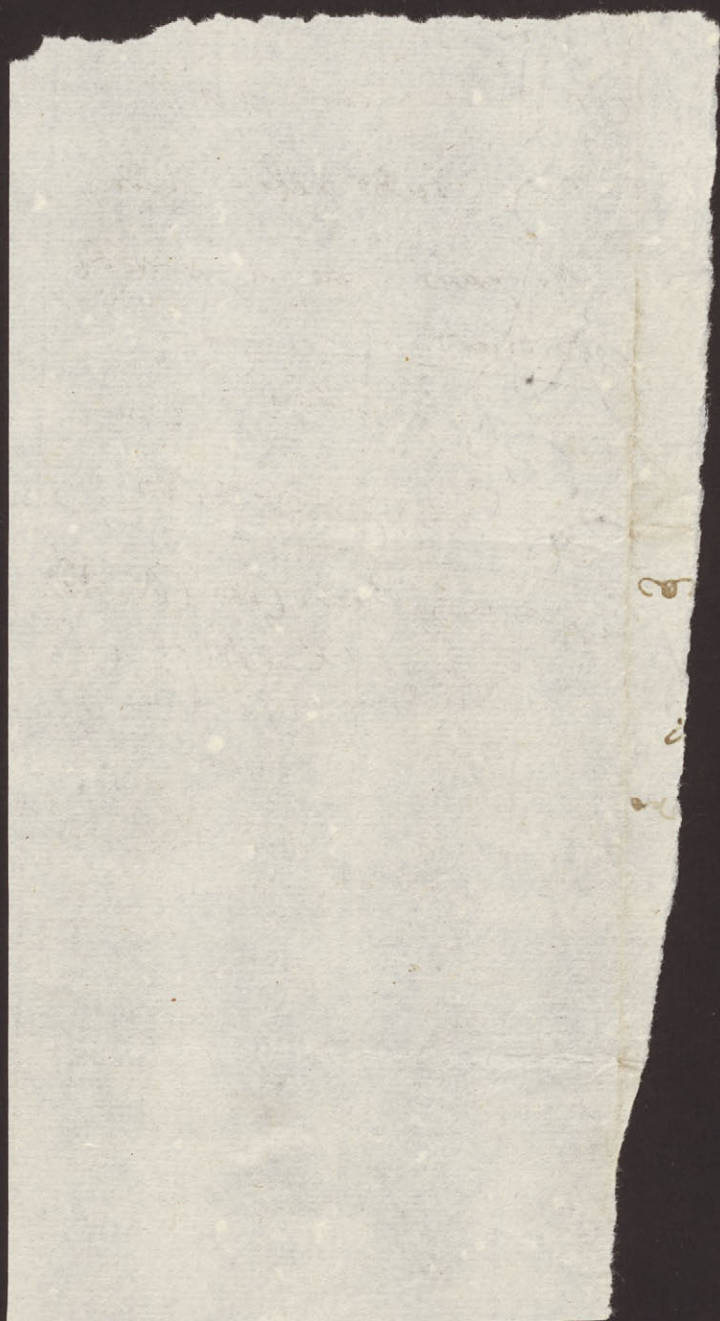
Chi pare, che si potrebbe
continuare

Car. 19 $\frac{1}{2}$ perché

Car. 30 $\frac{1}{2}$ tutto.

Car. 33. Perché ~~CM~~ CA :: V.

CL :: CM :: A :: B



questo non la prima giornata
divisa in 10 ore di lavoro
e alcune pause

7 x 5 = 35
10 x 5 = 50
15 x 5 = 75
20 x 5 = 100
25 x 5 = 125
30 x 5 = 150
35 x 5 = 175
40 x 5 = 200
45 x 5 = 225
50 x 5 = 250

110 x 4 = 440
120 x 4 = 480
130 x 4 = 520
140 x 4 = 560
150 x 4 = 600
160 x 4 = 640
170 x 4 = 680
180 x 4 = 720
190 x 4 = 760
200 x 4 = 800

200 x 3 = 600
210 x 3 = 630
220 x 3 = 660
230 x 3 = 690
240 x 3 = 720
250 x 3 = 750
260 x 3 = 780
270 x 3 = 810
280 x 3 = 840
290 x 3 = 870

La prima giornata di lavoro
è divisa in 10 ore di lavoro
e alcune pause. La seconda
giornata è divisa in 10 ore
di lavoro e alcune pause.
La terza giornata è divisa
in 10 ore di lavoro e alcune
pause. La quarta giornata
è divisa in 10 ore di lavoro
e alcune pause. La quinta
giornata è divisa in 10 ore
di lavoro e alcune pause.



1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.
2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.
3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3.
4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4.
5. 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5.
6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6.
7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7.
8. 8. 8. 8. 8. 8. 8. 8. 8. 8.
9. 9. 9. 9. 9. 9. 9. 9. 9. 9.
10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10.

1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1.
2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.
3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3. 3.
4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4. 4.
5. 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5. 5.
6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6. 6.
7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7. 7.
8. 8. 8. 8. 8. 8. 8. 8. 8. 8.
9. 9. 9. 9. 9. 9. 9. 9. 9. 9.
10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10. 10.

Si vede, che per trovare tutti i
mezzi fra due grandezze p.e. fra 1.3,
basta trovare il mezzo aritmetico $= \frac{1+3}{2} = 2$,
sicchè si abbia 1.2.3. Col raggio 2,
o col diametro $1+3=4$ descrivasi il semi-
cerchio ^{FD} ~~AMB~~, a cui circoscritto il semiqua-
drato $AE = AH \times AD = 2 \times 4 = 8$. Di-
vidasi il diametro in $AB=1$, $BD=3$,
sarà $\overline{BG}^2 = 1 \times 3$ il mezzo armonico, $\overline{BI}^2$
 $= 2 \times 2$ il mezzo aritmetico ~~fra~~ $AB \times CF$,
e $BD \times CF :: AB : BD$. Il contrarmo-
nico poi è ciò che resta, se dal semiqua-
drato AH si leva $\overline{BG}^2$

Fig. J^a Tav. I^a

$$\begin{aligned} & BH \cdot \overline{BG}^2 \cdot \overline{CF}^2 \cdot AE - \overline{BG}^2 \cdot BE \cdot \\ & AB \times CF \cdot AB \times BD \cdot \overline{CF}^2 \cdot AD \times CF - AB \times BD \cdot BD \times CF \\ & 1 \times 2 \cdot 1 \times 3 \cdot 2 \times 2 \cdot 4 \times 2 - 1 \times 3 \cdot 3 \times 2 \\ & 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \end{aligned}$$

Per ridurre la cosa a formola generale

sia $AB=a$, $BD=b$, si trovi il mezzo
aritmetico $\frac{a+b}{2}$, e questo si chiami r ,
perchè dev'esser raggio di cerchio, si avrà

$$a \cdot r \cdot b; \text{ sarà } AB \times CF \cdot AB \times BD \cdot \overline{CF}^2 \cdot 2 \cdot \overline{CF}^2 - AB \times BD \cdot BD \times CF$$

$$ar \cdot ab \cdot rr \cdot 2rr - ab \cdot br$$

sarà ab il mezzo armonico, rr l'arit-
metico, $2rr-ab$ il contrarmo. fra $ar : br :: a : b$.

Il mezzo geometrico sta fra l'arm.^{co},
e l'arit.^{co}, fra ab , rr , cioè nel centro.

Per trovare adunque, il mezzo armo-
nico, basta moltiplicare i due dati est-
remi, e si ha ab ; il quadrato del raggio
 rr è il mezzo aritmetico; il con-
trarmonico è $rrr-ab$. Questa espres-
sione è uguale a quest'altra $\frac{aa+bb}{2}$,
poichè $r = \frac{a+b}{2}$

$$rr = \frac{aa+ab+bb}{4}$$

$$rrr = \frac{aa+ab+bb}{2}$$

$$\begin{aligned} rrr-ab &= \frac{aa+ab+bb}{2} - ab \\ &= \frac{aa+ab+bb-ab}{2} \\ &= \frac{aa+bb}{2} \end{aligned}$$

adunque il mezzo contrarmonico è
uguale alla metà della somma de'
quadrati degli estremi.

Altra formola

$$ar \cdot ab \cdot rr \cdot rrr-ab \cdot br$$

$$a \times \frac{a+b}{2} \cdot ab \cdot \frac{a+b^2}{4} \cdot r \times \frac{a+b^2}{4} - ab \cdot b \times \frac{a+b}{2}$$

$$\frac{aa+ab}{2} \cdot ab \cdot \frac{aa+ab+bb}{4} \cdot \frac{raa+4ab+abb-4ab}{4} \cdot \frac{ab+bb}{2}$$

$$\frac{aa+ab}{2} \cdot ab \cdot \frac{a+b^2}{2} \cdot \frac{aa+bb}{2} \cdot \frac{ab+bb}{2}$$

Coroll.^o

Si prova e con la esperienza,
e con la ragione, che una palla
posta in un angolo C , e giunta
nello stesso tempo da due potenze colle

direzioni

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ ar \cdot ab \cdot rr \cdot rrr-ab \cdot br \\ 3 \times 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \times 4 \cdot 3 \times 5 - 4 \times 5 \\ 12 \cdot 15 \cdot 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ ar \cdot ab \cdot rr \cdot rrr-ab \cdot br \\ 3 \times 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \times 4 \cdot 3 \times 5 - 4 \times 5 \\ 12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 10 \end{array}$$

$$17 = \frac{3^2+5^2}{2} = \frac{9+25}{2} = \frac{34}{2}$$

direzioni AC, BC, le quali linee
stiano in ragione delle potenze;
La palla si muove per la diagonale
CE del rettangolo formato ^{dalle} BC, aC
uguali o proporzionali alle AC, CB, e
tirate colle stesse direzioni.

Ora si rende chiaro per le cose
dette, che se l'angolo C è retto, la
diagonale CE è la radice del doppio del
mezzo contrarmonico della ragione delle
due potenze moventi ridotta a pro-
porzione g. d. nel modo sopra indicato.

Egli è vero per la 47 lib. I Eul., che
 $CE^2 = aa + bb$. Ma, il mezzo con-
trarmonico della ragione a:b ridotto a
propor. g. d. è $\frac{aa+bb}{2}$ per il proced. te.

Cor. Adunque $EC = \sqrt{aa+bb}$ è la
radice del doppio del mezzo contrarmonico
della ragione de' lati ridotta a pro-
porzione g. d.

Che se poi le direzioni delle due
potenze facessero fra loro un angolo o acuto,
o ottuso, allora non è possibile, che
la diagonale descritta dal mobile sia
mezzo contrarmonico fra le potenze;
perchè la diagonale, quando l'angolo

$$6 \cdot a$$

$$2 \cdot 3$$

$$4 \cdot 6$$

$$4 \cdot 5 \cdot 6$$

$$10 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 30$$

$$CE = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$$

$$CE = \sqrt{2 \times 2 + 3 \times 3} = \sqrt{13}$$

$$3 \cdot 4$$

$$6 \cdot 8$$

$$6 \cdot 7 \cdot 8$$

$$42 \cdot 48 \cdot 49 \cdot 50 \cdot 56$$

$$CE = \sqrt{36+64} = \sqrt{100}$$

$$CE = \sqrt{3 \times 3 + 4 \times 4} = \sqrt{25}$$

è ottuso

è ottuso è più piccolo, e quando è acuto è più grande della diagonale, quando l'angolo è retto, salvi gli stessi lati. Ma la diagonale, quando l'angolo è retto, è radice del mezzo contrarmonico; adunque non sono tali le diagonali, quando l'angolo è acuto, o ottuso.

Sarà bensì ancora il quadrato della diagonale descritto dal mobile un mezzo contrarmonico, o il doppio d'erro, ma gli estremi di questo mezzo non saranno più le potenze, o i lati del parallelo, ma la perpendicolare CD, o sia la distanza fra le parallele AC, DE, e la distanza DE dell'angolo retto dall'estremo E della diagonale, i quali estremi della contrarmonica proporzionale variano al variare degli angoli che fanno fra loro le divisioni delle potenze. *

Sempre è però vero si fa per una linea, il cui quadrato è mezzo contrarmonico fra due termini dati, subito ch'è dato l'angolo delle potenze moventi.

Quale sia poi il rapporto fra CD, DE, si trova così: ACB è ang. dato, adunque ACD suo complemento ad un retto è pure noto, e conseguente DAC. Il seno tutto al seno di DAC :: CA : CD. Il seno tutto al seno di DCA :: CA : DA; e per la ragione di AE, lo sarà ancora DE. Dunque DE.

* Se l'ang. fatto dalle potenze è ottuso = ACB, sotto il retto DCB, resterà dato l'angolo ACD; ma D è retto; adunque è dato l'angolo CAD. Perciò faccio come il seno tutto al seno dell'ang. A :: AC : DC
ACD :: AC : AD
E dato dunque DE = AE - AD, adunque è data la ragione di CD : DE.

Evi un'altra specie di proporzione
g. d., che nell'aritmética serie del num.
è avanti gli occhj di tutto il mondo.

Si sono osservate moltissime affezioni
del n.^o, ma neppur una di quelle es-
senziali, che realmente producono scienza.

Si sa benissimo, che data la tripla g. d.
2.3.4.5.6; 3 è il mezzo armonico,
4 l'aritmético, 5 il contraarmonico degli
estremi 2.6.

Ma non si è poi osservata l'indefinita
catena di queste proporzioni, che vi è nel
numero comune, ed è sotto gli occhj.

2.3.4.5.6.8.9.10.12.15.16.17.20.24.25.26.30.35.36.37.42

Senza numero le proprietà essenziali
del numero non osservate. Eccone una:

data la serie de' numeri quadrati 1.4.

9.16.25.36.49.64, e data la

serie delle propor. g. d. 2.3.4.5.6.8.9.12 &c.

si troveranno gli estremi di queste pro-
porzioni, merzi geometrici de' num.ⁱ qua-
drati

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---------|---|---|---|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Prima | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | | | | | | | | | | | |
| Seconda | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 12 | 15 | 16 | 20 | 24 | 25 | 30 | 35 | 36 | 42 |

1.2.4 | 4.6.9 | 9.12.16 | 16.20.25 | 25.30.36.

~~25.30.36~~

Da queste due serie congiunte
procede:

63
Delle proporzioni
Congiunte. 33

procede una serie di propor^{le} g. d.,
in cui sempre il primo termine un
num^o quad^o, ed ultimo termine è sem-
pre lo stesso della propor^{le} g. d. sottop-
posta ai numeri quadrati, ed i meri
sono sempre il primo termine, ed il
mero armonico della sottoposta propor^{le},
ma indeterminati a qualunque natura,
perchè rispetto ai loro estremi non sono
né armonici, né aritmetici, né contrar-
monici; se si eccettui unicam^{te} la,
sola tripla, che in questa serie è
la seconda proporzione, ed è la sola
privilegiata fra tutte, avendo essa
i meri determinati.

| | |
|----------------|----------------|
| 1. 2. 3. 6 | 4. 6. 8. 12 |
| 9. 12. 15. 20 | 16. 20. 24. 30 |
| 25. 30. 35. 42 | |

Perchè 4. 6. 8. 12. essendo in
num^o primi 1. 3. 4. 6, è chiaro, che
3 è mero armonico, e 4 aritmetico
degli estremi 1. 6. Si noti questo pri-
vilegio, e si applichi a ciò, che su questa
proporzione si è fin qui dimostrato del
cerchio, ed a ciò, che si dimostrerà in
appresso.

La forma di queste proporzioni è
composta delle due semplici forme, prime
delle due proporzioni aritm^{ica}, ed armo^{nica},
nel modo seguente: data la prima

| |
|------------|
| 1. 2. 3 |
| 2. 3. 6 |
| 1. 2. 3. 6 |

propor^{le} composta

propor^{te} composta - 1. 2. 3. 6. La
 forma tripla aritm^{ica} 1. 2. 3; e la
 forma armonica 2. 3. 6 la congiungono,
 e risultano gli estremi della la p.
 propor^{te} composta 4. 6. 8. 12, la forma
 tripla aritm^{ica} 2. 3. 4 raddoppiata
 in 4. 6. 8; e la forma aritm^{ica}
 3. 4. 6 raddoppiata in 6. 8. 12, la
 congiungono, e risultano gli estremi tripli.

La congiunzione adunque degli es-
 tremi di questa tale proporzione è in-
 trinsecam^{ente} circolare rispetto ai merzi,
 che congiungono gli estremi. Perché
 p. es. il mezzo 2 aritm^{ico} della
 forma tripla aritm^{ica} 1. 2. 3 si
 converte nell' estremo 2 della tripla
 armonica; e simil^{mente} il mezzo 3 armon^{ico}
 della tripla armonica 6. 3. 2 si con-
 verte nell' estremo 3 della tripla
 aritm^{ica} 1. 2. 3, e così si dica, ed
 intenda della indefinita serie di tali
 proporzioni.

Si osservi il necessario rapporto, e
 legame di queste proporzioni, il di
 cui primo termine è sempre un n^o.
 quadrato con le propor^{zioni} g. d. potè fin
 da principio

2. 3. 4
 4. 6. 8
 6. 8. 12
 4. 6. 8. 12

| | | |
|---------|---------|----------|
| 1. 2. 3 | 2. 3. 4 | 4. 6. 8 |
| 6. 3. 2 | 6. 4. 3 | 12. 8. 6 |



da principio formate dai due merri
armonico, ed aritmetico, il di cui primo
termine è sempre un n.º mezzo geo-
metrico fra due quadrati

| | | | | | |
|-----------------------|---------------|----------------|-------------------|--------------------|--------------------|
| Serie p. ^a | 1. 2. 3. 6 | 4. 6. 8. 12 | 9. 12. 15. 20 | 16. 20. 24. 30 | 25. 30. 35. 42 |
| Serie d. ^a | 2. 3. 4. 6 | 6. 8. 9. 12 | 12. 15. 16. 20 | 20. 25. 24. 30 | 30. 35. 36. 42 |
| Serie congiugata | 1. 2. 3. 4. 6 | 4. 6. 8. 9. 12 | 9. 12. 15. 16. 20 | 16. 20. 24. 25. 30 | 25. 30. 35. 36. 42 |
| di doppio centro | 2. 3 | 3. 4 | | | |

come 2 fra 1. 4, e 6 fra 4. 9. L'es-
tremo mag.^{re} delle due propor.ⁿⁱ fra
loro relative nella serie prima, p.^a, d.^a,
è sempre comune. Dunque queste
proporzioni hanno fra loro necessario
rapporto, e legame.

La p.^a proporzione congiunta spiega
esattamente il testo del Timeo, ove
dice: «ora fatti i gl' intervalli sesqui-
=alberi, sesquiterzi, sesquiquarti; con-
=questi legami ne' primi spazj si adem-
=pirano tutti i sesquiterzi col sesqui-
=ottavo intervallo, lasciando una
=particella, la quale ha i termini
=del n.º al n.º, come 156. 243.

Chè questa proporzione risulti la
particella, che si trova in ragione
di 243. 156, si dimostra

$$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$$

A norma

A norma
fra con

in num
colla

fra

div

Ma p
triplica
operazioni
tanto è
segni in

$$4 \times 8 =$$

$$6 \times 9 =$$

$$8 \times 12 =$$

I prodotti

siano mo

$$16 \times 48$$

$$27 \times 27$$

3 danno

Non bast

della dupl

il termine

12 si bragg

A norma de' segni si moltiplichino

fra loro $4 \times 12 = 48$

$6 \times 9 = 54$

$8 \times 8 = 64$

$48 \cdot 54 \cdot 64$

$124 \cdot 17 \cdot 32$

30.35.42

35.36.42

30.35.36.42

I prodotti $48 \cdot 54 \cdot 64$, che

in numi pari sono $124 \cdot 17 \cdot 32$

colla stessa regola si moltiplichino

fra loro

$124 \times 32 = 768$

$17 \times 17 = 729$

divisi i prodotti p

p

243

Ma perche' tale operazione di moltiplica (proprietà intrinseca di tali operazioni) quanto, e' seconda, altrettanto e' significativa: si operi co' segni in diverso modo applicati.

$4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$

$4 \times 8 = 32$

$6 \times 9 = 54$

$8 \times 12 = 96$

I prodotti in n. di p. $16 \cdot 17 \cdot 48$ siano moltiplicati

$16 \times 48 = 768$

$17 \times 17 = 729$, adunque divisi p

3 danno $256 \cdot 143$

Non basta. Conservando la posizione della dupla g. d. $6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12$

il termine 4 p. estremo moltiplo di

12 si trasporti in 18 ultimo estremo

triplo

triplo di 6, sarà la proporzione congiunta

$$6. 8. 9. 12. 18$$

Li moltiplichi secondo i segni

$$6 \times 18 = 108$$

$$8 \times 12 = 96$$

$$9 \times 9 = 81$$

I prodotti 81. 96. 108 divisi per 3

daranno 27. 32. 36

$$\text{Andi } 27 \times 36 = 972$$

$$32 \times 32 = 1024$$

i quali prodotti divisi per 4, danno
i solidi 243. 256.

Simil^{iter} operando co' segni diversam^{ente}
applicati $6. 8. 9. 12. 18$

$$6 \times 9 = 54$$

$$8 \times 12 = 96$$

$$9 \times 18 = 162$$

I prodotti 54. 96. 162 divisi per 6
daranno 9. 16. 27

$$\text{Ma } 9 \times 27 = 243$$

$$\text{e } 16 \times 16 = 256; \text{ adunque \&c.}$$

La natura circolare, che qui si
rileva nel risultato identici sempre lo
stesso in 243. 256; benchè sia di-
versa la operazione di legame, e la
posizione degli estremi tripli, si tocca
con mano ponendo perpendicolar^{mente} a,
confronto le due proporzioni.

$$4. 6. 8. 9. 12$$

$$6. 8. 9. 12. 18$$

Loichè i tre mezzi 6. 8. 9 della
superiore, essendo rispetto ai tre mezzi
8. 9. 12 della inferiore nella stessa
ragione, ma il p.^o al d.^o come il
d.^o al d.^o, e gli estremi tripli comuni
formando coi propri mezzi le due

$$4:6::12:18$$

$$6:8::6:8$$

$$8:9::8:9$$

$$9:12::6:8$$

proporzioni inversamente

proporzioni inverse: uguali per necessit  della loro forma ne viene, che moltiplicando fra loro in croce i termini della superiore con quelli della inferiore fino ai due di mezzo, nei quali si trova il mezzo comune dei 5 termini, il prodotto sia sempre lo stesso.

E qui la natura circolare si vede cogli occhi, e si tocca colle mani nel suo principio rimotto in genere, che consiste nelle ragioni, e proporzioni, ben diversa dal modo comune maneggiate, ed intese; e nel suo principio prossimo in specie, che consiste negli estremi tripli, riempiti dai due centri di proporzione della tripla $3:4$, della dupla $6:8$, dai quali ha necessario principio, e confine la sestupla estensione della universale consonante armonica $3 \times 4 = 12$; $8 \times 9 = 72$; e $12 \times 72 :: 1:6$.

Perch  poi si abbia una qualche idea sulla operazione qui esposta de' segni della moltiplica, sicche non si creda un gioco di n : que' segni sono d'intrinseca propriet  delle propor. g. d., costituite dai tre mezzi determinati armo., aritm., e contraritm.

Applicati per  que' segni alla tripla g. d., dalla operazione della moltiplica si avr  in prodotto la radice della tripla in propor. g. d., perch  $12 \times 6 = 12$; $3 \times 5 = 15$; $4 \times 4 = 16$; ma dati i tre termini $12 \cdot 15 \cdot 16$, il 4.  propor.   12, e data la forma $3 \cdot 4 \cdot 5$ mezzi della tripla, si ha la solita formola

(69)

| | | |
|--------------------|--------------------|-------------------|
| 4×12 | 6×9 | 36 |
| 6×18 | 8×12 | 96 |
| $4 \times 18 = 72$ | $6 \times 12 = 72$ | $8 \times 9 = 72$ |
| $6 \times 12 = 72$ | $8 \times 9 = 72$ | |

| | |
|--------------------------------------|----------------------------------|
| $12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ | |
| $12 \times 6 = 12$ | $12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 120$ |
| $3 \times 5 = 15$ | 15 |
| $4 \times 4 = 16$ | 160 |
| | 120 |
| | $12 \cdot 40 \cdot 120$ |

| | |
|---|--------------------|
| $3 \cdot 4 \cdot 5$ | |
| $3 \times 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \times 4 \cdot 4 \times 5$ | |
| $12 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 120$ | |
| 6 | 10 |
| 3 | 5 |
| $1 \cdot 2$ | $12 \cdot 3$ |
| $1 \times 12 = 12$ | $12 \times 5 = 60$ |
| | $12:6 :: 1:3$ |

$3 \times 4 \cdot 3 \times 5$

$$3 \times 4 \cdot 3 \times 5 \cdot 4 \times 4 \cdot 4 \times 5$$

12 · 15 · 16 · 20 ; adunque &c.

Ma 3:5 :: 12:20 sono le radici

triples, a cagione de' num. impari 3 diviso

in 1, 2 ; 5 diviso in 1, 3 ; $1 \times 2 = 2$; $1 \times 3 = 3$;

e $2:6 :: 1:3$; adunque &c.

Andi proseguendo la operazione in

12 · 15 · 16 · 17 · 20 si avranno i tre

termini in prodotto 240 · 255 · 256,

de' quali il 4.^o prod. propor. è 272 ; ma data la formola 15 · 16 · 17

merci di 12 · 20 per la formola si ha

$$15 \times 16 \cdot 15 \times 17 \cdot 16 \times 16 \cdot 16 \times 17$$

240 · 255 · 256 · 272 ; adunque &c.

Ma 15:17 :: 240:272 sono le radici

della ragione 7.9 p. i numeri impari

15 diviso in 7, 8 ; 17 diviso in 8, 9.

Parimenti 7, 9 sono le radici della ragione 3.5.

Adunque in questa operaz. si trova un pro-
gresso indefinito della ragione degli estremi alla
radice ne' merzi, e da questi, fatti estremi,
alle loro radici ne' loro merzi.

Questa ch'è operazione indefinita
progressiva dalla circonferenza al centro sa-
rebbe (almeno) un'ottima immagine della facoltà
seminale, e del modo in cui nel frutto si contiene
il seme del seme.

Da tutto ciò s'intende, che Platone nel Timeo
con quel suo detto indica l'anima del Mondo per
mezzo della proporzione congiunta di due
centri 4 · 6 · 8 · 9 · 12 ; ponendo la parte per
il tutto, indica le armoniche proporzioni, e l'
armonico principio impresso nelle cose,
e per tutte diffuso.

Di un'altra invariata
serie di proporzioni:

Lemma

Sia a piacere due num. a, b : dico,
che la loro somma è uguale alla
differenza de' loro quadrati divisa per la
differenza di detti num., cioè $a+b = \frac{bb-aa}{b-a}$

Perchè, invece del mag. n.° b ,
posto il p. n.° più la diff. de' num.,
perchè $b = a+d$, sarà $a+a+d = \frac{a+d^2-aa}{d}$

$$\begin{aligned} a+d &= \frac{aa+rad+dd-aa}{d} \\ &= \frac{rad+dd}{d} \\ &= a+d \end{aligned}$$

Corollario

Se fra i dati numeri vi cortesse
diff., sarebbe

$$a+b = \frac{bb-aa}{b-a} = \frac{bb-aa}{b-a};$$

e perciò $a = \frac{bb-aa}{b-a} - b$;

$$e \quad b = \frac{bb-aa}{b-a} - a$$

Teorema

Dati due numeri, fra i quali siavi
diff.: dico, che se si sommeranno
insieme i due n.° dati, e questa som-
ma si moltiplicherà per i due num.
dati; il prodotto della somma per il
p. dato numero sarà il p. estremo;
ed il prodotto della somma per il se-
condo n.° dato sarà l'altro estremo
di una proporzione aritmetica descritta.

Il primo estremo poi aggiunto al p.
numero dato, sarà il medio armon.

di essa

di essa proporzione, ed il primo estremo
mo stesso aggiunto al 2.^o secondo dato,
ne sarà il terzo contrarm.^{co}

Siano a, b i due numeri
dati: la somma $a+b$ si molti-
plici pel primo, e secondo, ed
ho gli estremi

$$a \times a+b = aa+ab; b \times a+b = ab+bb.$$

Al primo estremo aggiungo a , e poi
 b , ed avrò $aa+ab+a$; $aa+ab+b$,
de' quali il 1.^o sarà terzo armo-
nico, il secondo terzo contrarm.^{co}
fra quegli estremi

Ecco tutta la proporzione

$$aa+ab : aa+ab+a : aa+ab+b : ab+bb$$

Provo in primo luogo, che $aa+ab : aa+ab+a : ab+bb$
sono in proporzione armonica.

Se lo fossero, sarebbe il 1.^o termine
al 2.^o, come la diff.^a fra il 1.^o ed
il 2.^o, alla diff.^a fra il 2.^o ed il
3.^o, cioè $aa+ab : ab+bb :: a : bb-aa-a$

$$a : b :: a : bb-aa-a; \text{adunque sarebbe } b = bb-aa-a$$

Ma così è in fatti pel coroll.^o del
Lemma preced.^{te}; adunque il 1.^o,
secondo, e quarto termine della
propor.^{te} sono in arm.^a proporzio-
ne.

Provo in secondo luogo, che

$$aa-ab : aa+ab+b : ab+bb \text{ sono}$$

in contrarm.^{co}

contrarmonica proporzione.

Se lo fossero, sarebbe il 3.^o al 1.^o,
come la diff.^a fra il 1.^o, ed il 2.^o,
alla diff.^a fra il 2.^o, ed il 3.^o,

cioè $ab+bb : aa+ab :: b : ab+bb-aa-b$

$$b : a :: b : bb-aa-b,$$

adunque sarebbe $a = bb-aa-b$; ma

così è per il Cor.^o del Lemma;

adunque il 1.^o, 3.^o, e 4.^o termine
sarebbero in contrarmonica proporzione

3.^o. È superfluo l'osservare, che

$$aa+ab \cdot aa+ab+a \cdot aa+ab+b \cdot ab+bb$$

è una proporzione aritmetica discritta;
poiché la somma degli estremi è uguale
alla somma de' mezzi

$$\begin{array}{r} aa+ab \\ +ab+bb \end{array} = \begin{array}{r} aa+ab+a \\ aa+ab+b \end{array}$$

$$\begin{array}{r} aa+ab+bb \\ = aa+ab+a+b \\ = aa+ab \\ +aa-a+b; \end{array}$$

$$\text{ma } bb = aa+a+b = aa+a+a+1$$

$$bb = \overline{a+1}^2 = aa+2a+1 = aa+aa+1;$$

adunque la somma degli estremi è =
alla somma de' mezzi; dunque la
propor.^o è arit.^a

In oltre fra il 1.^o, e 2.^o termine $aa+ab \cdot aa+ba+a$

vi è la diff.^a a ; e fra il 3.^o, ed il 4.^o

vi è la diff.^a $ab+bb-aa-b$

cioè $bb-aa-b$, ch'è $= a$,

come si è provato nel Cor. del Lemma.

Adunque se fosse

Adunque se ~~faro~~^{farò} quanto dice il Teor.,
avrò una prop^{le} aritm^a d. col mezzo
aritm^{co}, e col mezzo contraritm^{co}. Il che ~~de~~^è.

Nè può negarsi, che queste, di
cui parliamo non siano proporzioni, seb-
bene moltiplicati fra loro i due merri,
non producano quanto gli estremi, ma
bensì la somma de' merri uguagli la somma
degli estremi. Ciò fa, che siano prop^{le} aritm^a disc.

Eiova osservare in esse 1.^o che gli estremi
di queste prop^{le} 3. 6. 10. 15. 21. 28 &c
convergono in ragione colle aritmetiche disc.

60. 30. 20. 15. 12. 10
30. 15. 10. 5. 3. 2
1. 3. 6. 10. 15

2.^o Le somme degli estremi, e de' merri
sono i precisi numⁱ quadrati 9. 15. 49 &c
de' nⁱ impari 3. 5. 7 &c

3.^o I loro merri sono aritm^{co}, e contraritm^{co},
le quali condizioni ne^l sole, ne^l unite s'in-
contrano in qualunque combinazione di aritm^a
prop^{le} discrete.

In quel modo appunto, che nelle prop^{le} g. d.
con i tre merri determinati si verifica, che
la somma dei tre merri a quella de' due estremi
sta in ragion sesquialtera per serie infinita:
il che si verifica in 5 numⁱ qualunque dell'
aritm^a serie; come pure si verifica, che la
somma di 4 merri alla somma de' due estremi
sta come 4:1::1:1; e se ne prendersi 7, cioè
3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, la somma di 3 merri 5+6+7=18
alla somma di 4 estremi 3+4+8+9=24, cioè 18:24
starebbe come il n^o de' merri al n^o degli estremi;
il ch'è sempre universal^{te} vero.

$$\begin{array}{l} 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 3+4+5 = 12 \\ 1+6 = 8 \\ 12:8::3:2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \\ 8+9+10 = 27 \\ 6+12 = 18 \\ 27:18::3:2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \\ 4+5+6 = 15 \\ 3+7 = 10 \\ 15:10::3:2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \\ 4+5+6+7 = 22 \\ 3+8 = 11 \\ 22:11::4:2::2:1 \end{array}$$

Di un' altra inosservata serie
di proporzioni

Oltre a quanto si è fin qui osservato, ed
esperto di ciò, che si conteneva nell' aritme-
tica serie de' numi: giova qui osservare la
serie seguente di aritmetiche discrete pro-
porzioni co' meri armonico, e contrarmonico:
eccola

3.4.5.6 / 10.12.13.15 / 21.24.25.30 / 36.40.41.45 / 55.60.61.66 / 78.89.85.91 /
105.112.113.120 / 136.144.145.153 &c.

Nascono queste aritm. discrete propor-
da quelle g. d., che hanno i termini
pari, fuorchè il medio aritmetico.

Si ometta questo, e si prenda la metà
de' termini pari, ne risultano queste pro-
por. aritm. disc., nelle quali la som-
ma degli estremi è uguale alla somma
de' meri, e queste somme son tutte
numeri quadrati, quelli appunto, che
sono i meri aritmetici omnesi in

quelle proporzioni, i cui termini pa-
ri si sono dimezzati, e sono i quadrati
de' numi dispari 3.5.7.9.11 &c.

I componenti de' primi estremi
sono i numeri naturali 1.2.3.4.5
e gl' impari 3.5.7.9.11

I componenti degli ultimi estremi sono
i n. naturali 2.3.4.5.6
e gli stessi impari 3.5.7.9.11

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-------|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | Diff. | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 |
| 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | 7 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 12 |
| 20 | 24 | 25 | 26 | 30 | 11 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 23 |
| 42 | 48 | 49 | 50 | 56 | 15 | 21 | 24 | 25 | 28 | 31 | 37 |
| 72 | 80 | 81 | 82 | 90 | 19 | 36 | 40 | 41 | 45 | 49 | 56 |
| 110 | 120 | 121 | 122 | 132 | | 55 | 60 | 61 | 66 | 71 | 80 |

| Estremi | Quadr. | Somme de' quad. |
|------------------|-----------|-----------------|
| 1x3=3; 2x3=6 | 3x3=9 | 3+6=9=4+5 |
| 1x5=10; 3x5=15 | 5x5=25 | 10+15=25=12+13 |
| 3x7=21; 4x7=28 | 7x7=49 | 21+28=49=25+24 |
| 4x9=36; 5x9=45 | 9x9=81 | 36+45=81=40+41 |
| 5x11=55; 6x11=66 | 11x11=121 | 55+66=121=60+61 |

Somme degli estremi

| | |
|-----|-----|
| 3 | 6 |
| 10 | 15 |
| 21 | 28 |
| 36 | 45 |
| 55 | 66 |
| 125 | 160 |
| 25 | 32 |

12x13. 36x16 :: 156: 236 :: 39: 64 :: 11: 18
18. 11

702. 704
351. 352

Le ragioni che passano fra gli estremi
sono le primitive forme di ragione

$$1.2; 1.3; 3.4; 4.5; 5.6$$

La somma de' p. estremi alla somma
degli ultimi, cioè $125:160::15:32$.

$$\text{diviso } 25 \text{ in } 12 \times 13 = 156; \text{ e } 32$$

$$\text{in } 16 \times 16 = 256, \text{ si avrà } 156:256$$

$$:: 39:64$$

Comparati 39.64 alla ragione

$$4.15$$

$$\begin{array}{r} 15 \overline{) 39} \quad 11 \\ 312 \quad 64 \\ 39 \quad 64 \\ \hline 702 \quad 704 \end{array}$$

$$352:352::39:41$$

$$39.41 \text{ radici di } 38.42$$

$$19.21$$

$$\text{radici di } 18.22$$

$$9.23$$

$$\text{radici di } 4.6::1.3$$

Ma ritornando alla serie delle pro-
porzioni, si osserva, che gli estremi

$$0.1::0.1$$

$$3.6::1.2$$

$$10.15::1.3$$

$$21.28::3.4$$

$$36.45::4.5$$

$$55.66::5.6$$

I merri rispettivi di 3.6 sono l'ar-
monico 4, ed il contram. 5; dico.

| | | | |
|----|-------|------|--------|
| di | 10.15 | arm. | contra |
| | 21.28 | 12 | 13 |
| | 36.45 | 14 | 15 |
| | 55.66 | 40 | 41 |
| | | 60 | 61 |

Il legame degli estremi congiungente
queste proporzioni, che sembrano

disgiunte, ma non

disgiunte, ma non lo sono, essendo
 $6 \cdot 10 :: 3 \cdot 5$; $15 \cdot 21 :: 5 \cdot 7$; $28 \cdot 36$
 $:: 7 \cdot 9$ &c dimostra la ciciale
loro congiunzione nella serie intera
degli estremi $3 \cdot 6 \cdot 10 \cdot 15 \cdot 21 \cdot 28$
 $36 \cdot 45$ costituite in legame conti-
nuo dalle ragioni degl' impari, &
puri; perche' dovendosi supporre
l'unita' capo, e principio di detta
serie: e' chiaro, che $1 \cdot 3$ e' subtriplo
di n.° impari; $3 \cdot 6$ suduplo
di n.° pari, come $1 \cdot 4$; $6 \cdot 10$
 $:: 3 \cdot 5$ di n.° impari; $10 \cdot 15 :: 4 \cdot 6$
sesquialtera di n.° pari &c. per
serie indefinita.

Le somme rispettive de' termini
di ciascuna proporzione p.e. $3+4+5+6=18$,
sono la meta' di un n.° quad.° di
 $10+12+13+15=50$, la cui meta'
 $=25$ n.° quad.° di $11+14+15+18=58$,
la cui meta' $=29$ n.° quad.° &c per serie
indefinita

La serie di questi quad.° essendo
 $9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49 \cdot 64$ &c, e ritrovandosi 9 diviso
in $3 \cdot 6$ dagli estremi, in $4 \cdot 5$ dagli
estremi della prima propor. $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$,
e cosi' 25 diviso in $10 \cdot 15$ dagli
estremi, ed in $12 \cdot 13$ dai mezzi
della seconda propor. $10 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 15$;
e lo stesso rilevandosi in tutte per
serie indefinita: si vede, che i n.°
quadrati.

quadrati, non dipendono dalla sola
radice loro moltiplicata in se stessa;
perchè se 3 è la radice quad.
di 9 , ch'è il mezzo aritm.^{co} della
dupla $g. d. 6. 8. 9. 10. 12$, anteriore
però certamente a questa propor.^{te}, già
esisteva nell' aritm.^{ica} serie la pro-
por.^{te} $3. 4. 5. 6$; e però il mezzo aritm.^{co}
della dupla $g. d.$ ugual.^{te} può
averli dalla radice 3 , che dalla
somma di $3 + 6$, e di $5 + 4$.

Similmente se 5 è la radice quadrata
di 25 , ch'è il mezzo aritm.^{co} della ser-
quale era $g. d. 10. 14. 15. 16. 20$.
anteriore però a questa propor.^{te} già esis-
teva nell' aritm.^{ica} serie la propor-
zione $10. 12. 13. 15$, e però il
mezzo aritm.^{co} 15 della sequenz.^{da} $g. d.$
ugual.^{te} può averli dalla radice 5 , che
dalla somma $10 + 15$, e di $12 + 13$,
e lo stesso si dica, e si conchiuda di
tutta la serie indefinita.

Or vice poi l'argomento, se si
osservi, che il n.^o 3 impari è la
somma de' termini della forma sud-
dupla $1. 2$. Ed in fatti il quad.^{ro} della
radice 3 , ch'è 9 si trova mez-
zo aritmetico, ch'è 9 si trova
mezzo aritmetico degli estremi $6. 12$
 $= 1. 2$. Nella squadrata propor.^{te}
 $g. d.$ della dupla.

Il n.^o 5 impari

Il n.º 5 impari è la somma de' termini della forma susseguiente 1.2 ; e di fatto; e di fatto il quad.^{to} della radice 5, ch'è $= 25$, si trova mezzo aritmetico degli estremi $20.30::1.3$ nella soprassegnata propor.^{te} g. d. della susseguente. E così per serie indaga.

Da questa verità di fatto risul-
tano due conseguenze. L'una si è
che gl'impari $3.5.7$ ^{non sono numeri p. se primi} sono reali
composti dalla somma de' termini
delle semplici forme $1.2, 2.3, 3.4$ &c.
e però ciascuno degli impari è segno
caratteristico, reale, dimostrativo della
semplice forma, dalla somma de' cui
termini è composto.

L'altra si è, che non dandosi
in questo senso il n.º 3, se aritm.^{te}
non si supponga la prima forma sud-
doppia 1.2 ; e non dandosi il n.º
5, se aritm.^{te} non si supponga la
prima forma susseguente $1.2.3$ &c.
è adunque necessario, che le semplici
prime forme siano anteriori ai loro
numerici caratteristici segni, i quali,
come si è detto above, sono come
verbi di quel corpo, o per dir meglio,
sono corpi di quello spirito.

Se poi si chiegga di qual natura

debbano intendersi

debbono intendersi i n.º. esponenti & p.º.
forme 1.2, 2.3, 3.4 &c., se semplici
o composti, se originali, o derivati:
si risponde, che derivano essenzial. dall'
armonica unita, ch'è la prima
forma, ed il p.º. esemplare di tutto
cio, che original. si trova nell'uno
in se stesso, e per derivazione, nell'
~~uno~~ fuori di se stesso, cioè nella serie
armonica, e nella serie arit.^{Dea}

Questo non è il luogo, né il
tempo di esporre questa verità, e dot-
trina, che importa propria estensione.
Si troverà esposta, e dimostrata nell'
opera intera. Presentem. basterà un
saggio di prova fondato nella serie
delle ragioni costituite dalle armonie.
d.º.º. altrove già esposta, e spiegata
col n.º. nell'armonia serie.

60 . 30 . 10 . 15 . 12 . 10

30 . 10 . 5 . 3 . 2

1 . $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{15}$, le quali
essendo nell'uno in se stesso, sono
necessari. le p.º. forme, ed il p.º. esem-
plare di ciò, ch'è nell'uno fuori
di se stesso.

Cia nel n.º. comune la derivata
serie degli estremi delle qui più volte
assegnate propo.^{Dei}

2 . 6 . 12 . 20 . 30 . 42 &c
1 . 3 . 6 . 10 . 15 . 21 &c

E' chiaro

è chiaro, che per aver l'armonica
 serie composta degli estremi delle proporzioni
 $2 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 20$ &c, è forza moltiplicare
 l'armonica serie delle ragioni $1 \times 2 = 2$;
 $2 \times 3 = 6$; $3 \times 4 = 12$ &c, ed è eguale
 chiaro, che prima dell'armonica serie
 $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ &c, dipendente dall'uno
 fuor di se stesso vi era, e vi è l'
 armonica serie $1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c dipen-
 dente dall'uno in se stesso.

L'arimendi nella stessa arit.^a serie
delle frazioni $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c. come
forma prima, e primo esemplare,
avendosi il supremo de' generi di quan-
tita', ch' è il moltiplice fra il tutto,
e le parti in $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ &c.
a norma del meno $\frac{1}{2}$ ha nel n.^o
comune la derivata serie moltiplice
in $1, 2, 3, 4, 5$ &c.; siccome
poi dalla serie delle armoniche
differenze si hanno gli estremi delle
espressioni propor.^{oni}, così dalla somma
dei termini delle rag.^{ioni} moltiplici
si hanno i cati, o siano i mezzi de-
terminati delle stesse proporzioni.
Si spiega. Data in n.^o l'arit.^a
serie delle frazioni, sarà =

60. 30. ~~15~~ 15. 12. 10 &c
sommati per serie i termini num.

Di ciascuna moltissime

molteplice ragione, saranno in serie

60 . 60 . 60 . 60 . 60
30 20 15 12 10
90 80 75 72 70

9 . 4 | 16 . 15 | 15 . 14 | 36 . 35 &

La inversa summolteplice ragione

8 . 9 costituire il centro degli estremi

suddetti 6 . 12, la inversa 15 . 16

costituire il centro degli estremi

12 . 20, la inversa 24 . 25 degli

estremi 20 . 30, la inversa 35 . 36

degli estremi 30 . 42 &.

Ma da chi esamina dovendosi chieder la

cagione, per cui nella dimostra-

ta serie de' centri non si trovi

il primo 3 . 4, ch'è il centro della

prima propor. degli estremi suddetti

2 . 6, ma che non potendo averli

per il metodo suddetto di somma,

deve supporre un termine solitario an-

teriore eguale a 10 equiverbo alla pa-

forma 90, e però inverso = 3 . 4.

Si risponde, che vi è questo termine

solitario anteriore indipendente da som-

ma; e benché arbitrari. separato

dall'armonica serie concreta 60 . 30 . 20 &c,

talmente però necessario, è reale, che

senza questo l'armonica serie, sarebbe

ipotesi, e non veri.

Torni a memoria la data unità

col termine infinito per l'assegnazione

di un mezzo

6 . 8 . 9 . 12

12 . 15 . 16 . 20

20 . 24 . 25 . 30

30 . 35 . 36 . 42

Di un merro, di cui siano dimostrati:
capaci questi due termini $1 \cdot \infty$ dall'al-
gebra si dimostra unico il merro armod.^{co}
 $= 2$; e però la data unita' deve neces-
sariamente convertirsi nell' armonica natura del
detto merro, ch' è l' armonica forma
onninam.^{te} prima, oltre cui è impossi-
bile il regresso ad altro principio.

Se adunque la data unita' $= 1$
si denomini dal concreto numerico
termine 60: è chiaro, che il merro
armod.^{co} astratto $= 2$; deve denomi-
narsi dal termine 120.

Con ciò resta pienam.^{te} dimostrato
il 2.^o centro 3. 4 de' 7.^{mi} termini
multipli 2. 6 dipendente non da
somma, ma dalla primordiale facol-
tà del merro armod.^{co} suddetto, da
cui è stabilita per principio assolut.^o
primo, ed universale non l'aritmetica,
non la geometrica, non altra qua-
lunque, ma la sola armonica legge
di scienza, e di natura di quantità.

Ecco adunque dimostrata l'armo-
nica unita' in due aspetti assoluti:
primi, ed universali, l'uno astratto
nel merro armod.^{co} $= 2$ fra la data
unita', ed il termine infinito, l'altro
concreto nella data unita' determinata
all' armonica natura

all' armonica natura del mezzo armonico
astratto, che non essendo capace di rap-
porto di determinata natura, di quan-
tità col termine infinito, si dimo-
stra capace di ricevere dallo stesso
termine, la facoltà della deter-
minata armonica natura, e di co-
municarla alla data unità.

O si concede, o si nega questa
dottrina delle due armoniche unità
primordiali. Se si nega, è forza ne-
gare l'algebraica dimostrazione
del mezzo armonico $= 2$, unicam-
possibile fra l'unità, e l'infinito,
rispetto all' astratta unità armonica,
e rispetto alla concreta è forza ne-
gare la fisica verità dei fenome-
ni fisico-sonori qui esposti, e spie-
gati, i quali si ritrovano tutti con-
cordi nel dimostrare in loro impresso
questa fisico-armonica legge, indipen-
dente da qualunque umano arbitrio,
ed unicam- dipendente a priori da
un armonico principio astratto. Certo
è, che il Tartini esponendo questa
dottrina per provarla, nulla addeve
della sua propria scienza. La
dimostrativa verità del mezzo armonico
 $= 2$, unicam- possibile fra la data
unità, ed il termine

Ed il termine *infinito* è dell'algebra.
La fisica verità dell'armonica legge
impressa nei fenomeni qui proposti è
della fisica sperimentale.

Non sarà dunque dei moderni fisico-
matematici, che voglia contraddire a due
verità da essi stesse proposte, provate,
ed universalmente ricevute?

La conseguenza è chiara. Vi è dunque
un armonico metafisico genere, ed è tan-
to più positivo, e reale del genere fis-
sico, quanto è in ogni senso di mag-
giore il principio attivo del passivo;
il soggetto, che dà la legge del soggetto,
che la riceve.

A queste due verità si aggiunge la
terza congiuntam.^{te} presidiata dalla
dimostrazione, e dalla esperienza. Qui
a lume di meriggio si vedranno le prime
numeriche forme 1. 2, 2. 3, 3. 4 &c
essenzial.^{te} originate dall'armonica unita,
da cui sono dimostrativa.^{te}, e fisicam.^{te}
determinati a priori i numerici termini
suddetti, come segni caratteristici reali
di dette forme, e come omninam.^{te} indi-
pendenti dall'arbitrio, e designazione
umana.

In oltre si vedrà quanta, e quale
debb'esser la cautela nel decidere delle cose

attinenti

attinenti a questa scienza.

Per tal bisogno si abbia sotto
l'occhio la descritta linea AB
armonica^{le} divisa per la serie delle
frizioni $1. \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4}$ &c, e torni
a memoria il fenomeno di quel
terzo suono, che fisicam^{te} risulta
da due simultanei dati suoni ragua-
gliati nel loro accordo alle armoniche
ragioni di detta serie $1. \frac{1}{2} , \frac{1}{2} . \frac{1}{3} , \frac{1}{3} . \frac{1}{4}$

Gia' si suppone comunem^{te} noto il
fenomeno della vera corda sonora
che o ne tre suoni $1. \frac{1}{3} . \frac{1}{5}$, ovvero
nei più $1. \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5}$ &c, in ogni
modo si divide armonica^{le} per se stessa
senza che vi abbia luogo l'arte, o
l'arbitrio.

Per fondamento più sicuro qui
si assegna nella serie $1. \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . \frac{1}{4} . \frac{1}{5}$ &c.
il genere piuttosto, che in $1. \frac{1}{3} . \frac{1}{5}$
la grazie dell'armonica divisione;
di che si è abbastanza reso conto
al pub.^{lico} della dissertazione sul
diatonico genere musicale.

Ma non dovendosi lasciar luogo
a questione, se oltre il suono di
tutta la corda si vogliano supporre
i soli due di $\frac{1}{3} . \frac{1}{5}$: sia pur
così; giacchè ciò nulla derogar a

quanto si vuol qui

quanto si vuol qui dimostrare. Basta
all' intento, che (siano i più del genere,
o i meno della specie) si sappia, e si
rifletta, che sono di legge di natura fisica,
impressa nella detta corda, e non di arte,
o di arbitrio di mente umana. Ciò pre-
messo si venga al fatto. Supponga

AB una corda sonora ista sul mono-
cordo, e fisicam^{te} certo per il fenomeno
del terzo suono, che dati due suoni con-
temporanei nelle prima delle due arm^{te} che
ragioni $1 : \frac{1}{2}$, la quale corrisponde alla
 $AB = 1$; ed alla corda $AC = \frac{1}{2}$, il
terzo suono risulta unisono al suono
della corda intera $AB = 1$. Dati

i due suoni nella seconda ragione $1 : \frac{1}{3}$,
 $= AC, AD$, il terzo suono è $= AB = 1$.

Dati nella terza ragione $\frac{1}{3} : \frac{1}{4} = AD, AE$,
il terzo suono $= AB = 1$ &
per serie armon^{ica} infinita delle prop^{orzioni}.

Supponga simil^{mente} AB divisa
nella più che $\frac{1}{3}$, e per $\frac{1}{5}$, e
fisicam^{te} certo, che dati i due suoni
 $1 : \frac{1}{3}$ corrispondenti alla corda $AB = 1$,
ed alla corda $AD = \frac{1}{3}$, il terzo
suono risulta unisono, o sia eguale
al suono della corda intera $AB = 1$.

Dati i due suoni $\frac{1}{3} : \frac{1}{5} = AD, AE$,
il terzo suono è ugual $AB = 1$. Dun-
que in ogni modo il terzo suono è

Tab. II. Fig^a. 25

fisicam^{te} e costante.

fisicam^{te} e costante^{te} uniscono, o sia
eguale al suono della corda intera = 1.

Di questo terzo suono vi è la
formola dimostrativa, bensì indica-
dente, ma confermata dalla esperienza;
è la stessa delle coincidenze: consiste
nella moltiplica. fra loro de' due
termini della forma, o sia ragione,
in cui sono i due dati suoni; ed il
prodotto è il 3.^o suono.

Siano p. g. in dupla, la cui forma
è 1. 2; adunque $1 \times 2 = 2$, ed il
terzo suono = 2.

Siano in quintaltera, la di cui
forma è 1. 3; adunque $1 \times 3 = 3$,
ed il suono 3.^o = 3. ~~Adunque~~

Siano nella forma 3. 5; adunque
 $3 \times 5 = 15$, ed il terzo suono = 15 &c.

Qui sembra, che la esperienza
non concordi colla dimostrazione; per-
chè per la esperienza si ha dalle
ordinate armoniche ragioni $1. \frac{1}{2}$,
 $\frac{1}{2}. \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}. \frac{1}{4}$ &c. il terzo suono
perpetuand. lo stesso in $AB = 1$; e
per la detta formola delle ordinate
numeriche forme 1. 2, 2. 3, 3. 4 &c.
si ha il 3.^o suono perpetuand. diverso
nei prodotti 2, 6, 12, 20 &c.

Questo è il punto di vista, che
da una parte dimostra

da una parte dimostra ad evidenza l'origine delle prime forme dell'armonica, unita in due aspetti reali. Primo e principale dall'uno in se stesso, come continuo nelle forme delle frazioni $1. \frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}$ &c. Secondo e subalterno dall'uno fuor di se stesso come discreto, nelle numeriche forme $1. 2 ; 2. 3 ; 3. 4$ &c.

E dall'altra con egual evidenza dimostra l'inganno, in cui universalmente si è incorso per mancanza di cognizione della vera natura delle armoniche frazioni.

Quando si enunciano, e si esprimono col numero le semplici forme prime, $1. 2 ; 2. 3 ; 3. 4$ &c., le scienze comuni prendono, ed intendono i detti numeri di natura di aritmetica, quantita', ne qui vi è sbaglio.

Lo sbaglio consiste nel non aver avvertito, che gli stessi stessi numeri si hanno figurati, e necessariamente dalle armoniche frazioni, e però si devono necessariamente intendere, e distinguere non in un modo solo, ma in due modi significati diversi. Ecco il fatto.

Datta l'armonica unita, ch'è sempre il tutto, e l'uno in se stesso. La prima sua divisione cade per metà, e però supponendo AB una vera corda sonora, e comparandola alla sua metà AC, si ha la ragion dupla fra il tutto,

e la metà.

90

e la metà; e dati questi due suoni simultanei, per la formola del 3.^o suono si ha il 3.^o suono = 2; perchè $1 \times 2 = 2$.

Così la 2.^a divisione cade per Terzi, e comparando AC, AD = $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, si ha la sesquialtera $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot 2$; e dati in questa ragione due suoni simultanei, per la formola del 3.^o suono = 6, perchè $2 \times 3 = 6$.

Ugualm.^{te} nella terza divisione, per quarti, comparando AD, AE, si ha la sesquiterza $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = 4 \cdot 3$; e dati in questa ragione 4 due suoni simultanei per la formola del 3.^o suono, si ha per terzo suono = 12, perchè $3 \times 4 = 12$. &c. Ma i Termini del 3.^o suono 2. 6. 12 &c non sono altrimenti diversi, sono sempre lo stesso tutto AB = 1, diviso in 2, in 6 in 12 parti uguali; e però quando si moltiplica si moltiplica $1 \times 2 = 2$, sicam.^{te} si moltiplica la corda AC, ch'è la metà = 1 per la corda AB, che è il tutto = 2, perchè la corda si è divisa per mezzo in C. Quando si moltiplica $2 \times 3 = 6$, fisicamente si moltiplica la corda AC, ch'è = 3 per la corda AD = 2 di quelle parti, in 6 delle quali parti si è divisa la corda AB,

perchè la corda essendo divisa

47

perchè la corda essendo divisa per mezzo
in C, D AD essendo $= \frac{1}{3}$, il tutto
è forza che sia diviso in parti ali-
quote 6.

Ne può intendersi altrimenti, se
moltiplicando le frazioni $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$, si
ha in prodotto la frazione $\frac{1}{6}$; e così
 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$; e moltiplicando fisicam.^e
le corde AC x AD, $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ col numero
 2×3 , si ha in prodotto la corda AB = 6;
e così AD x AE col num.^o 3×4 , si
ha la corda intera AB = 12; la
formola delle frazioni è falsa, e quella
del numero è vera, perchè il fisico
terzo suono non è una frazione $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ &c.,
ma il tutto AB diviso in 2, 6, 12 &c.
parti uguali.

Questo fisico numero delle parti reali
della corda AB s'intende anche meglio
nel genere moltiplice, disegnando AB
come tutto = 1, moltiplicato in 1×1 , resta
la stessa corda AB = 1. Disegnando
AB = 2, AC = 1, moltiplicando 1×2 ,
resta AB = 2. Disegnando AB = 3, AD = 1,
moltiplicando 1×3 , resta AB = 3 &c.

La serie fisica di queste parti, e del
tutto della corda AB, essendo 1; 1.2;
1.3; 1.4 &c., ecco adunque sotto gli
occhi il fisico esemplare dell'aritmético

numero comune 1.2.3.4 &c.

numero comune $1.2.3.4$ &c. nell'armonica divisione della corda AB e per conseguenza le prime num.^e forme $1.2, 1.3, 1.4$ &c. essenzialm.^e originate dalla ~~divisione~~ fisico-armonica unità, da cui sono dimostrativa^e, e fisicam.^e determinati a priori i numerici segni suddetti.

Nulla importano in questo caso ne' i nomi di uno, due, tre &c., ne' le cifre $1.2.3$ &c., importano essenzialm.^e le nature di quantità, cioè l'unità, il dop-
pio, il triplo, &c.

Si disegnano poi con quali nomi, e cifre si vogliono: basta che significhino, e per consenso comune s'intendano le date nature. Ma disegnandole per la serie moltiplice $1.2, 1.3, 1.4$ &c., questa serie è poi di arbitrio, o di legge di natura indipendente dall'arbitrio? La fisica dimostrazione del terzo suono decide, che questa è legge indipendente a priori da umana designazione, e ch'è legge di una armonica reale natura anteriore al fisico dato della corda AB . Dal suono della corda $AB = 1$ si ha l'identico suono $1 \times 1 = 1$, e però resta qual è in se stesso $= 1$. Dai due suoni di $AC = 1$, e di $AB = 2$

95
68
e di $AB = 2$ si ha il fisico terzo suono
 $= 2$, perchè $1 \times 2 = 2$. Dai due suoni
 $AD = 1$, ed $AB = 3$ si ha il fisico terzo
suono $= 3$, perchè $1 \times 3 = 3$, e così per
serie moltiplice indefinita. Dunque si
è dimostrato &c.

Le proporzioni aritmetiche discrete col mezzo
aritm. e contrar.^{co}, di cui abbiām per-
lato finora, dipendono essenzialmente dalle sem-
plici numeriche forme di ragione 1. 2,
1. 3, 3. 4 &c. per serie indefinita; e però
sono dimostrativa^{te} anteriori alle proporzioni
g. d. di questa scienza, le quali aven-
do la loro forma in tre termini 1. 2. 3.
forma di 1. 3. 4. 6; 1. 3. 4. forma
di 6. 8. 9. 12 &c. : è chiaro, che se
la forma delle proporzioni aritmetiche disc.
di cui ora trattiamo, dipende da una
sola ragione, e la forma delle proporz.
g. d. dipende da due ragioni, quelle sono
anteriori a queste, perchè quelle sono
semplici, e queste composte.

La forma della costruzione delle
proporzioni di questa osservazione, è per
somma, e per moltiplica. Data la for-
ma 1. 2, sommative i due termini
 $1 + 2 = 3$, questo 3 si moltiplichi per
la forma 1. 2, ~~aritm.~~ si avranno
i due estremi 3. 6. Al prodotto della
somma 3 pel 2^o termine 1 aggiunti

2 termini

94

i termini della forma, cioè 1. 2, si
 ha $1+3=4$, $2+3=5$, che sono
 i meri della proporzione 2. 4. 5. 6,
 de' cui estremi 3. 6 il primo mezzo
 4 sarà sempre armonico, ed il 2.^o
 mezzo 5 sempre contrarmonico, e ciò
 senza che mai nella loro simplici-
 tà prima possa aver luogo il mez-
 zo aritmetico.

Simil.^e data la forma 2. 3,
 sommati i termini $2+3=5$; e mol-
 tiplicata questa somma per la
 forma 2. 3; si ha $2 \times 5 = 10$; $3 \times 5 = 15$
 e 10. 15 sono gli estremi della propor-
 che nasce da questa forma. Al 2.^o
 estremo 10 aggiunti i due termini
 della forma 2. 3, si avrà $2+10=12$;
 $3+10=13$, che sono i meri armo.^{co}
 e contrarm.^{co} di detta proporzione.

$$10 \cdot 12 \therefore 13 \cdot 15$$

nata dalla forma 2. 3

È innasognabile il mezzo aritmetico,
 perchè non potrebbe assegnarsi, se non
 in frazione, e le frazioni son sbarbate
 da questa scienza, non avendo esse
 luogo nell' aritmetica serie, di cui
 la unità è la minima quantità,
 presa per misura di tutte le altre;
 il che non sarebbe se si ammettesse

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \\ 3 \cdot 4 \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \\ 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 12 \end{array}$$

frazioni; giacchè la fra-
 zione

razioni; giacchè la ragione sareb-
be essa la minima quantità, e la
misura di tutto le altre.

Ma le nostre propor. g. d. co' meri
determinati oltre a questa comune pro-
prietà de' num. hanno il loro proprio
carattere di aver i meri determinati
armonico, aritmetico, e contrarim. ris-
petto agli estremi, cosa impossibile in
altre combinazioni di cinque termini, fuor-
chè quelle di dette propor. g. d.

La prima sesquialtera di esse
 $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 / 3+4+5+6 = 12$
 $2+6 = 8$

$12 \cdot 8$ dà $8 \times 12 = 96$, ch'è il numero de'
lati del poligono, di cui si è scritto Ar-
chimede per trovar la ragione fra il
diametro, e la circonf.

Si osservi di più nella serie delle
aritm. discritte sopra accennate, che la
somma di 6 secondo estremo della prima
con 10 primo estremo della 2.^a fa
 16 n. quad. La somma del 2.^o
estremo 15 della 2.^a propor. e del
primo estremo 15 della 3.^a = 36 n.
per quad. e così sempre. Sicchè
dalle propor. si hanno tutti i quad.
de' num. impari 9. 15. 49. 81 &c
e dagli estremi congiungenti la serie di
queste proporzioni si hanno i quad. de'
num. pari 16. 36. 64. 100 &c;

$$3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$$

$$3+4+5+7+8 = 36$$

$$6:36::1:6$$

un mezzo a sei estremi

$$\text{come } 1:6$$

$$6+10 = 16 = 4^2$$

$$15+11 = 36 = 6^2$$

$$18+36 = 64 = 8^2$$

$$45+55 = 100 = 10^2$$

onde ecco

96
Onde ecco sempre i quad^{ri} formati
per somma de' termini delle ragioni.

Si osservi ancora, che la ragione
fra il quad^{ro} inscritto, ed il cerchio
circoscritto e' di 7. 11 (p. Archim.). Di-
vidasi 7 in 3, 4, ed 11 in 5, 6, le
due ragioni sono in serie de' loro
termini 3. 4. 5. 6, che sono i pre-
cisi termini della prima proporzione
della sopra esposta serie. Ecco adun-
que rivolta la detta ragione 7. 11 nella
suddupla 3. 6 divisa dai due merri
aritm^{co}, e contrar^{co} con la esclusione
del mezzo aritm^{co}. Ma nella
dupla, e nelle sue radici questa
scienza e' fondata nella sestupla
estensione delle ragioni, e propor^{zioni},
perche' il sestuplo sistematico periodo
incomincia dalla semplice ragione
suddupla 1. 2 ... indivisibile, e le
cinque propor^{zioni} g. d. hanno il loro
complemento in 30. 35. 36. 37. 42,
i di cui estremi 30: 42 :: 5: 7
sono le prime radici di ragione
della dupla: alla dupla, ed alle
sue radici corrisponde perfettamente
il semiquadrato inscritto ACB al
semicerchio circoscritto nel diametro AB
doppio di AL, ed in AC prima corda
del semicerchio da LC primo seno in
radici della dupla, perche' tutto cio'

Tav. II Dig. 21.

si verifica in punti

si verifica in punti comuni al semic-
cerchio, ed al semiquadrato, e questa
è la fig. da cui ha la prima origine
il lato **AC** del semiquadrato invertito
ACB. Ciò è impossibile a trovarsi in
qualunque altra posizione, fuorchè di
7.11. Ma v'è di più nella risoluz-
zione di 7.11 in 3.4.5.6: si trovano
bensì le cifre stesse della proporzione
3.4.5.6, e negli estremi la ragione
suddupla, ma in niun modo vi si tro-
vano, o vi appaiono le radici duple.

In oltre la risoluzione de' due ter-
mini d'Archimede risulta dalle due
ragioni disgiunte 3.4, 5.6, e l'incon-
tro delle cifre comuni si ha nella
proporz. congiunta 3.4.5.6, la
quale per propria essenza non am-
mette la detta disgiunzione fra i due
mezzi 4.5, anzi vanno congiunti per
la loro somma in 9, come i due
estremi pure in 9.

Sembra adunque, che se il
sestuplo sistema ha per principio
la dupla, e per fine le sue radici,
la risoluzione dei due termini d'Ar-
chimede nelle due ragioni disgiunte,
negli estremi 3.6 delle quali si
trova la sola suddupla, ma non le
sue radici; e nella diversità formale
della comparazione,

98
della comparazione di due ragioni
dirigenti ad una proporzione congiunta,
non incontri il massimo punto di tanto
bisogno, quale è di una dimostrazio-
ne universale del semplice sistema,
e di principio assolutamente primo, oltre
cui non vi sia regresso, e che abbrac-
ci, e contenga in se tutte le parti,
ragioni, e proporzioni del medesimo:
non mai una dimostrazione particolare
di qualche parte di sistema, nè mai
equivoca fra due ragioni dirigenti,
ed una proporzione congiunta.

Quando così non sia, non potrà
mai scuoprirsi, e dimostrarsi la ragione
della massima, e vera scienza, che
unicamente si trova nella posizione d'
Archimede.

Se dunque la scienza, sic-
contenuta, arriva al massimo vero
grado, questo non può essere, che la
sola dimostrazione del semplice sis-
tema nel suo principio assolutamente
primo, perchè in questo unicamente
si contengono tutte le parti, ragioni,
e proporzioni.

A tanto appunto arriva la so-
la posizione d'Archimede, la quale
se di passaggio verso il suo principio

incontra le cifre

incontra le cifre, e le ragioni della
propor^{ione} $2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, intanto ciò suc-
cede, e deve succeder, in quanto la
detta proporzione è il capo d'una
serie di cicolar natura, come in
seguito sarà dimostrato; ma finalm^{te}
si risolve nel semplice principio arit-
metico primo. Si dimostra:

Date le due ragioni $3 \cdot 4$, $4 \cdot 5$,
queste devono intendersi radici, non di
termine, ma di ragione, perché per
la scienza presente si è dimostrato
altrove, che le vere originarie ra-
dici si di quantità razionale, che
irrazionale, si hanno a priori, non
da un termine, ma da una ragione.

Adunque dalla ragione radicale
 $3 \cdot 4$ si avrà il prodotto $= 12$, perché
 $3 \times 4 = 12$; e dalla ragione radicale
 $5 \cdot 6$ si avrà il prodotto $= 30$, ~~perché~~
~~che~~ Ma $12 : 30 :: 2 \cdot 5$ è
la ragione prodotta dalle dette due
radicali

Ma dalla scienza stessa vi
si è ulterio^{re} dimostrato, che per
consumare le prodotte ragioni fino
all'ultima loro risoluzione, deve
continuarsi a dividere i loro ter-
mini, i pari in parti uguali, e gli
impari

impari in parti disuguali per diff.
1. Ed ora si è ugual^{te} dimostrata
la vera facoltà, e natura de' numeri,
come segni di ragione. Adunque
dei due termini della ragione 2. 5
dividendo il primo in $1 \times 1 = 1$, e
l'impari in $1 \times 3 = 6$, si avrà dai
due prodotti 1. 6 la sestupla in
que' termini primi, oltre de' quali
non vi è regresso.

Ecco adunque la potentissima
dimostrazione del sestuplo sistema
nei termini assolut^{te} primi, la
quale unicam^{te} si trova nella
posizione di Archimede 7. 11, ana-
lizzata nel detto modo dalla scienza
presente, e ridotta al suo principio
assolut^{te} primo, in cui necessariam^{te}
risiede la massima, e vera scien-
za delle parti, e propor^{te} del
detto sestuplo sistema.

Per negare questa dimostrazione
converrebbe negare per intero l'
armonica scoperta scienza, perchè
la dimostrazione è dedotta dall'
intimo della medesima.

Ma come negarla per intero,
se la due sue parti, cerchio armo-
nicam^{te} costruito, mezzo contram^{te}

negativo alle scienze

101
12
necessario alle scienze dimostrate, sono
due dimostrazioni di questa scienza,
le quali non patiscono obbietto, ed
illustrano la Geometria?

Ma, concesse queste, è forza
conceder la verità dell' armonica
scienza per intero, perchè sono
dedotte dall' intero della medesima, e
non da qualche sua parte; dunque &c.

È di fatto nella presente di-
mostrazione si noti, che la ultima
risoluzione de' due termini 7.11
essendo nella sestupla 1.6 , questa
nella carta penultima anteriore
si è dimostrata originale della
sestupla armonica, nel di cui centro
sestualbero 30.10 si è scoperta, e
dimostrata la natura circolare;
il centro della sestualbero 14.15
è per centro della sestupla 60.10 .

È simil^{mente} si noti, che nell'
analisi della ragione 7.11 si parte
per la ragione $= 2.5$, la quale
è costituita dai due primi ter-
mini della serie de' merri contrarmi:
 $2.5.10.17$ &c.; e però non
può esservi prova di verità più
manifesta di questa.

Da ciò si deduce, che la ricerca
della prossimità

109
dalla prossimità del termine, alla
vera quantità materiale, alla
quale si attende con tanto stu-
dio, e fatica; in questa scienza,
ch'è fondata non nel termine,
ma nella ragione non solam.^{te}
non è per se bisognosa di prin-
cipio primo, ma è piuttosto sven-
tagiata, perchè quanto più si
accosta alla vera quantità ma-
teriale tanto più si allontana
dalla vera primitiva ragione,
da cui ~~da~~ l'origine, come da
suo principio assolutam.^{te} primo,
e da cui come da capo di scien-
za incomincia, e procede la
indefinita serie di sempre mag.
approssimazione alla vera quantità
materiale, come si è dimostrato
più volte in altre carte.

Se la vera scienza delle
cose consiste nella loro forma,
e non nel soggetto della forma:
è chiaro, che la vera scienza
debe trovarsi nella ragione, e
non nei termini separati dalla
ragione, perchè questi costituis-
cono il soggetto, ma la ragione

è la loro forma

è la loro forma.

L'esempio è chiaro, e preciso nelle prime radici della dupla 5 · 7 · 10, assegnate in altra carta, dalle quali si deduce per somma l' indefinita serie di tali radici 12 · 17 · 24 ; 29 · 41 · 58 ; 70 · 99 · 140 &c.

Sì si veggia, che nella prima posizione 5 · 7 · 10, ~~che~~ è il capo di detta

serie moltiplicato per se stesso, il mezzo 7 × 7 = 49 ; e moltiplicati fra loro gli estremi 5 × 10 = 50, si trova ne' due prodotti la diff. = $\frac{1}{50}$. Nella

seconda posizione, moltiplicato per se stesso il mezzo 17 × 17 = 289, e moltiplicati gli estremi 12 × 24 = 288, si trova ne' due prodotti la diff. = $\frac{1}{289}$.

Nella terza, moltiplicato 41 × 41 = 1681 ; e moltiplicati gli estremi 29 × 58 = 1682, si trova la diff. = $\frac{1}{1681}$.

E final^{mente} nella quarta, con la stessa operazione si trova la diff. = $\frac{1}{9801}$.

Questa operazione facendosi sulle stesse lunghezze con le dette diverse divisioni, ed applicazioni, è chiaro, che la quarta, in cui si trova la diff. = $\frac{1}{9801}$, è senza confronto più esatta, e più prossima alla vera quantità

materiale,

materiale di quello sia la prima,
 in cui si trova la $1^a = \frac{1}{50}$;
 ma non per questo la quarta è più
 dottrinale, perchè avendosi essa dalla
 terza compressione delle radici, ed
 avendosi la prima dalla prima, sem-
 plicità delle due ragioni $1.3, 3.4$,
 formanti la dupla: tanto questo
 prima è più dottrinale della 4^a ,
 quanto un principio sintetico è più
 dottrinale di un principio analitico,
 e quanto la ragione, e la radice è
 più dottrinale dell'effetto, e del prodotto.

Altro è, che in questa scienza
 si trovi uguale il principio primo
 delle forme, e delle ragioni, ch'è
 l'immutabile, ed altro è, che as-
 signato questo, si deduca da questo, e
 vi sia in questo la facoltà della
 detta materiale approssimazione, sem-
 pre mutabile.

La vera scienza principale risiede
 nella natura dello stesso, perchè
 questa è la sola immutabile natura,
 nè mai nella natura del diverso,
 ch'è sempre mutabile. Questa
 appartiene alla materialità del so-
 ggetto; quella è intrinseca nella forma
 del soggetto.

del soggetto.

Per ciò si conchiude, che nella posizione d' Archimede vi è unicam.^{te} la massima scienza delle due proposte quantità, cerchio, e quadrato, perchè questo unicam.^{te} conduce a retto filo alle radici della sedupla, in cui risiede il fondamento principale della vera scienza del cerchio, altrove assegnato, e spiegato nella suddupla come principio assolutam.^{te} primo, e nelle sue radici come ultimo confine della sedupla.

Però essendo la cosa, si dimanda qual bisogno vi sia p. e. della molto più esatta posizione di Merio, 355 cerchio circoscritto, 226 quadrato inscritto (e così s' intenda di tante altre posizioni più esatte di questa) se i detti due termini devono dividerli in due ragioni, 226 nella ragione di 3.4; e 355 nella ragione di 5.6 quando per propria natura e nel loro principio primo sono per se divisibili nella posizione di Archimede 7.11.

Però nuno, senonche ad oggetto di voler sapere la materiale quantità,

in cui costa.

non risiede la vera scienza delle
ragioni, e proporzioni, in cui on-
ninam^{te} deve risolversi qualunque
ricerca di rapporto di quantità.

Due importantiff^{le} verità devono
confessarsi; l'una, che a chiunque
versa su questo piano di scienza
dimostrativa, non deve far paura
la massima opposizione delle cose,
perchè final^{mente} vi si arriva. Deve
bensì far paura la massima
semplicità delle mem^e, perchè in
questa troppo facil^{mente} sfugge dall'
occhio, e dall' intelletto la verità,
che ricerca.

L'altra si è il merito gran-
de non ancor abbastanza conosciuto
della geometria antica, e necessaria
ministra di questa scienza. Platone
Geometra sommo, ha detto per trop-
po il vero, che nella Geometria
vi è tutto il bisogno per suc-
correre questa scienza, ch'egli si è
appertam^{te} dichiarato di voler oc-
cultare; ma che i Geometri, al-
men que' del suo tempo, si fer-
marono sulla materiale quantità,
senza curar la ricerca della ragione, da
cui risultava.

E da credere

104
Si da credere, che Archimede
avrebbe saputo anch'egli proseguire a
maggiore quantità di lati 96 del poligono,
i quali era intero sufficienti al suo
bisogno. Ma è poi altrettanto da
credere, ch'egli sapesse benissimo nulla
abbisognare di più, rispetto ai veri
principj di scienza, semplici, primi,
ed universali, ai quali conduceva a
distingua il risultato della sua
posizione.

Tutto bene si dirà, ma sembra,
che per stabilire un sì fatto principio
di scienza, che cambia molte idee
già ricevute, e rende inutili le fa-
tiche fatte per secoli da uomini in-
signi in questa precisa ricerca
(la quadratura del cerchio), si ri-
chieda qualche cosa di più evi-
dente, e sicuro, sicchè non vi ri-
manga dubbio veruno, che la cosa
non sia così.

Vi è questo di più, ed è
al proposito di tanto bisogno, perchè
essendo un fatto, al fatto non v'è
risposta; si ritorre adunque alle
qui sopra assegnate regole proposizioni,
dalle quali vedo

dalle quali resta escluso il mezzo
aritmetico, che nelle proporzioni
geometriche discrete di questa scien-
za, è sempre un num.^o quadrato,
e che non ha luogo nelle aritmetiche,
se non che nella duplicazione de'
loro termini.

Dalla dupla, e dalla sesqui-
altera è costituita la tripla
nel suo principio assolutamente primo
di ragioni. Nella prima di
queste proporzioni 3.4.5.6. si
hanno gli estremi subdoppi, e da
questa per la somma di $3+4=7$,
e di $5+6=11$ si è avuta la ra-
gione di Archimede di quadrato
inscritto, e cerchio circoscritto. Nella
2.^a propod. 10.12.13.15 si hanno
gli estremi sussesquialteri, e da
questi per somma $10+12=22$,
 $13+15=28$, $22 \cdot 28 :: 11 \cdot 14$,
si ha la stessa ragione di Archi-
mede inversa nel quadrato circos-
critto, e cerchio inscritto.

Questo è il fatto ben chiaro,
e patente per convincere ancor

la stessa ostinazione

la stessa ostinazione; poichè essendosi già dimostrato altrove, che l'armonica natura dipende a priori dalla ragione dupla in armonica potenza (dimostrato pel mezzo armonico n fra 1 e $l' \infty$), e dalla serquialtera in attual determinazione dell'armonica proporzione, da cui dipende la serie (dimostrato dalla necessaria conversione del n mezzo armonico nell'unità come tutto, e continuo, da cui necessariamente procede $\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3}$) questi sono i due principali elementi dell'armonica scienza.

Eccoli sotto agli occhi nelle due prime proporzioni determinati dal fatto alla natura circolare ne' stessi termini di Archimede, a specificazione delle consecutive proporzioni di detta serie, nelle quali operando per somma nel modo suddetto, nulla affatto si trova di detta determinazione.

Qui adunque per sottrarsi dalla forza di questa dimostrazione, non vi sarebbe altro partito da prendersi, che il dire: essere le dette due

somme

109
16

$$1. n. \infty \text{ armonica prop.}$$

$$n. 1$$

$$1. \frac{1}{n}$$

$$1. \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3}$$

110
somme un incontro accidentale, e
non un capo supremo di scienza.

Ma questo sarebbe un partito
da disperati, ed assai peggiore di
un assurdo in un sistema sì le-
gato, connesso, e coerente, che
non vi è, né vi sarà mai l'e-
sempio di un uguale.

In oltre la scienza stessa
somministra nei stessi termini
7. 11, ed 11. 14 la dimostrazione
in contrario, perchè sommati $7+11$
 $= 18$, ed $11+14=25$, si trova, che
il n.º pari 18 è divisibile in
11. 13, che sono i due meri arm.^{co}
e contrarm.^{co} della propor. 10. 11. 13. 15.

È fatto, e dimostrazione, che 3
è la radice quadrata di 9, e che
5 è la radice quad. di 25; ma
3. 5 sono i due meri arm.^{co}, e
contrarm.^{co} della serie geometrica d.
1. 3. 4. 5. 6, da cui si è dedotta
la ragione di Archimede 7. 11.

Simil.^{te} 3. 5 numeri impari,
sono le somme de' termini della
serie 1+2=3, e della susseguent.^{te}

$2+3=5$. E di fatto.

$2+3=5$. E di fatto g è il mezzo
aritm.^{co} della tripla $g. d. 6. 8. 10. 12$,
 15 è il mezzo aritm.^{co} della successi-
viale $g. d. 10. 14. 15. 16. 20$;
e gli stessi termini $3. 5$ divisi in
 $1. 2$, $2. 3$ sono le primi radici di
ragione, perchè $1 \times 2 = 2$; $2 \times 3 = 6$;
 $2:6::1:3$

E dunque una necessità es-
senziale, e non già una fortuita
combinazione, il trovarsi la natura
circolare nelle suddette due $g. d. propor-$
zioni, gli estremi delle quali sono
 $1. 2$, $2. 3$.



Anzi se fa alcuna difficoltà
l'aggiungere il mezzo contrarm.^{co}
 5 nella tripla $g. d. 2. 3. 4. 6$,
dalla quale si è dedotta la ragione
d'Archimede $7. 11$ senza introdu-
zione del mezzo contrarm.^{co} 5 , si
avverte, che tanto si ha il n.^o 11
dalla somma della tripla armonica
 $6. 3. 2$, quanto dalla somma del
mezzo contrarm.^{co} 5 col n.^o estremo
 6 della stessa tripla.

Si avverte di più, che si ha lo

stesso n.º 11 dalla somma de' due
 merri armonici 3 della tripla geom.
 disc., ed 8 della dupla g. d., il che
 significa, che si ha lo stesso dalla
 tripla, e dalla sestupla, perche' som-
 mate le due ragioni tripla, e dupla,
 delle quali sono merri armonici 3.8
 in propor. g. d., la loro somma è
 la sestupla, e però come dalla
 somma 3+8 si ha il n.º 11, così
 dalla somma di 1+6, si ha il n.º 7.

Così dev' esser, e così deve tro-
 varsi di fatto, perche' il centro di
 continuo nella propor. g. d. della ses-
 stipula 1. 2. 3. 6 essendo
 formato dalle due triple 1.3;
 2.6, è chiaro, che la scienza
 esistente nella tripla, dev' esser
 ancor nella sestupla, di che nell'
 altra carta si è data la dimostrazione
 nel centro 14. 25 della
 sesquialtera 10. 30 centro di propor.
 della sestupla armonica 6. 10, la
 quale forma ugual. il centro di
 geometrica proporzione, nella ses-
 stipula 1. 2. 3. 6

Proseguendo l' esame di detta propor.,

e serie

10. 20. 30. 60

20. 14. 25. 30

10. 14. 15. 60

e serie di nuova forma, deve osser-
varsi, che insieme colla ivi esposta
è congiunta un' altra serie regolare
di semplice aritm^{ica} propor^{te}.

1. 2. 3 ; 6. 8. 10 ; 16. 18. 20 ; 30. 32. 34 ; 48. 50. 52 ; 70. 72. 74 ;
96. 98. 100 ; 126. 128. 130 &c, come sarà spiegato.

Questa è facile a capirsi per
due caratteri luminosi, e patenti, che
porta seco; eccettuata la prima
1. 2. 3, ch'è p^{er} differenza 1, tutte
le seguenti, che sono p^{er} diff^a 2,
divise p^{er} 2 si risolvono nella serie
regolare dei tre meri armonico,
arithm^{ico}, e contrarithm^{ico} delle propor^{zioni}
g. d. di questa scienza; e questo
è il primo suo carattere luminoso,
e patente.

| | |
|------------|---------------------|
| 6. 8. 10 | della sottopla 2. 6 |
| 3. 4. 5 | |
| 16. 18. 20 | della dupla 6. 12 |
| 8. 9. 10 | |
| 30. 32. 34 | di 12. 20 &c |
| 15. 16. 17 | |

Il 2^o si è quello delle sue somme
 $1+2+3=6$; $6+8+10=24$; $16+18+20=54$;
 $30+32+34=96$; $48+50+52=150$; $70+72+74=216$;
 $96+98+100=294$ &c

6. 24. 54. 96. 150. 216. 294.
1. 4. 9. 16. 25. 36. 49 &c

Il termine 6, ch'è somma della
sottopla $1+2+3=6$ è misura co-
mune di tutta la serie delle somme,
riducendola alla serie de' num^{eri} quadrati,
e questo

e questo è il secondo suo carattere
uguale luminoso, e patente, dipendendo
dalla proprietà del num. in genere,
e qui specificato ai detti tre merri.

Ma si notino due cose. Prima:
che la p.^a somma 6, ch'è la misura
comune, dipende dalla d.^a, e tutte
le altre dalla d.^a 2: segno di-
mostrativo, che dalla natura di
questa serie si vuole per principio
primo la suttupla, perchè i ter-
mini della medesima sono anteriori ai
merri determinati delle proporzioni
geometriche discrete; e si vuole,
che il n.º 6 determinante il sestuplo
confine delle semplici forme, sia
la misura universale della serie.

Che sia così si vedrà in breve.

Seconda: che, queste due serie sembra,
che si oppongano fra loro, perchè
l'una ammette i due merri armon.^{co},
e contrarmon.^{co}, ma esclude l'aritm.^{co};
l'altra per il contrario ammette
unicam.^{te} l'aritm.^{co}, ma esclude i
due armonico, e contrarmonico; giacchè
qui si deve intendere non nella
sua rivoluzione per 2 nei tre merri,

ma de' intendersi

ma dee intenderci qual nasce la serie
nella sua semplicità di detta posi-
zione; e di ciò si vedrà qui sotto la
dimostrativa ragione

Non si oppongono altrimenti
anzi collimano a quella tale dimostra-
che realm^e sorprende. A questo effetto
si oppongono congiunte insieme nel loro
ordine naturale, in cui nascono nell'
aritmetica serie.

| | | | | | |
|----------------|-----|--------------------|-----|----------------|-----|
| 1. 2. 3 | --- | 6. 8. 10 | --- | 16. 18. 20 | --- |
| 3. 4. 5. 6 | --- | 10. 12. 13. 15 | --- | 11. 14. 15. 18 | --- |
| rad. quad. 3 | --- | 5 | --- | | --- |
| <hr/> | | | | | |
| 30. 32. 34 | --- | 48. 50. 52 | --- | 70. 72. 74 | --- |
| | --- | 36. 40. 41. 45 | --- | 55. 60. 61. 66 | --- |
| rad. quad. | 9 | | 11 | | |
| | --- | 96. 98. 100 | --- | | --- |
| 78. 84. 85. 91 | --- | 105. 112. 113. 120 | --- | | --- |
| rad. quad. 13 | --- | | 15 | | --- |

Nella serie sottoposta si rimarchino
le radici quad^e, 3 della somma 9;
5 della somma 15 &c. di 9
essendo radice 3 per la serie de' nⁱ
impari, si ha la ragion suddupla 1. 2,
de' di cui termini la somma è = 3;
e 9 è il mezzo aritmet^{ico} della dupla
geometrica disc. 6. 8. 9. 10. 12. di 15

essendo radice

essendo radice il 5, questo diviso in
n. 3 dà la sesquialtera, e 15 è
il meno aritmetico della sesquialtera
geom. disc. 10. 14. 15. 16. 30. e la
stessa verità regge per ~~seriguer~~ infinita.

Qui non v'è luogo a dubbio per
decidere, che questa serie conduce ai
num. impari 3. 5. 7 &c, e che di-
mostra diversi divider i memi nelle
ragioni, de' di cui termini sono com-
posti.

È come dubitare, se questa di-
mostrazione è un fatto? Or essendo
le ragioni adunque sono anteriori
ai loro segni. È adunque vera nel
suo tutto questa scienza, ch'è fondata
non sopra i termini delle ragioni,
ma sopra le ragioni stesse, ciascuna
intesa come unita. Ma andiamo avanti.

Se la Scienza presente è vera
nel suo tutto, in queste due serie
d'insperione specificam. diversa,
dove trovarsi una qualche cosa di
preciso, e di grande, a cagione della
separazione d'que' tre merri, ne
quali essenzial. risiede lo quinto, e la
facoltà della mema.

Finora così è seguito in altre
posizioni d'importanza; ma questa

importando più di tutte

117
60
importando più di tutte, ciò deve ac-
guire a maggior ragione anche di
questa. Vi è realme, ed è la
suprema di tutte.

Arrivata l'una, e l'altra serie
al num. delle loro sei rispettive
proporzioni, si trova, che la quinta
proporzione de' merri armonici, e
contrarmonici, ha per radice qua-
drata il n. 11 della sua somma = 121;
la sesta ha per radice quadrata
il n. 13 della sua somma 169.

Si trova, che la sesta propor-
zione del merro aritmetico, merro
di situazione di serie fra le due
quinta, e sesta suddette, e costi-
tuita dai tre termini 70. 72. 74;
la somma de' quali è 116; che
ha per radice cubica il 6, poichè
 $6 \times 6 = 36$; $36 \times 6 = 116$.

Ecco adunque quella tale di-
mostrazione di scienza, e di fatto
del sestuplo circolare sistema (e
per conseguenza della scienza in-
vera), che sarà impossibile a qualunque
delle comuni scienze dimostrative
assegnare la uguale, che comprenda

in un solo

in un solo punto di vista, quando
fin' ora è passato in tante corde
d' isperione di altri punti diversi.

I num.ⁱ della proporzione
70. 72. 74 si risolvono in 35. 36. 37;

mezzi determinati della proporzione

g. d. 30. 35. 36. 37. 42, i di cui
estremi 30. 42 hanno come 5. 7
che sono le prime radici dyale di
ragione, della forma delle quali,
ch' è 5. 6. 7 si ha la detta proporzione.

Ma le radici di 5. 7 sono
11. 13; adunque la quinta, e la
sesta proporzione sottoposta hanno
per radici delle loro somme 11. 13,
che sono le radici dyale.

Ma numerando con le due
sottoposte la sottoposta mezzana,
i num.ⁱ numeranti sono 5. 6. 7,
adunque sono gli dersi della forma
5. 6. 7.

Ma tutto ciò s' incontra nel
punto comune della radice cubica
6 di 216; adunque il sistema
circolare è confinato alla sestupla,
e la natura circolare è di un cubo,
cioè di un corpo, che ha tre dimen-
sioni. Ma il cerchio è armonica-
te

costruito; adunque

179
64
costruito; adunque l'armonica
natura, che lo costituisce, non
può esser, che un cubo (o sia
un corpo massimio). Ma il mas-
simo de' corpi è l'Universo; adunque
l'armonica natura dev' esser la
legge della sua costruzione.

Ma quest'armonica non è
da se, perchè è partecipata al
mezzo o armonico, capo di questa
natura, da un termine infinito;
adunque &c.

Dopo tutto questo si crede, che
nulla più bisogni, se non che ren-
der ragione di quell'eccezzo, di cui
la circonferenza ^{vera} supera il diametro
triplicato.

Questa scienza intende, che
il cerchio sia triplo non per quantità
relativo al diametro, ma per essenza
della sua armonica natura, la
quale, rispetto alle ragioni, e pro-
porzioni, è forza, che sia determinata
dalla tripla; ma la scienza stessa
assegnando, e dimostrando il confine
della circolare natura nello sestuplo,

intende, che

intende, che il detto eccesso dipen-
da dalla sestupla, e lo dimostra.

Si è altrove, ed ancor in que-
sta carta dimostrato, che il circolar
confine è determinato alla sestupla.

Questa di sua prima origine
si ha nelle semplici forme di ragione

1. 2. 3. 4. 5. 6, ~~incominciando~~ di se-
conda origine, si ha nelle cin-
que propor. ^{ai} g. d. di merri de-

terminati, delle quali è capo la
semplice ragion suddupla 1. 2 come
ragione indivisibile, anteriore alle

cinque proporzioni, le quali nella
trippla g. d. 2. 3. 4. 5. 6, inco-

minciando dal 2.° termine 2 della
suddupla 1. 2, finiscono nell'ul-

tima 30. 35. 36. 37. 42, i

di cui estremi $30:42 = 5:7$ so-
no le prime radici duple di ragione.

Da ciò si è concluso, che
il sestuplo periodo circolare inco-
mincia dalla suddupla 1. 2, e fi-
nisce nelle sue radici 5. 7.

Ma se ciò si riporta alle sem-
plici forme 1. 2. 3. 4. 5. 6, non

è altrimenti

non è altrimenti vero, che questo
periodo, sebbene incomincia dalla
suddupla 1.2 finisce poi nelle
radici 5.7.

Finisce bensì nella vasssequinta
5.6, ch'è la metà aritm. della
forma 5.6.7, da cui si è avuta
l'ultima suddetta proporzione.

Or essendo di fatto, e le forme
delle ragioni essendo anteriori
alle forme delle proporzioni, essendo
si dimostrato nell'ultima carta
il centro di proporzione g. d. della
suddupla armonica nel centro
24.25 della sequialtera armonica
30.20, e nella carta pres. che
i termini d'Archimede 7.11 di-
visi nelle due ragioni 3.4; 5.6
producono la ragione 1.5, dalla
divisione, de' quali termini si
ha in prodotto la suddupla; su
questi fondamenti si annuncia
= la seguente proposizione: che L' =
= eccetto di quella quantità, di cui =
= la circonferenza supera il diametro =
= triplicato, ha l'origine, e si risolve =
nelle radici

= nelle radici delle radici della ra-
 = gione 5.6, di cui è l'ultima del-
 = le semplici sextuple forme. Si dimostra

Non proseguire il Tacchini
 per poca salute. Sostituisce la
 seguente dimostrazione.

Sommate le ragioni 15.16,
 e 189.191, risulta la ragione
 dell' eccello triplo sudetto in tal
 precisione, che comparata a
 quella di Merio 339.355,
 risulta la 3^{ra} completa nell'
 ultima delle sette cifre 1504874.

2564875

di cui eccede 355 di Merio, il
 qual termine a confronto di
 quello di Bulea si sa, che
 eccede di più di due particelle
 diecimilionesime. Ecco la ragione:

$$\begin{array}{r} 189 \\ 15 \\ \hline 1445 \\ 575 \\ \hline 7220 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 191 \\ 16 \\ \hline 1746 \\ 582 \\ \hline 7566 \\ 339 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 68094 \\ 22698 \\ 22698 \\ \hline 2564874 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7225 \\ 355 \\ \hline 36125 \\ 36125 \\ \hline 21675 \\ 2564875 \end{array}$$

Fendo conto

-123
63

Fendo conto delle due
subite ragioni. La rag^{ne} 15.16
è costituita dai due mezzi aritm.^{co}
15, e contrarm.^{co} 16 della sequi=
algebra g. d. 10.14.15.16.30.

La rag^{ne} 189.191 è costituita
da due termini dedotti da due
diverse ragioni dupla, e ser=
quiterza. Il termine 189
è dedotto a priori dal centro 8.9
della dupla g. d. 6.8.9.10.12,
perchè sommando $8+9=17$,
e $17 \times 17 = 189$.

Il termine 191 è dedotto
dal centro 48.49 della sequi=
terra g. d. 42.45.49.50.56
sommando $48+49=97$, e mol=
tiplicando $3 \times 97 = 191$.

Si rifletta alle ragioni in=
gradienti in questa operazione. Si
troveranno princip^{le} le fondamentali
di questa scienza, bastando, che
non si ometta il rapporto intrin=
seco del centro 48.49 al centro

3. 4 della tripla g. d. $12 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
 del di cui centro $3:4 = 42:56$
 è centro 48. 49, la somma de'
 di cui termini, ch'è uguale a 97,
 deve moltiplicarsi per il num.
 3, ch'è il determinante la
 tripla, $1 \cdot 2 \cdot 3$.

In oltre si rifletta, che 189.
 191 numeri impari per diff. 2
 sono le radici della ragione 188.
 192, la quale per la diff. 4
 si risolve in 72. 73. Questi
 due termini in qualunque modo
 si prendano sono in ogni modo
 dedotti dalla radici delle radici
 duples.

Perche' data la propor. g. d.
 $30 \cdot 35 \cdot 36 \cdot 37 \cdot 42$ duplicando
 36 in 72, e sommando i due
 meri $36 + 37 = 73$, si hanno
 i termini 72. 73.

Uguale data la propor. g. d.
 $132 \cdot 143 \cdot 144 \cdot 145 \cdot 156$ dedotta
 dalla forma $11 \cdot 12 \cdot 13$ divi-
 so per contram.^{do} 145 per diff. 1

in 72. 73

in 72. 73, si hanno gli stessi; e
gli estremi 11. 13 di detta forma
sono le radici di $10:15 = 5:7$.

della scala di 10 a 34 5, morte di arca 10, 35 45 55
 del 10 a 100, 34 45 55, 100 a 1000, 34 45 55, 1000 a 10000, 34 45 55
 a 10000, 34 45 55, la somma di 10000 = 10000, 10000 a 100000, 34 45 55
 di un numero, che è uguale a 100
 ha moltiplicato per il numero
 se, che è il denominatore la
 moltiplica per 100

In altre si opera, che 100
 per numero sopra per 100, e
 sono la radice della ragione, 100
 e si opera per la 100, 4
 e si opera in 100, 25, e questi
 due termini in qualunque modo
 e prendere sono in ogni modo
 ridotti dalla radice della radice

Perché data la proporzione di
 30 35 36 37 40 duplicando
 36 in 10, e sommando i due
 numeri 36 + 36 = 72, e hanno
 i termini 30 72

Equeste data la proporzione di
 100 140 144 145 106 dalla
 della forma in 100, e si
 e per centesimi 100 per 100

126
65

№ II. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 de

| | | | | | | | |
|-------------------|---|---|----|----|----|----|----|
| N_{III}° | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 |
| | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 |

| | | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|----|-------|----|-------|---|
| N ^o VI | 12 | 6 | :: | 1.5 | :: | 1.5 | 3 |
| | 6 | 12 | :: | 1.2 | :: | 1.2 | |
| | 12 | 20 | :: | 3.5 | :: | 6.10 | 4 |
| | 20 | 30 | :: | 2.5 | :: | 10.15 | |
| | 30 | 42 | :: | 5.3 | :: | 15.21 | 5 |
| | 42 | 56 | :: | 3.4 | :: | 21.28 | |
| | 56 | 72 | :: | 7.9 | :: | 28.36 | 6 |
| | 72 | 90 | :: | 4.5 | :: | 36.45 | |
| | 90 | 110 | :: | 9.11 | :: | 45.55 | 7 |
| | 110 | 132 | :: | 5.6 | :: | 55.66 | |
| | 132 | 156 | :: | 11.13 | :: | 66.78 | 8 |
| | 156 | 182 | :: | 6.7 | :: | 78.91 | |

| | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 12 | 13 | 4 | 5 | 6 |
| 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 12 | 15 | 16 | 17 | 20 |
| 20 | 24 | 25 | 26 | 30 |
| 30 | 35 | 36 | 37 | 42 |
| 42 | 48 | 49 | 50 | 59 |
| 56 | 63 | 64 | 65 | 72 |
| 72 | 80 | 81 | 82 | 90 |
| 90 | 99 | 100 | 105 | 110 |
| 110 | 120 | 124 | 127 | 132 |
| 132 | 145 | 144 | 145 | 156 |
| 156 | 168 | 169 | 170 | 182 |

| | | | | | |
|------------------|---|---|---|-------------------------------|------------------------------------|
| N ^o V | 2 | 3 | 6 | Prop ^t . arm. | |
| 0 | 2 | 4 | 6 | Prop ^t . Arithm. | |
| 0 | 2 | 5 | 6 | Prop ^t . Contrarm. | |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | Prop ^t . Geom. discv. |
| 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | Prop ^t . arithm. discv. |

N^o IX

[illegible]

N^o VIII

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---------------------------|-----|---|---|---|----|----|--------------------|
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Progressione aritm. | 144 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 | Propor. de aritma. |
| 2 | 3 | | | 6 | Propor. de armo. | 169 | 6 | 8 | | | 12 | Prop. de aritma. |
| 2 | | 4 | | 6 | Propor. de aritm. | 196 | 6 | 9 | 9 | | 12 | Prop. de aritma. |
| 2 | 3 | 4 | | 6 | Propor. de geom. discreta | 225 | 6 | | | 10 | 12 | Prop. de aritma. |
| 2 | 3 | | 5 | 6 | Prop. de aritm. discreta | | 6 | 8 | 9 | | 12 | Geom. disc. |
| 2 | | | 5 | 6 | Prop. de Centro. | | 6 | 8 | | 10 | 12 | aritm. disc. |
| | 3 | 4 | | | Centro | | | 8 | 9 | | | Centro. |

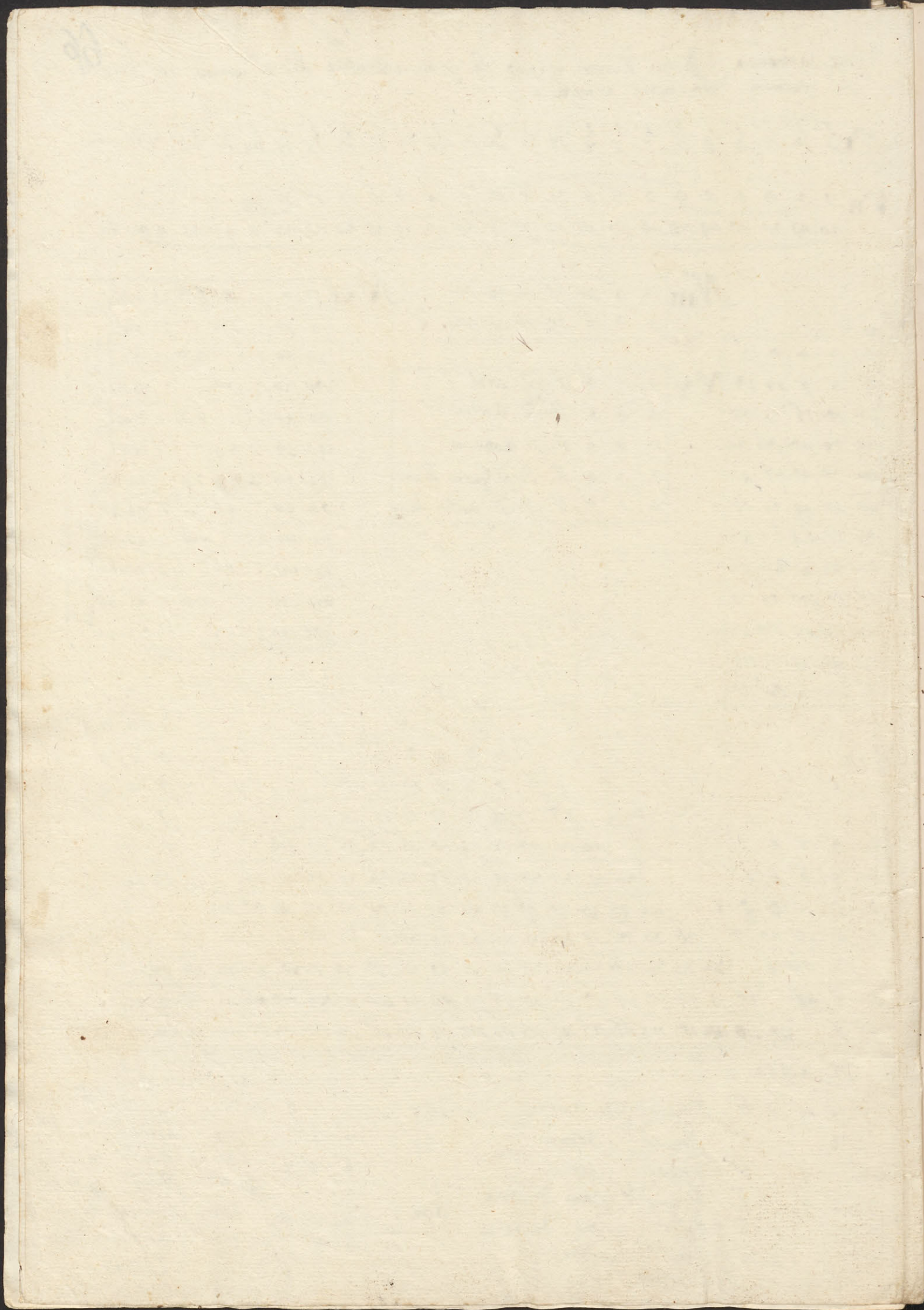
THE UNIVERSITY OF CHICAGO PRESS
 545 N. Dearborn Avenue
 CHICAGO, ILL. 60610

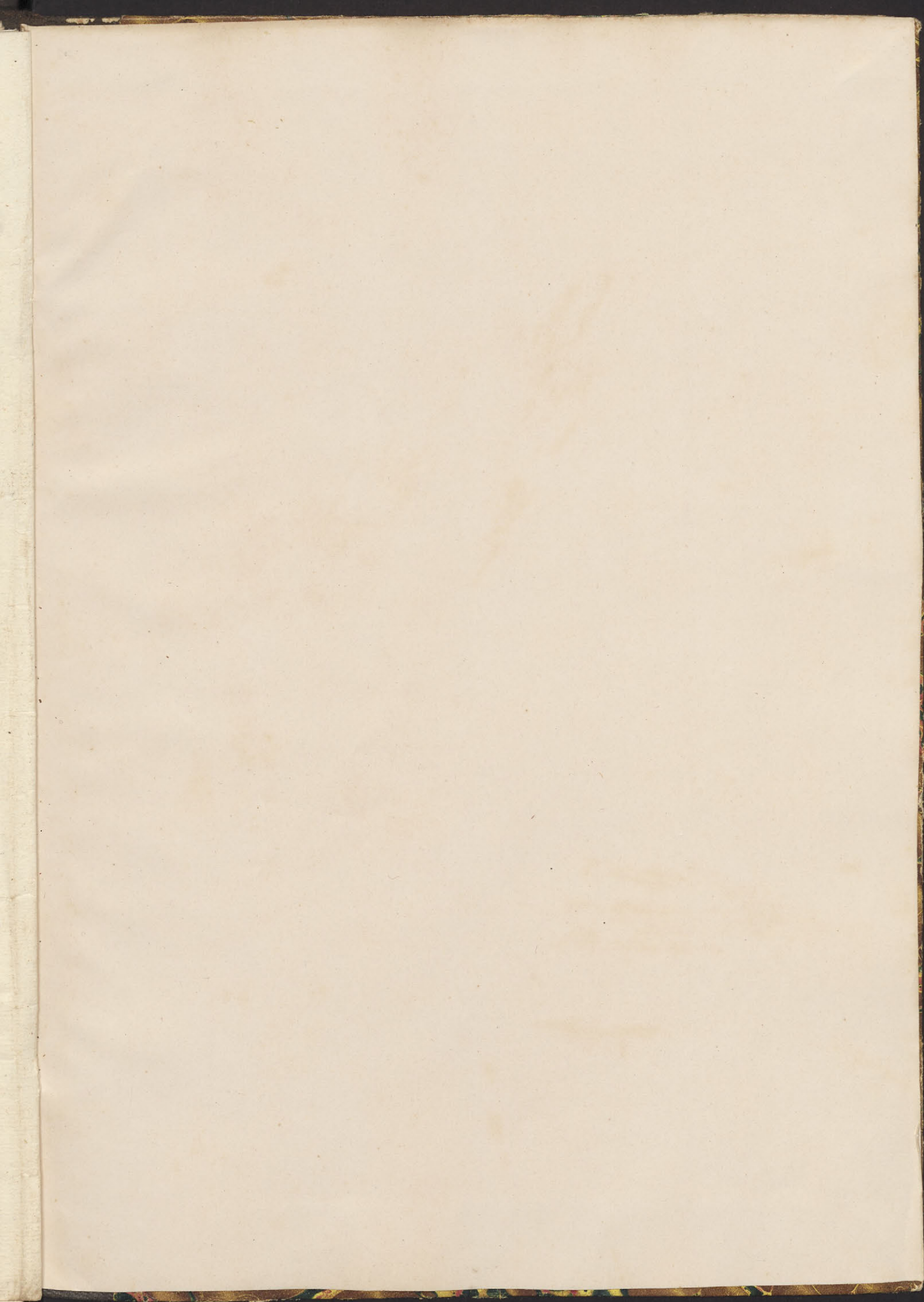
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

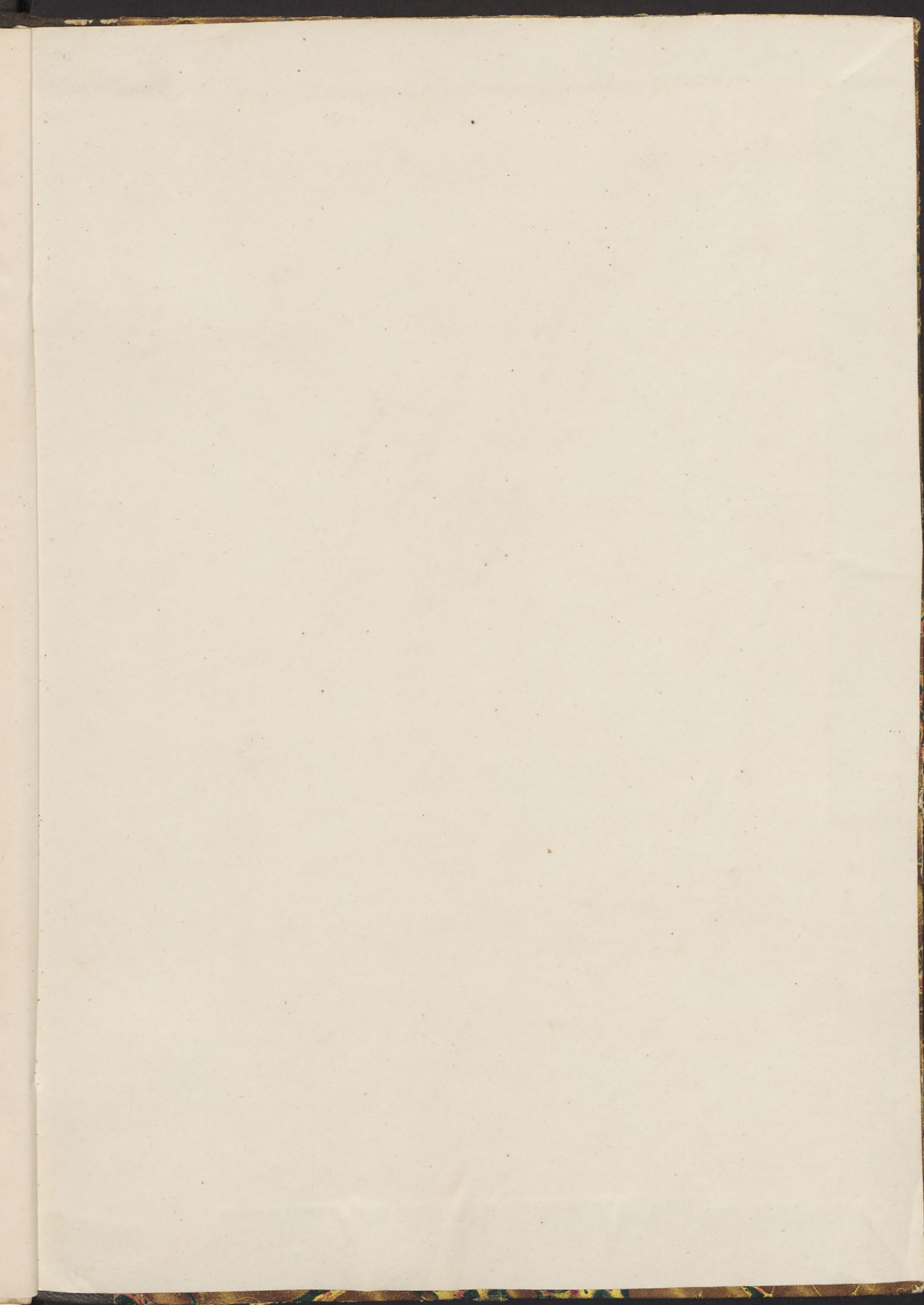
| No. III | | | | | | | | | | No. IV | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

| No. V | | | | | | | | | | No. VI | | | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|--------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

| No. VII | | | | | | | | | | No. VIII | | | | | | | | | |
|---------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|----------|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 | 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 | 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 | 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |







162

